El padre Izquierdo y el triángulo aritmético

Por PEDRO GUIRAO

Sabido es que el triángulo aritmético es la figura básica de todo cálculo de probabilidades. Durante mucho tiempo ha sido denominado *triángulo aritmético de Pascal* por haberse atribuído a este notable filósofo-matemático su descubrimiento. Actualmente se suele denominar *triángulo aritmético de Tartaglia* por haberse averiguado que el matemático renacentista Tartaglia lo había mencionado en su *General Trattato*, pero lo cierto es que esta curiosa e interesante figura matemática se remonta a tiempos mucho más antiguos. Apareció ya en una obra china del año 1303; lo encontramos luego en Europa en la cubierta de un libro de cálculo del sajón Pedro Apiano; aparece luego en la *Arithmetica Integra* de Stifel (Nuremberg, 1543); lo menciona también el matemático inglés Buckley en 1550; se ocupan de él varios matemáticos italianos del Renacimiento, tales como Paciuolo, Tartaglia y Cardán. El *General Trattato* de Tartaglia es del año 1556. Lo estudian también el francés Borrel (1569) y varios discípulos de Raimundo Lulio.

Pero parece como si se hubiese hecho una especie de conspiración del silencio alrededor de estos lulistas que trataron del triángulo aritmético, sobre todo cuando eran españoles. Nadie menciona al franciscano Bernardo de Lavinheta, doctor en Artes y en Teología, de nacionalidad italiana y profesor de filosofía lulista en la Universidad de París, quien menciona números del triángulo aritmético al tratar de los números piramidales.

Otro notable lulista de nacionalidad española, el P. Izquierdo, S. J. no se limita a mencionar números del triángulo aritmético, sino que transcribe esta figura y la estudia concienzuda y agudamente en su monumental obra *Pharus Scientiarum* (Lyon, 1659) al tratar de las combinaciones en la *Disputatio XXIX* del *Tratado* 6.º de dicha obra.

Ahora bien, el *Tratado del triángulo aritmético de* Pascal fué escrito en 1654 y fué publicado en 1665, siete años después de haberse publicado la obra del P. Izquierdo. ¿Cómo se ha atrevido la gente a hablar del triángulo aritmético de Pascal, habiendo una prioridad tan manifiesta por parte del P. Izquierdo? Yo creo que la contestación es ésta: en el extranjero menosprecian por lo general todo lo español, salvo lo pintoresco, y en España ignoramos los grandes valores españoles. Ignorábamos totalmente al P. Izquierdo hasta que el P. Ceñal, S. J. nos lo ha descubierto recientemente.

El P. Sebastián Izquierdo, S. J., nació en Alcaraz (Albacete) en 1601 y murió en Roma en 1681. Enseñó Filosofía y Teología en Alcalá, Murcia y Madrid. Fué nombrado Asistente del P. General para España e Indias occidentales y desempeñó el cargo de Calificador del Consejo Supremo de la Inquisición española. Escribió obras de ascética, unas *Prácticas de los ejercicios espirituales* y una magna obra titulada *Pharus Scientiarum*. En la Biblioteca Nacional de Madrid hay un ejemplar de esta obra, impresa en un solo volumen, año 1659 (signatura 3/44.999), editada en Lyon.

El *Pharus Scientiarum* contiene seis tratados, titulados respectivamente:

1.º Origen y naturaleza del entendimiento humano.
2.º Accidentes de la intelección humana.
3.º Del objeto del entendimiento humano.
4.º De los términos, de las proposiciones y de la argumentación.
5.º De la ciencia humana.
6.º De los instrumentos y reglas de la ciencia.

Era el P. Izquierdo hombre de un sólido equilibrio mental que le permitía moverse desembarazadamente en el turbio ambiente del Renacimiento y de las nuevas tendencias filosóficas. Dentro de la más pura ortodoxia, aceptaba todo lo que de aceptable había en las nuevas ideas, lo que pone de manifiesto cuán equivocado es suponer que la Inquisición ponía cortapisas al legítimo desenvolvimiento del saber y de la ciencia.

Vemos así que, frente a la clásica enumeración de los instrumentos de la ciencia (definición, división, clasificación y argumentación), el P. Izquierdo afirma que son los diez siguientes: observación, comparación, división, definición, locación, combinación, argumentación, traducción o razonamiento analógico, memoria y tradición.

