Die Elimination des Unendlichkeitstheorems in einem intensionalen Kalkül

Von CURT CHRISTIAN

Especial para THEORIA

Aus den logischen Axiomen des Propositionen- und Funktionenkalküls und dem den Peanoschen A x i o m e n gleichwertigen arithmetischen Axiom 'Die Vorgängerrelation in der Reihe der natürlichen Zahlen ist eine Progression' lässt sich eine Reihe intuitiv paradox erscheinender Theoreme ableiten, unter ihnen das Unendlichkeitstheorem (*).

Das Unendlichkeitstheorem besagt, dass der Individuenbereich unendlich viele Elemente enthält:

1.) $$\backsim \mathrm{Fin}(V)$$

Mit 'V' ist die Eigenschaft, mit sich selbst identisch zu sein, bzw. die Eigenschaft, ein Individuenelement zu sein, kllassentheoretisch gesprochen, die Allklasse der Individuenelemente, also der Individuenbereich bezeichnet; es gilt:

2.) $$V \overset{D}{\equiv} (\lambda x)(x = x)$$

Ferner ist mit 'Fin' die Eigenschaft, endlich zu sein, bezeichnet, die so definiert ist:

3.) $$\mathrm{Fin} \overset{D}{\equiv} (\lambda F)[(\quad N)(\mathrm{Nn}(N)\ .\ N(F))]$$

'Nn' bezeichnet die Eigenschaft, eine natürlich Zahl zu sein, und ist so definiert:

4.) $$\mathrm{Nn} \overset{D}{\equiv} (\lambda N)\mathrm{Vorg}^{\geqq 0}(0, N)$$

'Vorg' bezeichnet die Relation «Unmittelbarer Vorgänger in der Reihe der natürlichen Zahlen». Für die Relation 'Vorg' gilt das folgende, den Peanoschen Axiomen gleichwertige Axiom:

5.) $$\mathrm{Prog}(\mathrm{Vorg})$$

Dabei wird mit 'Prog' die Eigenschaft, eine Progression zu sein, bezeichnet, die ganz allgemein so definiert ist:

6.) $$\mathrm{Prog}(R) \overset{D}{\equiv} \mathrm{Un}_{1,2}(R)\ .\ 1(\mathrm{init}(R))\ .\ 0(\mathrm{init}(R^{-1})\ .\ .\ \mathrm{Connex}(R^{>0}).$$

Wegen 6.) ist 5.) L- äquivalent mit:

7.) $$\mathrm{Un}_{1,2}(\mathrm{Vorg})\ .\ 1(\mathrm{init}(\mathrm{Vorg})\ .\ 0(\mathrm{init}(\mathrm{Vorg}^{-1})\ .\ .\ \mathrm{Connex}(\mathrm{Vorg}^{>0})$$

Aus 7.) folgt:

8.) $$\mathrm{Un}_{1,2}(\mathrm{Vorg})$$

8.) ist ex definitione L- äquivalent mit:

9.) $$(M_1)(M_2)(N)(\mathrm{Vorg}(M_1, N)\cdot \mathrm{Vorg}(M_2, N) \supset (M_1 = M_2))$$
$$(M)(N_1)(N_2)(\mathrm{Vorg}(M, N_1)\cdot \mathrm{Vorg}(M, N_2) \supset N_1 = N_2))$$

Die Gründe zur Einführung des Unendlichkeitsannahme 1.) sind folgende: auf Grund des für alle Typenbereiche analog geltenden L- wahren Theorems von der Identität leerer Klassen (Eigenschaften), das wir gleich speziell für die 2. Typenstufe mit 'M' und 'N' als Prädikatenvariabeln für natürliche Zahlen durch

$$\sim \exists(M)\cdot \sim \exists(N) \supset (M = N)$$

formulieren wollen, lassen sich aus der Annahme, dass der Individuenbereich endlich ist, eine Reihe paradoxer Konsequenzen ableiten. Aus dem folgenden Satz

11.) $$(F)(G)(M)(N)(\mathrm{Nn}(M)\ .\ \mathrm{Vorg}^{>0}(M,N)\ .\ M(G)\ .\ .\ (F \subset G) \supset \backsim N(F))$$

und der Definition für 'Kleiner im Bereich der natürlichen Zahlen'

12.) $$(M < N) \overset{D}{\equiv} \mathrm{Vorg}^{>0}(M,N)$$

folgt der Satz:

13.) $$(F)(G)(M)(N)(\mathrm{Nn}(M)\ .\ (M<N)\ .\ M(G)\ .\ (F \subset G) \supset \backsim N(F)),$$

d.h. die in einer endlichen Klasse eingeschlossene Klasse ist nicht grösser als die einschliessende Klasse. Da weiters alle Klassen in der Allklasse eingeschlossen sind, gemäss:

14.) $$(F)(F \subset V)$$

folgt nach einigen geringfügigen Umformungen aus 13.) und 14.):

15.) $$(M)(N)[M(V)\cdot \mathrm{Nn}(M) \supset ((M < N) \supset \sim \exists(N))]$$

d.h. hat ein Individuenbereich nur M Elemente, so gibt es keine Klasse (1. Stufe) mit mehr als M Elementen. Aus 15.) folgt:

16.) $$(M)(N_1)(N_2)[M(V)\cdot \mathrm{Nn}(M) \supset ((M < N_1)\cdot \cdot (M < N_2) \supset \sim \exists(N_1)\cdot \sim \exists(N_2))]$$

Aus 16). und 10.) folgt der intuitiv paradoxerscheinende Satz:

17.) $$(M)(N_1)(N_2)[M(V)\ .\ \mathrm{Nn}(M) \supset ((M<N_1)\ .\ .\ (M<N_2) \supset (N_1 = N_2))]$$

(*) Andererseits lässt sich aus den logischen Axiomen des Propositionen und Funktionenkalküls und dem als Axiom eingeführten Unendlichkeitssatz der arithmetische, dann theorematischen Satz «Die Vorgängerrelation in der Reihe der natürlichen Zahlen ist eine Progression» herleiten.

d. h. hat ein Individuenbereich nur eine endliche Anzahl M von Elementen, so sind alle natürlichen Zahlen, die grösser als M sind, miteinander gleich.

Aus 17.) lassen sich leicht die Sätze 18.) und 19.) herleiten:

18.) $(M)(N_1)(N_2)[M(V)\cdot Nn(M) \supset ((M<N_1)\cdot (M<N_2) \supset (N_1+1=N_2))]$

19.) $(M)(N)[M(V)\cdot Nn(M) \supset ((M<N) \supset (M+1=N+1))]$

Da nun ferner die beiden L-wahren Sätze 20.) und 21.) gelten:

20.) $(N)(Vorg(N, N+1))$

21.) $(N)(N<N+1)$

folgt unter Berücksichtigung der Regel, dass ein wahrer (bzw. L- wahrer) Satz jedem Implikat (bzw. L- Implikat) als Konjunktionsglied zugefügt werden darf, aus 18.) und 20.) der Satz 22 a.), sowie aus 18.) und 21.) der Satz 22 b.):

22.) a.) $(M)(N_1)(N_2)[M(V)\cdot Nn(M) \supset ((M<N_1)\cdot (M<N_2) \supset (N_1+1=N_2)\cdot Vorg(N_1, N_1+1))]$

b.) $(M)(N_1)(N_2)[M(V)\cdot Nn(M) \supset ((M<N_1)\cdot (M<N_2) \supset (N_1+1=N_2)\cdot (N_1<N_1+1))]$

ferner folgt aus 19.) und 20.) der Satz

23.) $(M)(N)[M(V)\cdot Nn(M) \supset ((M<N) \supset (M+1=N+1)\cdot Vorg(M, M+1))]$

Lässt man nun, wie üblich, die beiden Sätze 24.) und 25.) gelten:

24.) $(N_1)(N_2)(N_3)(Vorg(N_1, N_2)\cdot (N_2=N_3) \supset Vorg(N_1, N_3))$

25.) $(N_1)(N_2)(N_3)((N_1<N_2)\cdot (N_2=N_3) \supset (N_1<N_3))$

so folgt aus 22a.) und 24.) der intuitiv paradoxerscheinende Satz 26a.), sowie aus 22b.) und 25.) der intuitiv paradoxerscheinende Satz 26b.):

26.) a.) $(M)(N_1)(N_2)[M(V)\cdot Nn(M) \supset ((M<N_1)\cdot (M<N_2) \supset Vorg(N_1, N_2))]$

b.) $(M)(N_1)(N_2)[M(V)\cdot Nn(M) \supset ((M<N_1)\cdot (M<N_2) \supset (N_1<N_2))]$

d.h. hat ein Individuenbereich bloss eine endliche Anzahl M von Elementen so gilt für den Bereich derjenigen natürlichen Zahlen, die grösser als M sind, dass jede Zahl Vorgänger jeder anderen ist, bzw. dass jede Zahl kleiner als jede andere ist.

