Los argumentos de Zenón de Elea y la noción moderna del espacio-tiempo (*)

Por EUGENIO D'ORS

§ 1.

En las obras completas de Minkowzki (1), publicadas después de su prematura muerte y bajo la dirección de Hilbert (2), los trabajos relativos a su concepción del sistema de la relatividad figuran al fin del segundo volumen. Forman dos Memorias de corta extensión, intitulada la una *Raum und Zeit* (3), y la otra: *Eine Ableitung der Grundgleichchungen für die elektromagnetischen Vorgange in bewegten Körpen von Standpunkte der Elektronertheorie* (4). También se hace alguna referencia a la concepción del Espacio-Tiempo por Minkowzki en otra Memoria titulada *Die Grundgeichungen für die electromagnetischen Vorgange in bewegten Körpern* (5).

He aquí algunas de las ideas contenidas en estos trabajos de Minkowzki:

El movimiento de un punto sobre una recta x da lugar a una diagrama, de uso frecuente, que se obtiene así: por las posiciones respectivas x_1, x_2, etcétera, ocupadas por el punto en los instantes t_1, t_2, etc., se levantan perpendiculares a la recta x sobre las cuales se miden las longitudes respectivas t_1, t_2, etc. El lugar geométrico de las extremidades (x_1, t_1), (x_2, t_2), etc., de estas perpendiculares representan, por decirlo así, la historia del punto a través del tiempo. Un punto fijo será representado por una recta perpendicular al eje x; si, en particular el punto coincide con el origen, o, a partir del cual se cuentan las distancias sobre el eje x, la recta representativa será el eje de tiempo t. Un punto que se mueve con un movimiento uniforme está representado por una recta oblicua; y así sucesivamente.

Es claro que este procedimiento puede servir para representar puntos o áreas comprendidas en el plano $x\ y$; y esto, por medio de líneas o superficies tubulares en el espacio de tres dimensiones $x\ y\ t$. Y este mismo procedimiento podría ulteriormente extenderse a movimientos cualesquiera del espacio, si no se estuviese detenido por la dificultad de imaginar las figuras, en un espacio de cuatro dimensiones.

Minkowzki da a esta representación un sentido más profundo que el de una simple diagrama. Imagina un espíritu superior al nuestro, que puede concebir el tiempo como una cuarta dimensión del espacio y seguir al *explorador del tiempo,* la novela célebre de Wells.

Los movimientos sucesivos que observamos en un plano, $x\ y$, aparecen al ser fantástico de Minkowzki como cristalizados en una diagrama del espacio $x\ y\ t$. Con una sola mirada, pues, este genio superior podría abrazar toda la historia del Universo.

Considerado así el tiempo objetivamente en función del espacio, puede ser definido como *el conjunto de acontecimientos que se suceden en un mismo punto,* por ejemplo, en una porción de materia, ligada a un sistema de referencia. El espacio entonces es definido como *el conjunto de los acontecimientos simultáneos.* Esta definición del espacio es la consecuencia del hecho de que un cuerpo en movimiento está definido por el conjunto de posiciones simultáneas de las diversas porciones de materia que lo componen, de sus puntos materiales, por el conjunto de acontecimientos que constituyen la presencia simultánea de estos diversos puntos materiales. El *acontecimiento,* en virtud de lo dicho, se definirá como una *coincidencia del espacio y del tiempo.* Un conjunto de acontecimientos ligados por relación de sucesión (por ejemplo, una ley causal), será, para Minkowzki, una *línea de universo.* Y la noción de *universo,* en sí misma, será una noción sintética en que vendrán a fundirse, inseparables ya las dos antiguas nociones de *espacio* y *tiempo.*

---

(1) Hermann Minkowzki (1864-1909) nacido en Alexoten (Rusia), educado en un colegio de Heidelberg y más tarde en su Universidad. A los diecisiete años fué premiado por la Academia de Ciencias de París por un trabajo sobre la teoría de la formación de las formas cuadráticas de los coeficientes enteros. Doctor en Heidelberg en 1885. Profesor, luego en Gottingen. Autor de *Geometrie der Zahlen,* etc. (V. la nota de Hilbert a la cabeza de las *Obras completas.*)

(2) *Gesammelte Abhandlungen von Hermann Minkowzki. Herausgegeben von David Hilbert. Teubner,* 19, V.