Y en vez de aferrarse al *Organon* aristotélico, menciona el P. Izquierdo siete métodos científicos (dos antiguos y cinco modernos de su tiempo):

1.º El *Organon* de Aristóteles.
2.º La *Retórica* de Cicerón y Quintiliano.
3.º El *Ars Mirabilis* de Raimundo Lulio.
4.º El *Syntaxes Artis Mirabilis* de Pedro Gregorio Tolosano, que era una variante del *Ars Magna* de Raimundo Lulio.
5.º El *Digestum Sapientiae* del P. Ivo, capuchino de París, que es otra variante del *Ars Magna* luliano.
6.º El *Ars ciclognómica* de Cornelio Gemma.
7.º La *Instauratio Magna* de Francisco Bacon. Dice de esta obra que, aunque herética, contiene muchas cosas aprovechables.

Vemos, pues, que el P. Izquierdo, Calificador del Consejo Supremo de la Inquisición española, combina la lógica aristotélica con la luliana y con la experimental de Bacon. En cambio no hay indicios de que conociera el Método de Descartes, y menos aún, la novedad que este mismo método significaba respecto de los anteriores.

En la *Disputatio XXIX*, incluída en el Tratado sexto, titulada *De Combinatione*, trata el P. Izquierdo del método combinatorio. Y podrá pensarse, dada la filiación lulista del autor, que en este tratado sigue a Raimundo Lulio, pero no es así, pues manifiesta varias veces que sigue al P. Clavio, S. J., en su comentario al libro primero del *Sphaera*.

Despertada mi curiosidad, he buscado la referida obra del P. Clavio y la he encontrado en la Biblioteca Nacional de Madrid. Se titula así: *Christophori Clavii Bambergensis, S. J., in Sphaeram Joannis de Sacro Bosco comentariis*, Lyon, 1602. Esta obra es un comentario, escrito por Cristóbal Clavio en Roma el año 1581, acerca de la obra *Sphaera* de Juan de Sacro Bosco, un monje que vivió en Inglaterra a principios del siglo XIII y que parece latinizó su nombre Holywood (bosque sagrado), convirtiéndolo en Sacro Bosco. Este *Tratado de la Esfera* fué el texto de astronomía y cosmografía que gozó de mayor autoridad desde los siglos XIII al XVII.

En el Catálogo de la Biblioteca Nacional de Madrid figuran varias ediciones antiguas del *Sphaera*, pero en las signaturas indicadas por el catálogo se encuentran otras obras. No obstante, he encontrado un ejemplar de una edición antigua en la Biblioteca Central de Barcelona (*Textus de Sphaera, Yoannis de Sacro Bosco*, París, 1534.) En la Biblioteca Nacional sólo he encontrado una moderna traducción inglesa de dicha obra, adicionada con varios comentarios, muy inferiores todos ellos al del P. Clavio.

El *Sphaera* o *Tratado de la esfera* es un libro conciso, de inspiración pitagórica, que sostiene es el Universo una esfera, dentro de la cual hay otras esferas: astros y planetas, y en el centro el fuego; la Tierra, de forma esférica también, ocupa el lugar más próximo al fuego central.

Esta obra fué ampliamente comentada por los astrónomos y cosmógrafos medioevales y renacentistas. Entre tales renacentistas extranjeros merecen citarse: Lichio Sculano, Juan Bautista de Manfredonia, Fabri Stapulensi, Miguel Scoto, Pierio Valeriano, Elías el Veneciano, Pedro Aliaco y el P. Clavio, S. J. Y entre los españoles destacan los comentarios del maestro Pedro Ciruelo, profesor en Salamanca y en París (año 1500), Jerónimo de Chaves (Sevilla, 1545), Pedro Espinosa (Salamanca, 1550), Baltasar Manuel Bobo (Valencia, 1553), Rodríguez Sáez de Santayana (1568), Roca Mora (Madrid, 1599), el Brocense y Fray Luis de Miranda en Salamanca.

El comentario del P. Clavio es el más amplio y documentado que he podido conocer, aunque resulta ya tardío, pues en su época había aparecido ya la teoría de Copérnico, combatida por el P. Clavio, y que derrumbaba la teoría de la posición central o casi central de la Tierra en el Universo.

Pero ni en el *Sphaera* ni en el Comentario del P. Clavio he logrado encontrar la más ligera referencia a combinaciones numéricas.

El P. Izquierdo utiliza el triángulo aritmético para determinar el número de combinaciones con repetición y sin repetición que pueden formarse con varios elementos. Pero, para proceder con orden, no estará de más que antes hablemos un poco del triángulo aritmético y de sus principales aplicaciones.