Weiters folgt zunächst aus 23.) und 24.) der Satz 27.):

27.) $(M)(N)[M(V)\cdot Nn(M) \supset ((M<N) \supset Vorg(M, N+1))]$

Aus 27.) und 20.) folgt unter Berücksichtigung der im Anschluss an 21.) ausgesprochenen Regel der Satz:

28.) $(M)(N)[M(V)\cdot Nn(M) \supset ((M<N) \supset Vorg(M, N+1)\cdot Vorg(N, N+1))]$

Da nun auf Grund von 9.) der folgende Satz gilt:

29.) $(M)(N)(Vorg(M, N+1)\cdot Vorg(N, N+1) \supset (M=N))$

folgt unter Berücksichtigung, dass

$'(M)(M(V) \supset \exists(M))'$

gilt, aus 28.), 29.) und 15.) der Satz:

30.) $(M)(N)[M(V)\cdot Nn(M) \supset ((M<N) \supset (M=N)\cdot \exists(M) \sim \exists(N))]$

Da das Nebenimplikat des Satzes 30.) den Widerspruch $'\exists(N)\cdot \sim \exists(N)'$ impliziert, also falsch its, folgt aus 30.) unter Berücksichtigung, dass

$'(M)(Nn(M) \supset (\exists N)(M<N))'$

gilt, der Satz:

31.) $(M)(M(V)\cdot Nn(M) \supset \sim(\exists N)(M<N)\cdot (\exists N)(M<N))$

Da das Implikat von 31.) einen Widerspruch darstellt, also falsch ist, folgt aus 31.) und 3.) der Unendlichkeitssatz

1.) $\sim Fin(V)$

Fasst man, wie es häufig geschieht (Carnap) den Satz 5.) als einen L- wahren Satz auf, so erhält man auch das Unendlichkeitstheorem als einen L-wahren Satz. Dabei kommt man aber mit der Intuition in Widerspruch, derzufolge doch die Annahme eines endlichen (typenhomogenen) Individuenbereiches offenbar vollkommen widerspruchslos ist. Etwas anderes ist es freilich wenn man nicht von der Unendlichkeit des Individuenbereiches, sondern von der Unendlichkeit eines alle Entitäten (—Individuen, wie Klassen, bzw. Eigenschaften —) umfassenden Elementenbereiches spricht; dies kann etwa in der Weise geschehen, dass man mit QUINE die typentheoretische Forderung der Typengleichheit von Klassenelementen fallen lässt und dann unter anderem Begriffsbildungen zulässt wie: die Vereiningungsklasse einer Klasse mit ihrer Einerklasse ($F \vee \{F\}$); ist etwa F die 12- gliedrige Klasse der Aposteln, so $F \vee \{F\}$ die 13- gliedrige Klasse, bestehend aus den 12 Aposteln und der Klasse der Aposteln. In dieser Weise fortfahrend würde eine unendliche Reihe stets um 1 Glied differierender Klassen geschaffen werden:

$(F \vee \{F\}), (F \vee \{F\} \vee \{F \vee \{F\}\}),$

$(F \vee \{F\} \vee \{F \vee \{F\}\} \vee \{F \vee \{F \vee \{F \vee \{F\}\}\})$

usw. ad. inf. Startet man bei dieser Begriffsbildung nicht bei einer 12- gliedrigen Klasse, sondern der 0- gliedrigen Leerklasse Λ, so erhält man eine den natürlichen Zahlen korrespondierende Reihe von Klassen, von QUINE «counter sets» genannt, durch die jeder natürlichen Zahl eine nichtleere Klasse entsprechend vielgliedriger Elemente zugeordnet ist. Durch diese Begriffsbildung wird also ein Bereich von unendlich vielen, allerdings typenverschiedenen Elementen garantiert, selbst in dem Fall, wo ein Individuenbereich im eigentlichen Sinn ein Leerbereich wäre.