(3) Número XXII de Ges. Abhand. II. 431 (Publicado por primera vez como discurso en la 80 *Naturforscher-Versammlung* en Colonia, 1908 en el *Physikalische Zeitschrift,* 1909-104).

(4) Número XXI de Ges. Abh. II. 405 (P. por primera vez en los *Mathematische Annalen.* B. 68-526).

(5) Número XXX de Ges. Abh. II. 352 (Publicado por primera vez en los *Nachrichten der K. Gesellsckaft der Wissenschaften zu Gottingen, Meth-phys. Klasie.* 1908, pág. 53).

(*) *Nos honramos en este número, primero de nuestro segundo año, con la publicación de este trabajo de Eugenio d'Ors, última parte de su tesis inédita del mismo título, con la que el gran maestro español «Xenius» inicia su colaboración en* THEORÍA. *Junto al valor permanente, siempre actual, de las instuiciones orsianas, sorprende aquí también lo prematuro de la fecha—1913—, que hace de D'Ors uno de los primeros pensadores europeos—acaso el primero español—que asimilaron y expresaron el profundo significado filosófico del cronótopo de Minkowzki. Agredecemos vivamente al maestro su amabilidad y nos congratulamos de que nuestra Revista pueda contar desde ahora con la inspiración y el estímulo de su espíritu agudo y de su saber a la vez enciclopédico y humanista.*

Así, en la ciencia nueva hoy, mañana en la nueva filosofía (una filosofía que debe constituirse sobre los datos de esta ciencia nueva, como la filosofía de Kant sobre los de la crítica newtoniana) la significación de las nociones de espacio y de tiempo no es ya la misma que en la mecánica tradicional.

§ 2.

Nos preguntamos ahora: Este cambio en las nociones fundamentales del espacio y del tiempo, esta noción del Universo considerado como Categoría Unica, como Espacio-Tiempo, ¿es que modifica la manera de plantear el problema de la infinita divisibilidad? Si, teóricamente, el espacio es divisible hasta lo infinito: si, teóricamente, el tiempo es divisible hasta lo infinito: el Espacio-Tiempo, ¿será, teóricamente, divisible hasta lo infinito también?

Observamos en primer lugar, que, según la teoría de la relatividad *un acontecimiento,* es decir, *una línea de universo* o *una parte* de una línea de universo se define como una *coincidencia.* En un lugar del espacio pueden ocurrir infinitos acontecimientos. En un instante del tiempo pueden ocurrir infinitos acontecimientos. Pero *en un lugar único* del espacio, *ceñido a un momento único* del tiempo, puede ocurrir un *acontecimiento* nada más. Y un acontecimiento es así algo indivisible: pues para que un acontecimiento pudiera partirse en fracciones, éstas tendrían que ser homogéneas con él y por lo tanto ser también acontecimientos, cada uno de los cuales tendría un lugar en el espacio y un instante en el tiempo; lo cual nos daría dos instantes en el tiempo, dos lugares en el espacio para el acontecimiento único dado, lo cual es contrario al planteamiento de la hipótesis.

En otros términos, y para mayor claridad gráfica, según el principio de la relatividad, un acontecimiento puede representarse por una *intersección.* Si representamos por E un lugar cualquiera del espacio y por E... la línea de acontecimientos que pueden ser condicionados por él, esta línea, y cada una de sus partes, podrá considerarse como infinitamente divisible. Y lo mismo podremos decir de una línea T... que parta de un instante del tiempo T y representa todos los acontecimientos posibles condicionados por este instante de tiempo. Pero si queremos que estas dos líneas se corten para formar un acontecimiento A, condicionado a la vez por E y por T, esta A se situará precisamente en la intersección, y la intersección debe ser precisamente un punto. Y este punto será realmente tal punto, es decir, un indivisible, pues, si lo impusiéramos descompuestos en dos puntos, uno de ellos forzosamente tendría que estar fuera de una de las dos líneas en cuestión, Ahora, si siguiendo el principio de relatividad, es imposible concebir ningún punto de la línea E... que no se encuentre en función de un T cualquiera —como es imposible concebir ningún punto, T..., que no se encuentre en función de E—, concluiremos que la línea E..., lo mismo que la línea T..., se componen de una serie de intersecciones sucesivas, es decir, de una serie de puntos indivisibles E... y T..., pues infinitos en una extensión serán, sin embargo, finitos en su composición. Por lo tanto, siempre que al proponer su acontecimiento señalamos un doble término cualquiera a estas líneas marcando convenientemente, y por el planteamiento del problema, un principio y un fin, nos las habremos con un perfecto finito, con una suma de puntos indivisibles; que es lo mismo que si dijéramos en el lenguaje aritmético, una suma de unidades.