El triángulo aritmético es una figura numérica que aparenta una gran sencillez. Si escribimos una fila horizontal de unidades y debajo de ella la misma fila vertical en ángulo recto, no tenemos sino proseguir la figura sumando el número de la izquierda con el número de arriba ($1 + 3 = 4$; $4 + 6 = 10$, etc.) para obtener una figura numérica que se prolonga indefinidamente por la derecha y hacia abajo. Así es como dibuja Pascal el triángulo aritmético.

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	
1	3	6	10		
1	4	10			
1	5				
1					

Se puede dar a la figura una rotación hacia la izquierda y quedará un triángulo con el vértice hacia arriba, resultándonos el triángulo aritmético tal y como lo dibuja Tartaglia.

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

y así sucesivamente continúa

La posición del triángulo de Tartaglia hace que los números de las sucesivas filas horizontales se obtenga sumando los números correspondientes de la inmediata fila superior, pero el triángulo es el mismo, tanto si se dibuja en una como en otra forma. El número 1 del vértice originario es supérfluo.

Las principales y más conocidas aplicaciones del triángulo aritmético se refieren: a) a las potencias de los binomios; b) a los juegos de azar; c) a las combinaciones.

a) *Las potencias de los binomios.*—Si miramos el triángulo aritmético tal como lo dibuja Tartaglia, vemos que las sucesivas filas horizontales nos dan los coeficientes del desarrollo de un binomio en cada una de sus potencias.

	Coeficientes
$(a+b)^2 = a^2 + 2\ a\ b + b^2$	1 2 1
$(a+b)^3 = a^3 + 3\ a^2 b + 3\ a\ b^2 +$	
$+ b^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4 = a^4 + 4\ a^3 b + 6\ a^2 b^2 +$	
$+ 4\ a\ b^3 + b^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5 = a^5 + 5\ a^4 b + 10\ a^3 b^2 +$	
$+ 10\ a^2 b^3 + 5\ a\ b^4 + b^5$...	1 5 10 10 5 1

b) *Juegos de azar.*—El triángulo aritmético se aplica aquí a dos cosas: a conocer las posibilidades y la correspondiente probabilidad de cualquier situación en que pueda encontrarse un partido entre dos bandos regidos por el azar, y a conocer el reparto equitativo de las apuestas, en caso de suspensión del partido.

A las diversas filas horizontales del triángulo de Tartaglia corresponden las posibilidades de lo que puede ocurrir en las distintas jugadas. En el primer tanto hay una posibilidad de que ganen los rojos y otra de que ganen los azules (1 1). En la segunda jugada hay una posibilidad de que los rojos se pongan 2 a 0, dos posibilidades de que los bandos se pongan 1 a 1 y una posibilidad de que los azules se pongan 2 a 0 (1 2 1). En la tercera jugada hay una posibilidad de que los rojos se pongan 3 a 0, posibilidades de que se pongan 2 a 1, tres de que se pongan 1 a 2 y una posibilidad de que se pongan 0 a 3 (1 3 3 1).

Lo de los repartos se hace así: si a un jugador le falta un tanto para terminar el partido y a su contrario le faltan tres tantos, tendremos que faltarán en total cuatro tantos. Buscaremos en las filas horizontales del triángulo de Tartaglia la fila que tenga cuatro miembros y la repartiremos entre los contrincantes de un modo inversamente proporcional; al que le falta un tanto le daremos tres miembros empezando por un extremo y al que le faltan tres tantos le daremos el miembro sobrante. Como la fila de cuatro miembros es 1 3 3 1, al que le falta un tanto le daremos $1 + 3 + 3 = 7$ posibilidades y al contrincante le daremos una sola posibilidad. Traducido esto en dinero, si se jugaban cuatro pesetas cada uno, corresponderán siete a uno y una al otro.