Im Folgenden soll nun im Rahmen einer intensionalen (Objekt-) Sprache gezeigt werden,

a.) dass bei der definitorischen Einführung des Begriffes «L- Identität» (oder «intensionale Identität») und der strengen Unterscheidung desselben von dem Begriff der gewöhnlichen extensionalen

Identität der intuitiv paradox erscheinende Satz 17.) seinen paradoxen Charakter verliert;

b.) dass bei der definitorischen Einführung des Begriffes «L- Attribut» und der axiomatischen Einführung des Satzes 'Die Vorgängerrelation in der Reihe der natürlichen Zahlen ist ein L- Attribut' sich die Sätze 24.) 25.) als falsch erweisen so dass sich die mittels dieser Sätze abgeleiteten, intuitiv paradox erscheinenden Sätze 26 a.), 26 b.), sowie das Unendlichkeitstheorem gar nicht mehr herleiten lassen.

Eine intensionale (Objekt-) Sprache ist dadurch gekennzeichnet, dass die logische Notwendigkeit eines Sachverhaltes nicht wie in einer extensionalen (Objekt-) Sprache indirekt auf metasprachlichem Umweg durch die L- Wahrheit des den betreffenden Sachverhalt designierenden Satzes, sondern direkt in der Objektsprache ausgedrückt wird. Ist etwa 'p' ein Satz einer extensionalen (Objekt-) Sprache, so wird die L- Notwendigkeit des vom Satz 'p' designierten Sachverhaltes p indirekt metasprachlich so ausgedrückt:

32.) 'p' ist L- wahr,

d.h. der S a t z 'p' ist L- wahr. In einer intensionalen (Objekt-) Sprache wird die logische Notwendigkeit eines Sachverhaltes—die wir wie üblich durch '$\Box$' designieren wollen—direkt in der Objektsprache ausgedrückt, so dass an Stelle von 32.) der Satz 33.) gilt:

33.) $\Box p$,

d.h. der S a c h v e r h a l t p ist L- notwendig.

Durch den Begriff der L- Notwendigkeit lassen sich die Begriffe der L- Möglichkeit, der L- Implikation und der L- Äquivalenz folgendermassen definieren:

34.) $\Diamond p \overset{D}{\equiv} \sim \Box \sim p$

35.) $(p \overset{L}{\supset} q) \overset{D}{\equiv} \Box (p \supset q)$

36.) $(p \overset{L}{\equiv} q) \overset{D}{\equiv} \Box (p \equiv q)$

Die L- Notwendigkeit selbst kann durch folgendes Axiomensystem implizit definiert werden:

37.) a.) $(\sim p \supset p) \overset{L}{\supset} p$

b.) $p \overset{L}{\supset} (\sim p \supset q)$

c.) $(p \supset q) \overset{L}{\supset} (\sim q \supset \sim p)$

d.) $(p \supset q) \overset{L}{\supset} ((q \supset r) \supset (p \supset r))$

e.) Wenn p und $(p \overset{L}{\supset} q)$, so q

f.) $(x)\,Fx \overset{L}{\supset} Fy$

g.) $(x)(Fx \supset Gx) \overset{L}{\supset} ((x)\,Fx \supset (x)\,Gx)$

h.) $(\exists x)\,Fx \overset{L}{\supset} (x)(\exists x)\,Fx$

i.) $\Box p \overset{L}{\supset} p$

j.) $(p \overset{L}{\supset} q) \overset{L}{\supset} (\Box p \supset \Box q)$

k.) $\Diamond p \overset{L}{\supset} \Box \Diamond p$

l.) $(\exists x) \Box Fx \overset{L}{\supset} \Box (x)\,Fx$

Dieses AS der L- Notwendigkeit hat den Vorteil, dass durch Anwendung von 37.i.) auf 37 a) bis 37 h.) sich die Axiome des gewöhnlichen extensionalen Propositionen- und Funktionenkalküls sofort ergeben. 37 k.) gewährleistet die Reduktion iterierter Modalitäten; aus 37 l.) lässt sich eine Reihe wichtiger, von Carnap angegebener Theoreme des modalen Funktionenkalküls ableiten:

38.) a.) $(x) \Box Fx \overset{L}{\equiv} \Box (x)\,Fx$

b.) $(\exists x) \Box Fx \overset{L}{\supset} \Box (\exists x)\,Fx$

c.) $(\exists x) \Diamond Fx \overset{L}{\equiv} \Diamond (\exists x)\,Fx$

d.) $\Diamond (x)\,Fx \overset{L}{\supset} (x) \Diamond Fx$

37. f.), g.), h.) sind ganz analog zu 37. i.), j.), k.): es entsprechen einander Generalisator und Necessitator einerseits, Partikularisator und Possibilator andererseits; dies zeigt sich auch in den algeleiteten Theoremen.