Cuando pues con Zenón, en la línea infinita de acontecimientos del universo, escogemos un principio y un fin, el lanzamiento de una flecha y su llegada al blanco, por ejemplo, tenemos, entre este principio y este fin, no un espacio infinitamente divisible, como suponía el Eléata (por haber empleado en su razonamiento la porción de espacio con su independencia de tiempo) sino un espacio finitamente divisible; no una suma de elementos divisibles, sino una serie de elementos indivisibles; no una serie de extensiones, sino una suma de intersecciones; o, en otros términos, *no una colección de puntos considerados como cantidades, sino una colección de puntos considerados como acontecimientos.* El trayecto de la flecha, pues, nacido de un acontecimiento, de su separación del arco que la lanzó, llegará a la consumación de otro acontecimiento: su clavamiento en el blanco, mediante una procesión finita de divisiones puntos-acontecimientos; es decir, mediante una operación perfectamente inteligible; es decir —históricamente— por un dejar la manera de pensar de los Eléatas para volver a la manera de pensar de los Pitagóricos.

Y lo mismo podemos decir del ejemplo de Aquiles y la tortuga. También aquí nos encontramos con una línea de universo limitada por dos acontecimientos. El acontecimiento inicial nos es dado con el primer paso que dan para la carrera la lenta bestia y el héroe de ligeros pies. El acontecimiento final es aquel de que nos dan la indicación los matemáticos al decirnos *cuándo* Aquiles alcanzará a la tortuga, es decir a la novena carrera. Sabido el *cuándo,* la teoría de la finita divisibilidad del espacio nos dará el *cómo.* El *cómo se pasa* del acontecimiento inicial al acontecimiento terminal es también aquí recorriendo una colección de puntos del espacio, en función de una colección de instantes del tiempo. Trayecto que, como en el caso anterior, será una adición, y, por consiguiente, una operación finita. Y así el movimiento será inteligible.

Y cuando Diógenes, Cínico u otro empírico cualquiera da su paseo, la razón que hasta hoy rehusaba el acompañarles podrá ya hacerlo sin escrúpulo, porque este paseo no saldrá de la casa de ella.

§ 3.

El Universo, pues, considerado como Tiempo-local o como Espacio-temporal, es un *finito de composición*; es, por lo tanto un *discontinuo.*

¿Cuando se nos habla de continuo debemos entender en la palabra la misma noción si el que nos habla es matemático que si es un físico? ¿El *continuo* de los físicos es el mismo que el de los matemáticos?

No. Y un símil podrá mostrarnos en seguida en qué consiste la diferencia.

Supongamos un movimiento rápido, verbigracia, el de un hombre que corre ante los postes de una empalizada. La serie de los postes en la realidad no es continua sino discreta. Representa una suma de elementos discontinuos separados por intervalos. Así, en el reposo, el paisaje situado detrás de la empalizada lo percibimos por partes, por lo que de él nos dejan ver los intervalos de poste a poste. Pero en el movimiento, el aspecto de este paisaje cambia. Si aquellos intervalos son lo suficientemente grandes en relación a la anchura de los postes y el movimiento del hombre corredor, lo suficientemente rápido, ya no veremos a aquél dividido en fragmentos, sino formando un conjunto continuo; sólo que este conjunto aparecerá teñido de un color algo opaco, como una dilución más pálida del color de los postes. Pensemos también en el juguete llamado *Zootrope,* en que esta fabricación artificial de lo continuo está aplicada a los fines de una ficción del movimiento. Y en el cinematógrafo, que es una nueva aplicación de los mismos principios en que el zootropo está fundado.