Si a un jugador le faltan dos tantos para terminar el partido y a su contrincante le faltan cuatro (suponiendo, por ejemplo, que jueguen a diez tantos y uno tenga ocho y otro tenga seis) echaremos mano de la fila de seis miembros 1 5 10 10 5 1 y daremos dos miembros $(1 + 5) = 6$ al que le falta cuatro tantos, dejando los cuatro restantes $(10 + 10 + 5 + 1) = 26$ al que le faltan dos tantos. Si se jugasen 16 pesetas cada uno, habría que dar 6 a un jugador y 26 a su contrincante.

c) *Las combinaciones.*—Si yo agrupo varios elementos en forma de que cada grupa difiera cualitativamente de los demás, se dice que los combino. Así, si yo tengo tres elementos *a*, *b*, *c*, puedo combinarlos así:

de uno en uno, *a b c*	3	primarias
de dos en dos, *ab ac bc*	3	secundarias
de tres en tres, *abc*	1	terciaria
Total	7	

Pero si me reservo el derecho de repetir algún término en algún grupo, entonces aumenta el número de combinaciones posibles, según se ve a continuación:

de uno en uno, *a b c*
de dos en dos, *ab ac bc aa bb cc*
de tres en tres, *abc aab aac bba bbc cca ccb aaa bbb ccc*

Nos han resultado las siguientes combinaciones con repetición: 3 primarias, 6 secundarias y 10 terciarias.

Pues bien, el triángulo aritmético nos dice el número de combinaciones que se pueden hacer entre cualquier número de elementos. Para ello es mejor utilizar el triángulo aritmético tal como lo dibuja Pascal y suprimir la fila vertical de unidades. Tendremos así:

```
1  1  1  1  1
2  3  4  5
3 — 6 —10
4  10
5
```

Para averiguar las posibles combinaciones entre 3 elementos, no tenemos sino buscar el número 3 en la primera fila vertical: la línea inclinada hacia arriba nos da las combinaciones sin repetición y la línea horizontal nos da las combinaciones con repetición. Nótese como coinciden con las que hemos mencionado antes: 3 primarias, 3 secundarias y 1 terciaria en las combinaciones sin repetición y 3 primarias, 6 secundarias y 10 terciarias en las combinaciones con repetición.

Para hallar las combinaciones entre 4 elementos, no hay sino prolongar el triángulo, lo que puede hacerse sin dificultad, e incluso darle forma rectangular para mayor comodidad nuestra, pues se prolonga indefinidamente. Tendremos así que las combinaciones entre 4 elementos serán: sin repetición, 4 primarias, 6 secundarias, 3 terciarias y 1 cuaternaria; con repetición, 4 primarias, 10 secundarias, 20 terciarias y 35 cuaternarias.

```
1   1   1   1
2   3   4   5
3   6   10  15
4—10—20—35
```

Como el P. Izquierdo sólo se ocupa de las combinaciones, prescinde de todo lo que se refiere a coeficientes de desarrollos de binomios y a juegos de azar. Trata de las combinaciones con y sin repetición en la forma que acabo de exponer.

Es de advertir que Pascal trató también esta cuestión de la misma manera en un opúsculo titulado *De combinatione*, que fué publicado al mismo tiempo que su *Tratado del triángulo aritmético*, es decir, siete años después de haberse publicado la obra del P. Izquierdo. Cabe pensar que el trabajo de Pascal sobre las combinaciones fué escrito el mismo año que su *Tratado del triángulo aritmético*, o sea, en 1654, pero si tenemos en cuenta que lo escrito por el P. Izquierdo lleva una *licencia provincialis* fechada en 1657 y que la magna obra del P. Izquierdo no es de las que se escriben en un año ni en dos, cabe pensar que el P. Izquierdo escribió sobre combinaciones y sobre el triángulo aritmético con anterioridad a Pascal. Desde luego, lo publicó siete años antes y es de tener en cuenta que lo que escribió Pascal sobre estas cuestiones no pasó de ser una serie de notas para un libro que no llegó a tomar forma definitiva.

He aquí el triángulo aritmético para combinaciones que dibuja el P. Izquierdo en su *Pharus Scientiarum*:

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
4	10	20	35	56	84	120	165	220	286
5	15	35	70	126	210	330	495	715	1,001
6	21	56	126	252	462	792	1,287	2,002	3,003
7	28	84	210	462	924	1,716	3,003	5,005	8,008
8	36	120	330	792	1,716	3,432	6,435	11,440	19,448
9	45	165	495	1,287	3,003	6,435	12,870	24,310	43,758
10	55	220	715	2,002	5,005	11,440	24,310	48,620	92,378

Vemos fácilmente en el triángulo aritmético que el número total de combinaciones sin repetición es el siguiente:

entre	2	elementos,	3
»	3	»	7
»	4	»	15
»	5	»	31
»	6	»	63
»	7	»	127
		etc.	

Y hace notar el P. Izquierdo que esto nos pone de manifiesto la siguiente ley: el número total de combinaciones sin repetición entre n elementos es igual al doble más uno del número total de combinaciones sin repetición entre n-1 elementos.