Analog zu den in 35.) und 36.) definierten Begriffen der L- Implikation und der L- Äquivalenz lässt sich der Begriff der L- Identität einführen, so dass 2 verschiedene Formen von Identität unterschieden werden müssen:

a.) die Identität schlechthin (materiale oder extensionale Identität), die wir wie üblich durch '$=$' symbolisieren und hier nur für die Typenstufen 0 und 2 definieren:

39.) a.) $(x = y) \overset{D}{\equiv} (F)\,Fx \equiv Fy$

b.) $(M = N) \overset{D}{\equiv} (F)(M(F) \equiv N(F))$

b.) die L- Identität (intensionale oder strikte Identität), die wir durch '$\overset{L}{=}$' symbolisieren und hier nur für die Typenstufen 0 und 2 definieren:

40.) a.) $(x \overset{L}{=} y) \overset{D}{\equiv} \Box (x = y)$

b.) $(M \overset{L}{=} N) \overset{D}{\equiv} \Box (M = N)$

Aus 36.), 39.) und 40.) folgt:

41.) a.) $(x \overset{L}{=} y) \overset{L}{\equiv} (F)(Fx \overset{L}{\equiv} Fy)$

b.) $(M \overset{L}{=} N) \overset{L}{\equiv} (F)(M(F) \overset{L}{\equiv} N(F))$

Die beiden Identitätsformen sind u.a. in Folgendem gekennzeichnet:

A.) Aus 37 i.) und 40.) folgt:

42.) a.) $(x \overset{L}{=} y) \overset{L}{\supset} (x = y)$

b.) $(M \overset{L}{=} N) \overset{L}{\supset} (M = N)$

Dagegen lässt sich n i c h t 43.) herleiten:

43.) a.) $(F!:)\,(x = y) \overset{L}{\supset} (x \overset{L}{=} y)$

b.) $(F!:)\,(M = N) \overset{L}{\supset} (M \overset{L}{=} N)$

B.) Das Theorem von der Identität leerer Klassen (Eigenschaften) lässt sich nur für die extensionale Identität herleiten, nicht jedoch für die L-Identität; speziell für die 2. Typenstufe mit 'M' und 'N' als Prädikatenvariabeln für natürliche Zahlen gilt wohl:

10.) $\sim \exists (M) \cdot \sim \exists (N) \supset (M = N)$

dagegen gilt nicht:

44.) $(f!:) \quad \sim \exists (M) \cdot \sim \exists (N) \supset (M \overset{L}{=} N)$

Daher lässt sich in 10.) bis 17.) wohl der Satz 17.) herleiten:

17.) $(M)(N_1)(N_2)[M(V) \cdot Nn(M) \supset ((M < N_1) \cdot (M < N_2) \supset (N_1 = N_2))]$

dagegen lässt sich nicht herleiten:

45.) $(f!:) \quad (M)(N_1)(N_2)[M(V) \cdot Nn(M) \supset ((M < N_1) \cdot (M < N_2) \supset (N_1 \overset{L}{=} N_2))$

Analoges gilt auch für die aus 17.) folgenden Sätze 18.) und 19.).

C.) Die arithmetischen Sätze, —die uns hier nur als den Bereich der natürlichen Zahlen betreffend interessieren—, lassen sich als L- wahre, d.h. L-notwendige Sachverhalte designierende Sätze beweisen. Sind etwa 'f' und 'g' zwei—zulässigen Operationen im Bereiche der natürlichen Zahlen entsprechende—Funktoren mit natürlichen Zahlen als Argumenten, so ist die allgemeine Form eines arithmetischen Satzes: '$f(M_1,\ldots,M_m) = g(N_1,\ldots,N_n)$'; und wegen der L-Wahrheit dieses Satzes gilt bei einer extensionalen Sprache der metasprachliche Satz

46.) '$f(M_1,\ldots,M_m) = g(N_1,\ldots,N_n)$' ist L- wahr;

in einer intensionalen Sprache gilt dagegen an Stelle von 46.) der objektsprachliche Satz