Pues bien: cuando un físico convierte un sistema de observaciones en una curva, cuando traduce un sistema de relaciones entre elementos experimentales en una función continua, no hace otra cosa que lo que hacen el corredor ante la empalizada, el espectador del zootropo, el proyectador de la película cinematográfica. Pero, así como la aparente continuidad de lo que ven estos se reduce en el reposo a extensiones dadas. así en la continuidad del físico, por lejos que queramos llevar el análisis de lo infinitamente pequeño, las diferencias se reducirán siempre a una extensión dada, tal, que nuestra percepción no nos permita ir más lejos, aun si se sobrepasan los límites ordinarios con la ayuda de un microscopio o de un ultramicroscopio. Aun suponiendo la invención de instrumentos de análisis más poderosos, lo único que podemos hacer será hacer retardar el límite de la observación de la discontinuidad, pero siempre la posibilidad de apreciar las diferencias estará limitada por las condiciones de la experiencia sensible. Siempre nos encontraremos detenidos ante una extensión finita y no solo no podremos llegar al continuo propiamente dicho, pero ni siquiera a lo infinitamente divisible. Los infinitamente pequeños del físico no son los infinitamente pequeños matemáticos; son únicamente extensiones muy pequeñas, inferiores a las más pequeñas diferencias dadas, de hecho, en la percepción.

En esta inevitable limitación de la percepción sensible se funda una de las teorías más importantes que los físicos deben tener en cuenta: la teoría de los errores en sus experiencias. Esta teoría, que descansa en el cálculo de las probabilidades supone el hecho de que todas nuestras experiencias llegan siempre a extensiones finitas y a diferencias también finitas entre aquellas extensiones. Pero los resultados experimentales, en efecto, se traducen por una función continua que se representa geométricamente por medio de una curva (7). ¿Cómo, pues, pasamos de los datos que nos proporciona la experiencia que son, por lo que acabamos de decir, extensiones finitas, en número finito, separadas por distancias finitas, datos, pues, que constituyen una multiplicidad finita y discontinua, a la curva, y de la curva a la función en que algebraicamente exponen la ley los físicos? Sólo podemos hacerlo mediante procedimientos de extrapolación y de interpolación, es decir, admitiendo que, más allá de los números extremos, de los máximos y mínimos y entre los términos intermedios se puedan admitir otros términos, otros números que los que nos son proporcionados por la observación y la experimentación. Si sólo nos atuviéramos a esta última, si de ellos no nos pudiéramos separar ligeramente en más o en menos, sería imposible llegar a la formulación rigurosa de una ley. La teoría de los errores de experiencia permite decir en qué casos estas separaciones son legítimas para obtener una función continua.

Este empleo del cálculo de probabilidades es tenido por los físicos no sólo como lícito, pero también como indispensable si de la discontinuidad episódica de los resultados de la experiencia queremos pasar a la continuidad de una ley. Pero esta legitimidad impone precisamente que se dé un sentido distinto al continuo físico que al continuo matemático. El primero, desde el punto de vista exclusivo del análisis matemático, no es un continuo propiamente dicho. Hay, por consiguiente, una parte de convención, una parte de ilusión cuando se afirma que los resultados de las ciencias físicas pueden traducirse en relaciones matemáticas rigurosas. La concepción cartesiana, continuada después y durante todo el siglo XVIII por los físicos newtonianos, es, sin duda, perfectamente aplicable dentro de ciertos límites, más allá sin duda de los límites de la ordinaria percepción sensible. Pero, ya hace más de medio siglo que la obra de Víctor Regnault ha precisado el carácter de aquella convención, ha disipado esta ilusión, mostrando, aun sin salir del terreno de la experiencia, pero llevándola a un rigor superior, que el valor de las fórmulas es sólo relativo, relativo el grado de precisión de las medidas.

§ 4.

