Zwei Theoreme über die Einerklasse

Von CURT CHRISTIAN

Especial para THEORIA

Gelten folgende Definitionen für die Begriffe Attributenklesse (D_1), Einerklasse (D_2), Aufzählungsklasse (D_3) und Klassenprodukt (D_4):

D_1 $\qquad \rotatebox[origin=c]{180}{ι}\, x = \hat{y}\,(x \varepsilon y)$

D_2 $\qquad \iota\, x = \hat{y}\,(x = y)$

D_3 $\qquad \iota\,(x_1;\, x_2;\, \dots x_n) = \hat{y}\,(x_1 = y \vee x_2 = y \vee \dots \vee x_n = y)$

D_4 $\qquad \Pi\, z = \hat{x}\,(y)\,(y \varepsilon z \supset x \varepsilon y)$

so lassen sich nach Ableitung eines Hilfstheorems über das Klassenprodukt endlicher Klassen

T_1 $\quad z = \iota\,(y_1;\, y_2;\, \dots y_n) \cdot\supset\cdot\ \Pi\, z = x_1 \cap x_2 \cap \dots \cap y_n$

zwei Theoreme über die Einerklasse

T_2 $\qquad \iota\, x = \Pi\, \rotatebox[origin=c]{180}{ι}\, x$

und

T_3 $\quad \rotatebox[origin=c]{180}{ι}\, x = \iota\,(y_1;\, y_2;\, \dots\, y_n) \cdot\supset\cdot\ \iota\, x = y_1 \cap y_2 \cap \dots \cap y_n$

ableiten.

T_1 besagt, daß, wenn y_1, y_2, …, y_n sämtliche Elemente der (endlichen) Klasse z sind, das Klassenprodukt von z identisch ist mit dem Produkt der Klassen y_1, y_2, …, y_n.

T_2 besagt, daß die Einerklasse von x identich ist mit dem Klassenprodukt der Attributenklasse von x.

T_3 besagt, daß, wenn y_1, y_2, …, y_n sämtliche Elemente der (endlichen) Attributenklasse von x sind, die Einerklasse von x identisch ist mit dem Produkt der Attribute (Klassen) y_1, y_2, …, y_n.

T_1 $\qquad z = \iota\,(y_1;\, y_2;\, \dots\, y_n) \cdot\supset\cdot\ \Pi\, z = y_1 \cap y_2 \cap \dots \cap y_n$

Beweis:

$$\supset\cdot\ \Pi\, z = \Pi\, \iota\,(y_1;\, y_2;\, \dots\, y_n)$$

(D_4) $$= \hat{x}\,(y)\,(y \varepsilon \iota\,(y_1;\, y_2;\, \dots\, y_n) \supset x \varepsilon y)$$

(D_3) $$= \hat{x}\,(y)\,(y \varepsilon \hat{y}\,(y_1 = y \vee y_2 = y \dots \vee y_n = y) \supset x \varepsilon y)$$

$$= \hat{x}\,(y)\,(y_1 = y \vee y_2 = y \vee \dots \vee y_n = y \cdot\supset x \varepsilon y)$$

$$= \hat{x}\,(y)\,(y_1 = y \supset x \varepsilon y \cdot y_2 = y \supset x \varepsilon y \dots y_n = y \supset x \varepsilon y)$$

$$= \hat{x}\,(y)\,(y_1 = y \supset x \varepsilon y) \cdot (y)\,(y_2 = y \supset x \varepsilon y) \dots (y)\,(y_n = y \supset x \varepsilon y)$$

$$= \hat{x}\,(x \varepsilon y_1 \cdot x \varepsilon y_2 \cdot \dots x \varepsilon y_n)$$

$$= \hat{x}\,(x \varepsilon y_1 \cap y_2 \cap \dots \cap y_n)$$

$$= y_1 \cap y_2 \cap \dots \cap y_n$$

T_2 (*) $\qquad x = \Pi\, \rotatebox[origin=c]{180}{ι}\, x$

Beweis: (D_4) $$\Pi\, \rotatebox[origin=c]{180}{ι}\, x = \hat{z}\,(y)\,(y \varepsilon \rotatebox[origin=c]{180}{ι}\, x \supset z \varepsilon y)$$

(D_1) $$= \hat{z}\,(y)\,(y \varepsilon \hat{y}\,(x \varepsilon y) \supset z \varepsilon y)$$

$$= \hat{z}\,(y)\,(x \varepsilon y \supset z \varepsilon y)$$

$$= \hat{z}\,(x = z)$$

(D_2) $$= \iota\, x$$

T_3 $\qquad \iota\, x = \iota\,(y_1:\, y_2;\, \dots\, y_n) \cdot\supset\cdot\ \iota\, x = y_1 \cap y_2 \cap \dots \cap y_n$

Beweis: (T_1, T_2: $z = \rotatebox[origin=c]{180}{ι}\, x$, $\Pi\, z = \iota\, x$)

(*) In QUINE's System 'Mathematical Logic' (1951) läßt sich T_2 mit der Elementklausel in der Form $\vdash x \varepsilon V \supset \cdot\ \iota\, x = \Pi\, \rotatebox[origin=c]{180}{ι}\, x$ ableiten.