47.) $\Box(f(M_1,\ldots,M_m) = g(N_1,\ldots,N_n))$

46.) verhält sich zu 47.) sowie 32.) zu 33.). Aus 47.) folgt wegen 40 b.) der mit 47.) L- äquivalente Satz 48.):

48.) $f(M_1,\ldots,M_m) \overset{L}{=} g(N_1,\ldots,N_n)$

Die in arithmetischen Sätzen ausgesprochenen Identitäten sind also L- Identitäten. Daraus folgt, dass die im Falle eines endlichen Individuenbereiches auftretenden Identitäten, die gemäss 17.) und 45.) blosse extensionale, aber keine L- Identitäten sind, arithmetisch nicht relevant sind. Dass diese Identitäten darüberhinaus auch nicht paradox sind, wollen wir in D.) aufweisen.

D.) Sind 'F' und 'G' zwei (typengleiche) Prädikate, so gilt '$F \overset{L}{=} G$' dann und nur dann, wenn die Intensionen der Prädikate 'F' und 'G', das sind die den beiden Prädikaten korrespondierenden Eigenschaften identisch sind; dagegen gilt '$F = G$' dann und nur dann, wenn die Extensionen der Prädikate 'F' und 'G', das sind die den beiden Prädikaten korrespondierenden Klassen identisch sind. Sind die den Prädikaten 'F' und 'G' korrespondierenden Klassen leer, d.h. gilt '$\sim \exists (F) \cdot \sim \exists (G)$', so sind auf Grund des Theorems von der Identität leerer Klassen die beiden Klassen identisch, d.h. es gilt '$F = G$', auch dann, wenn die den Prädikaten korrespondierenden Eigenschaften verschieden sind, d.h. '$\sim(F \overset{L}{=} G)$' gilt. Und das ist vollkommen unparadox, denn die Identität zweier leerer —2 intensionsverschiedenen Prädikaten 'F' und 'G' korrespondierenden—Klassen besagt lediglich, dass den Prädikaten 'F' und 'G' gleichermassen eine 0-gliedrige Leerklasse entspricht. Paradox, ja widerspruchsvoll wäre es, wenn im Falle '$\sim \exists (F) \cdot \sim \exists (G)$' der Satz '$F \overset{L}{=} G$' gelten möchte, denn das würde bedeuten, dass unter Umständen zwei verschiedene Eigenschaften nichtverschieden sind. Was allgemein für irgendwelche (typengleiche) Prädikate gilt, gilt selbstverständlich speziell für natürliche-Zahlenprädikate ('M' und 'N'): '$M \overset{L}{=} N$' gilt dann und nur dann, wenn die Intensionen der Zahlenprädikate 'M' und 'N', das sind die den Zahlenprädikaten korrespondierenden Zahlen identisch sind; dagegen gilt '$M = N$' dann und nur dann, wenn die Extensionen der Zahlenprädikate 'M' und 'N', das sind die den beiden Zahlenprädikaten korrespondierenden Klassen von Klassen (I. Typenstufe) identisch sind. Hat ein Individuenbereich bloss eine endliche Anzahl M von Elementen, so sind gemäss 17.) alle natürlichen Zahlen, die grösser als M sind, miteinander extensional identisch, d.h. dass allen natürlichen Zahlen, die grösser als M sind, gleichermassen eine 0- gliedrige Leerklasse entspricht, was vollkommen unparadox ist, da das nichts anderes besagt, als dass es keine Klasse mit mehr als M Elementen gibt. Wirklich paradox, ja widerspruchsvoll wäre, wenn 45.) gelten möchte; denn das würde besagen, dass im Falle eines endlichen Individuenbereiches mit bloss M Elementen alle voneinander verschiedenen natürlichen Zahlen, die grösser als M sind, nichtverschieden sind. Der Satz 17.) erscheint nur solange paradox, als die beiden Identitätsformen nicht hinlänglich scharf voneinander geschieden werden, wie es in einer intensionalen Sprache möglich ist.