Representémonos una serie de fenómenos sucesivos y encadenados, una *línea de universo.* Representémonos en seguida la curva, la *línea geométrica* en que, por el método gráfico, simbolizamos esta serie. Representémonos finalmente la fórmula algebraica, lo que llamaríamos la *línea de análisis* a que esta curva simboliza a su vez, y que, por consiguiente, constituye un símbolo de segundo grado de aquella serie. Acabamos de ver que el continuo de la línea de análisis sólo convencionalmente y mediante

(7) V. Marey. *La méthode graphique dans les sciences.*

la negligencia legítima de pequeños elementos puede representar el continuo de la línea de universo, porque la línea de universo en realidad no es continua, sino discontinua, *discreta*. Ahora bien, el continuo del término medio de simbolización, el continuo de la línea geométrica, ¿a qué clase de continuo pertenece, al continuo real de la serie de análisis o al aparente continuo, discreto en realidad, de una línea de universo?

Pero una línea geométrica se desarrolla en el espacio, y según lo que hemos visto en el capítulo IV de esta tesis, y precisado filosóficamente en el § 1 de este capítulo V, es imposible que una cosa se desarrolle en el espacio sin que se desarrolle también en el tiempo, que puede considerarse según el valor dado por Minkowzki, como una cuarta dimensión de aquel. Luego una línea geométrica, como una línea de universo, estará constituída por una *adición de intersecciones entre ejes de espacio y ejes de tiempo*. Luego, como la línea de universo, la línea geométrica será discontinua. Luego, tendremos que la línea geométrica se compondrá objetivamente de puntos.

Según eso concluímos: *la existencia objetiva del punto como entidad-límite de la divisibilidad geométrica*.

En realidad, etimológicamente, el nombre que con propiedad comprendería al punto, concebido así sería el de *átomo* para indicar la privación de divisibilidad. Pero este nombre ha sido ya aprovechado por la química, la cual, en lugar de él, y para indicar la privación de composición hubiera debido servirse de otro. Para no inducir a confusión, conservamos la palabra *punto*, pero precisando que, según nuestras ideas de finidad y discontinuidad en el expreso geométrico, debe entenderse el punto como entidad límite de división. como entidad indivisible.

En este sentido, el punto en geometría corresponde de todas maneras a lo que el átomo para la química, la molécula para la física. También la aritmética, a pesar de su carácter analítico, conoce una noción-límite, así es la noción del número entero.

§ 5.

La teoría de los números es una parte de las matemáticas llena de dificultades. Aún hoy (y a pesar del esfuerzo que a ella han traído recientemente los que se llaman logísticos, como Peano y Dedekind) no se encuentra bien constituída. Sus primeras adquisiciones sólidas, datan de 1659 y son debidas a Fermat quien publicó entonces una admirable *Relation des nouvelles découvertes dans la science des nombres*, que nos ha sido conservada por una copia de Huygens, impresa recientemente por Ch. Henry. Bien es verdad que el origen remoto de esos descubrimientos, como ha demostrado A. Genocchi, debe buscarse en Euclides, quien ya aprovechó de algo así como del método del descenso indefinido para demostrar que todo número compuesto puede ser dividido por algún número primo (8).

Estos descubrimientos se cifran principalmente en el método llamado del *descenso infinito o indefinido y se funda en la imposibilidad de que una serie de números decrecientes enteros pueda prolongarse hasta lo infinito*. Partiendo de ahí se hace ver, según Legendre, cuando más adelante recogió el método, «que si una propiedad cuya existencia se niega tiene lugar para los grandes números, tendría igualmente lugar para los pequeños» (9). Por medio de ese método se llega, por ejemplo, a una demostración, rigurosamente formal, de la proposición aritmética de que el orden de los factores no altera el producto. He aquí el texto de Legendre, que ha sido traído recientemente por Giovanni Vacca (10) a una discusión.

«Comenzaremos examinando el por qué el producto de dos números permanece el mismo cuando se cambia el orden de los factores, es decir, por qué,

$$A \times B = B \times A$$

Si los números A y B son iguales la proposición es evidente. Examinemos el caso en que los números sean desiguales. Sea A el mayor de los dos números A y B, y sea C su diferencia. Tendremos, por consiguiente,

$$A = B + C$$

Se concederá fácilmente que el producto de $A \times B$, es decir, A tomado B veces es compuesto del producto de $B \times B$ más el producto de $C \times B$ de manera que escribiendo el último multiplicador tendremos:

$$A \times B = B \times B + C \times B$$

Pero el producto de $B \times A$ o B por $B + C$ es también compuesto de B tomado B veces y de B tomado C veces. De manera que tenemos:

$$B \times A = B \times B + B \times C$$

Con ésto se ve que el producto de $A \times B$ será el mismo que el de $B \times A$ si el producto parcial $C \times B$ es igual al $B \times C$. Mas, por la misma razón, la igualdad entre CB y BC se probará por la igualdad entre los dos productos más pequeños CD y DC.