Distinguen los matemáticos entre combinaciones propiamente dichas, variaciones y permutaciones. En las combinaciones propiamente dichas, los grupos formados difieren en cualidad; en las variaciones, los grupos difieren en cualidad o en orden; en las permutaciones, los grupos sólo difieren en orden.

Ya hemos hablado de las combinaciones propiamente dichas y hemos visto cómo las estudia el P. Izquierdo basándose en el triángulo aritmético. Pero el triángulo aritmético no tiene aplicación directa en las variaciones ni en las permutaciones.

Veamos las variaciones sin repetición.

Tres elementos a b c admiten las siguientes variaciones:

tomados de uno en uno, tres (a b c)
tomados de dos en dos, seis (ab ba ac ca bc cb)
tomados de tres en tres, seis (abc acb bac bca cab cba)

Pero al tomar los tres elementos de tres en tres, la variación de los grupos es solamente de orden; entonces entramos ya en las permutaciones. Las permutaciones son un caso especial de variaciones: cuando los n términos se toman de n en n.

El P. Izquierdo formula la siguiente tabla de variaciones sin repetición, incluyendo las permutaciones:

Número de elementos	Número de variaciones y permutaciones
1	1
2	4
3	15
4	64
5	325
6	1.956

Y hace notar que esta tabla puede proseguir indefinidamente, pues se forma multiplicando el número de elementos por el número de variaciones y permutaciones anteriores más el mismo número de elementos.

Ejemplos:

$$15 = (3.4) + 3$$
$$64 = (4.15) + 4$$
$$325 = (5.64) + 5$$
$$1.956 = (6.325) + 6$$

Esta tabla la descompone así el P. Izquierdo:

1	1	total 1					
2	2	2	total 4				
3	3	6	6	total 15			
4	4	12	24	24	total 64		
5	5	20	60	120	120	total 325	
6	6	30	120	360	720	720	total 1.956
Elementos	Variaciones unitarias	Variaciones binarias	Variaciones ternarias	Variaciones cuaternarias	Variaciones quinarias	Variaciones sexarias	

Así, por ejemplo, 3 términos admiten 3 variaciones tomados de uno en uno, 6 variaciones tomados de dos en dos y 6 variaciones tomados de tres en tres (es decir, 6 permutaciones): total, 15 variaciones y permutaciones sin repetición.

4 términos admiten 4 variaciones tomados de uno en uno, 12 tomados de dos en dos, 24 tomados de tres en tres y 24 tomados de cuatro en cuatro (es decir, 24 permutaciones): total, 64 variaciones y permutaciones sin repetición.

La formación de esta tabla es sencilla e ingeniosa. Se escribe una primera fila vertical con la serie natural de los números y se forma luego una segunda fila vertical, empezando un lugar más abajo y multiplicando el primer número de la izquierda por 1, el segundo por 2, el tercero por 3 y así sucesivamente, haciéndose lo mismo con las siguientes filas. Ejemplo:

2.1 = 2	6.1 = 6
3.2 = 6	12.2 = 24
4.3 = 12	20.3 = 60
5.4 = 20	30.4 = 120

También hace el P. Izquierdo una tabla de las permutaciones sin repetición, separadas de las variaciones. Héla aquí:

Elementos	Permutación sin repetición
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720

Esta tabla puede prolongarse indefinidamente porque vemos que el número de permutaciones entre n elementos es igual al factorial de n (los matemáticos denominan *factorial de un número* al producto de este número por todos los anteriores en la serie natural de los números hasta llegar a la unidad).

Vemos así que:

$$2 = 2 . 1$$
$$6 = 3 . 2 . 1$$
$$24 = 4 . 3 . 2 . 1$$
$$120 = 5 . 4 . 3 . 2 . 1$$
$$720 = 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1$$

Esto lo menciona el P. Izquierdo, aunque sin emplear la palabra *factorial*, señalando también otro procedimiento, idéntico en el fondo, pero más sencillo, para prolongar indefinidamente la serie, basado en esta ley: el número de permutaciones entre n elementos es igual al número de permutaciones entre n-*1* elementos multiplicado por los n elementos.

Todo lo dicho pone de manifiesto el gran valor de esta corriente de pensamiento que Izquierdo recoge: es un buen argumento de la perseverante fecundidad del lulismo entre nosotros. Y no es menor el interés de la obra y doctrina de Izquierdo el inscribirlas, como de derecho le corresponde, en la gran historia de la Matemática del siglo XVII.