Continuando así se llegará necesariamente, ya al caso en que los dos factores sean iguales, ya al caso en que uno de ellos sea la unidad. En el primer caso la igualdad es manifiesta. Y el segundo caso se incluye en el hecho de que $H \times 1$ es H, lo mismo que $1 \times H$ es H.

Por consiguiente el producto de $A \times B$ es siempre igual al de $B \times A$.»

Vacca, ha presentado la demostración, simplificada en la forma siguiente:

«Para demostrar que $a \times b = b \times a$, téngase en cuenta que a, b son números enteros positivos. Si $a = b$, la igualdad que se quiere demostrar es evidente. Pero si a mayor que b, se puede encontrar un número, c, tal que

(8) VIII, pág. 31.
(9) Legendre, *Théorie des nombres*. Edit. 1883, t. II, pág. I.
(10) *Rev. de Metaphysique et de Morale*. Enero-marzo, 1911. El texto citado por Vacca está tomado de la segunda edición, pág. 1.

$$a = b + c$$

Débese entonces demostrar que,

$$(b + c) \times b = b \times (b + c)$$

o, aplicando la propiedad distributiva del producto, que,

$$b^2 + c \times b = b^2 + b \times c$$

Pero esta igualdad será demostrada si,

$$c \times b = b \times c$$

Ahora, si $b = c$ el teorema está demostrado. Si b es diferente de c es porque uno de ellos es mayor.

Y continuando el razonamiento se llegará a una pareja de números iguales, para los cuales el teorema es evidente».

Inmediatamente se ve la analogía de este método con el empleado por Zenón en sus argumentos y, específicamente, en el argumento de la flecha. Su conclusión es también análoga. En el razonamiento de Legendre se llega a un límite, que es la unidad aritmética. En el razonamiento de Zenón se debe llegar también a un límite que es, según hemos demostrado, el punto geométrico.

Transportando otra vez al lenguaje de la línea de universo lo que hemos sucesivamente transportado al lenguaje de la línea geométrica y de la línea de análisis, tendremos que: *La tortuga alcanzará a Aquiles y la saeta llegará al blanco en el punto de universo inmediatamente siguiente a aquel en que la distancia inicial se haya reducido a un punto.*

Un desenvolvimiento de las ideas de Fermat y Legendre sobre la teoría de los números podría acaso, por otra parte, desarrollar esta noción de límite en la misma aritmética, desalojando de alguna de sus posiciones la noción de infinito. Tendríamos así una a manera de desquite de la conquista de lo abstracto puro, intentada primero por los Eleatas, abandonada entonces, y realizada y afirmada en la Edad Moderna desde Descartes y la invención de la Geometría analítica. Si con eso se aritmetizaba la geometría, después de haberse geometrizado, por la mecánica la física, nosotros, que, con el instrumento noción del Espacio-Tiempo, hemos hecho *física,* en cierto modo, la geometría, podríamos acaso *geometrizar* la aritmética volviendo, por el cultivo de la ciencia pluralística, finitista y discontinua, a la actitud espiritual de los pitagóricos, continuada después por los grandes pensadores griegos del período post-socrático.

No se olvide que Minkowzki ha escrito ya sobre la *Geometría de los números*. No se olvide, por otra parte, que ya la sola noción de *número ordinal* representa un principio de esta infiltración de la geometría en los dominios aritméticos.

§ 6

La tesis que acabamos de establecer, al afirmar la no infinita divisibilidad del espacio, tiene, aparte del antiguo, en el pensamiento griego, algunos antecedentes en la filosofía moderna. Pueden considerarse entre tales las concepciones monadológicas leibnizianas, aunque ligadas en demasía a una noción ininteligible del movimiento, y a la afirmación en las mónadas de un principio de animación, que aparta esta teoría del campo del intelectualismo. Así Kant pudo, al tratar de la antítesis de la segunda antinomia, reprochar a los monadistas el no haber tenido en cuenta las propiedades matemáticas del espacio y el admitir *puntos físicos* que, a la verdad, serían simples, pero que tendrían el privilegio, como partes del espacio, de llenar el espacio por su sola agregación. Pero fué un leibniziano menos conocido, atomista en física, el jesuíta Josef Boscovich (11), quien, en una «Teoría de la filosofía natural, reducida a la única ley de las fuerzas existentes en la naturaleza», formuló concretamente la teoría de un número finito de elementos en el espacio, ligándola a la de la divisibilidad infinita de los intervalos entre aquellos elementos. «Cada intervalo, dice, será, en verdad, divisible hasta lo infinito por la interposición de otros puntos materiales, y luego de otros aún, y así sucesivamente, los cuales puntos, sin embargo, una vez dados serán también en número finito, y dejarán lugar a muchos más. De manera que el infinito estará únicamente en los posibles, pero no en los existentes.» El espacio, en una palabra, no es, visto así, sino una posibilidad de relaciones y estas relaciones pueden tener valores cualesquiera; es ésto lo que expresa su divisibilidad infinita; pero el número de elementos entre los cuales existen estas relaciones es esencialmente finito; y aún podemos añadir que si acontece que las relaciones de dos puntos pueden variar, es decir, si cambian de sitio y plaza el uno con relación al otro, sería contradictorio el pensar que este cambio pudiera producirse de una manera continua, de tal suerte que la distancia entre estos dos elementos hubiera tomado una infinidad de valores distintos. Este desenvolvimiento legítimo de la teoría de Boscovich no fué visto por él, porque él profesaba formalmente la existencia de la ley de continuidad, en virtud de la cual toda extensión variable pasa por todos los grados intermedios; y, si rechaza lo continuo coexistente, es para adoptar lo continuo sucesivo.

Mucho más cerca de nosotros, y dentro de una especie de resurrección que han tenido en Francia las doctrinas leibnizianas, encontramos el pensamiento de Charles Renouvier.

Renouvier ha sido el último representante de esta corriente nacida, a principios del siglo XIX, entre los discípulos de Cousin y sostenida también, aunque con menos profundidad, por Vacherot (12). Recogió en ella la idea cosmológica de un universo compuesto de puntos dinámicos, de átomos inextensos, nueva forma de las mónadas.

Sabido es que el esfuerzo capital del pensamien-

---

(11) Josef Boscovich (1711-1787), autor de la *Théoria. philos. natur.*, *De continuitatis lege*, etc.

(12) V. *La nouvelle monadologie* per Charles Renouvier.

to renouveriano consistió en una tentativa de superación de las dos primeras antinomias de Kant (13). Estas antinomias no tocan el problema geométrico presentado por los argumentos de Zenón de Elea. La primera se refiere a la de la infinidad del espacio y del tiempo, pero a su infinidad de extensión, no de composición. La segunda a la infinidad de composición, pero queda dentro del problema físico, es decir, de la simplicidad o composición de sustancias. Renouvier al tomar el partido de las tesis contra las antítesis de las antinomías, aunque dejaba íntegro, como el mismo Kant, el problema de la finidad o la infinidad de la extensión, adoptaba ya de todas maneras, una actitud finitista, pluralista, una defensa de la discontinuidad del Universo, que más tarde había de ser llevada por Evellin, como veremos en seguida al propio problema de la extensión.

Poco después que la de Renouvier en Francia, aparecía en Alemania otra filosofía finista, la de Eugen Dühring (14). El punto fundamental de la teoría de Dühring es la negación de lo infinito. Dühring, que comenzó su carrera filosófica atacando al cálculo infinitesimal y realizando un gran esfuerzo lógico para disipar el concepto equívoco de lo infinitamente pequeño, y para combatir las representaciones «indecisas y quiméricas» que su enemigo ideológico Kant había dado del espacio y del tiempo, acentuó más adelante esta posición, afirmando el valor absoluto del número. Según él, el número finito es la condición misma de la objetividad. El número de cuerpos del mundo es, en cada instante preciso, un número determinado. Para prescindir de este número finito se tendría que prescindir de las cosas mismas, y llevar el subjetivismo hasta el más puro absurdo. El ininconveniente de la filosofía de Dühring consistió en no ver la relación que necesariamente enlaza el infinito con la continuidad. Rechazando el infinio, juzgó (creemos que influido por el florecimiento contemporáneo del evolucionismo biológico) poder conservar la tesis de la continuidad. Para resolver esto, ideó una distinción entre lo discontinuo heterogéneo (que según él es lo que llamamos «lo directo») y lo discontinuo homogéneo, que, según él, es el del mundo. Este continuo homogéneo era la manera de salvar la continuidad. Dühring, por otra parte, pasó pronto de estas ideas a las del positivismo. Desde este punto, la presentación por él de una cuestión de inteligibilidad pura, como el problema de las aporías, hubiera carecido de sentido.

Un discípulo de Renouvier, Evellin (15), continuó el finitismo de su maestro, aplicándolo a la cuestión sobre la extensión en «La Divisibilité dans la grandeur» (16). La tesis de Evellin se cifra en afirmar que la limitación del número de parte se aplica no sólo a las extensiones reales, sino también a las extensiones puramente ideales, ya que, aun antes de que el entendimiento las designe, las partes existen, y su extensión está enteramente determinada por la extensión tal o cual que la contiene. Como prueba, cita precisamente la existencia del movimiento. «La línea—dice—debe ser tal, intrínsecamente y por esencia, que, una vez dada, se presta al movimiento. Mas, para esto, en necesarío que se componga de partes, porque sin eso el móvil no podría colocarse en ninguna. De ello resulta que las partes que el movimiento supone pertenecen por su naturaleza y son anteriores a cualquier operación del espíritu». De donde se deduce esta conclusión: «El movimiento agota la línea; luego agota sus partes; luego estas partes deben tener un número. Este número no nos es conocido. Pero es necesario que en la realidad sea dado». Inútil creemos insistir en la ineficacia que para combatir las aporías de Zenón de Elea tiene esta posición. Basta fijarse en lo que en ella es parte de la existencia del movimiento.

§ 7

Todos estos antecedentes deben ser tenidos en cuenta para conocer cómo la filosofía finitista ha entrado en el pensamiento moderno. Mas siempre, ante esta corriente, las viejas aporías se presentaban como una insuperable dificultad. Ha sido necesario, para derribarlas, disponer de una nueva noción del espacio. Esta noción es la que hoy nos ha proporcionado la Física nueva, con su instauración del principio de la Relatividad. Esta es la que nosotros hemos podido aprovechar en el presente ensayo.

A la conclusión del cual llegamos, así, no sin fatiga. Una parte de esta fatiga parecerá ociosa. En rigor hubiéramos podido encerrar nuestra demostración en unos cuantos silogismos. Pero, según un método que nos es predilecto, hemos querido encerrar en los límites aparentes de una cuestión monográficamente estrecha una contribución, traída con cierta amplitud, al gran debate contemporáneo entre el intelectualismo y el anti-intelectualismo. Por esto, nos ha sido fácil fijar, por ejemplo, en algún resumen, siquiera rápido, sobre el desarrollo de la Geometría griega o sobre la crisis de la física contemporánea, el *alcance* de los argumentos del Eleata, el *alcance* de su refutación.

En diversos trabajos estamos llevando, en la medida de nuestras fuerzas, un sostenido combate contra algunos *lugares* de la filosofía romántica y a favor de las *ideas claras, concretas y precisas*, ¡de la sacra herencia de la cultura de los griegos! Hemos luchado, luchamos y queremos luchar aún contra el fantasma del *misterio*, contra el fantasma de la *vida interior*, contra el fantasma de *lo inconsciente*, contra el fantasma de *lo inefable* La presente tesis es un episodio de la batalla paralela contra *el infinito* y *la continuidad*.

(13) *Essais de critique générale. Premier essai. Appendice. Critique de la doctrine de Kant.* Pág. 29.
(14) E. Dühring (1883-1921). Obras: *Sache, Leben und Feinde. Wirglichkeits-Philosophie, Naterliche Dialectik*, etc.
(15) Evellin (1885-1910).
(16) *Revue de Métaphysique et de Morale*. 1894.