E.) Rein formal (—was hier jedoch nicht gezeigt werden soll—) lässt sich aus 37.) folgende Regel begründen: in einem extensionalen Kontext können ohne Wahrheitswertänderung einzelne Ausdrücke durch beliebige mit ihnen extensional oder intensional identische Ausdrücke ersetzt werden; in intensionalen Kontexten dürfen ohne Wahrheitswertänderung einzelne Ausdrücke nur durch mit ihnen L- identische (intensional identische) Ausdrücke ersetzt werden. Ist insbesonders F ein n-stelliges L- Attribut (intensionales Attribut), das durch

49.) $\text{L- Attr }(F) \overset{D}{\equiv} (x_1)\,.\,.\,(x_i)\,.\,.(x_n)(F(x_1,\ .x_i,\ .x_n) \overset{L}{\equiv} \Box F(x_1,\ .x_i,\ .x_n))$

definiert sei, so darf in dem deshalb intensionalen Satz '$F(x_1,\ .x_i,\ .x_n)$' ein Argumentausdruck 'x_i' nur durch einen mit ihm L- identischen Argumentausdruck 'y_i' ohne Wahrheitswertänderung ersetzt werden, da nämlich 50.) gilt:

$$50.)\quad \text{L- Attr}(F)\,.\,(x_i \overset{L}{=} y_i) \supset (F(x_1,\ .x_i,\ .x_n) \equiv$$
$$\equiv F(x_1,\ .y_i,\ .x_n));$$

n i c h t darf jedoch in dem intensionalen Satz '$F(x_1,\ .x_i,\ .x_n)$' ein Argumentausdruck 'x_i' durch einen mit ihm bloss extensional identischen Argumentausdruck ersetzt werden, da nämlich n i c h t 51.) gilt:

$$51.)\ (f!:)\ \text{L-Attr}(F)\,.\,(x_i = y_i) \supset (F(x_1,\ .x_i,\ .x_n) \equiv$$
$$\equiv F(x_1,\ .y_i,\ .x_n)).$$

Führt man nun för die 2-stellige Relation 3. Stufe «Unmittelbarer Vorgänger in der Reihe der natürlichen Zahlen» den axiomatischen Satz 52.) ein:

$$52.)\qquad \text{L- Attr(Vorg)}$$

so gelten, wie leicht zu sehen ist, auch die Sätze 53.) und 54.):

$$53.)\qquad \text{L- Attr}(\text{Vorg}^{-1})$$

$$54.)\qquad \text{L- Attr}(\text{Vorg}^{>0})$$

Definiert man die Relation «Unmittelbarer Nachfolger in der Reihe der natürlichen Zahlen» durch:

$$55.)\qquad \text{Succ} \overset{D}{\equiv} \text{Vorg}^{-1}$$

so folgt aus 53.) und 55.):

$$56.)\qquad \text{L- Attr(Succ)}$$

ferner folgt aus 54.) und 12.):

$$57.)\qquad \text{L- Attr}(<).$$

Aus 49.), 50.), 51.), 52.) und 57.) ergeben sich ferner die folgenden Sätze:

$$58.)\ \text{a.})\qquad \text{Vorg}(N_1,N_2) \overset{L}{\equiv} \Box\text{Vorg}(N_1,N_2)$$

$$\text{b.})\qquad \text{Succ}(N_2,N_1) \overset{L}{\equiv} \Box\text{Succ}(N_2,N_1)$$

$$\text{c.})\qquad (N_1<N_2) \overset{L}{\equiv} \Box(N_1<N_2)$$

$$59.)\ \text{a.})\qquad (N_2 \overset{L}{=} N_3) \supset (\text{Vorg}(N_1,N_2) \equiv \text{Vorg}(N_1,N_3))$$

$$\text{b.})\qquad (N_2 \overset{L}{=} N_3) \supset (\text{Succ}(N_2,N_1) \equiv \text{Succ}(N_3,N_1))$$

$$\text{c.})\qquad (N_2 \overset{L}{=} N_3) \supset ((N_1<N_2) \equiv (N_1<N_3))$$

$$60.)\ \text{a.})\ (f!:)\ (N_2 = N_3) \supset (\text{Vorg}(N_1,N_2) \equiv \text{Vorg}(N_1,N_3))$$

$$\text{b.})\ (f!:)\ (N_2 = N_3) \supset (\text{Succ}(N_2,N_1) \equiv \text{Succ}(N_3,N_1))$$

$$\text{c.})\ (f!:)\ (N_2 = N_3) \supset ((N_1<N_2) \equiv (N_1<N_3))$$

$$61.)\ \text{a.})\qquad (\text{Vorg}`N_2 \overset{L}{=} N_1) \equiv \text{Vorg}(N_1,N_2)$$

$$\text{b.})\qquad (\text{Succ}`N_1 \overset{L}{=} N_2) \equiv \text{Succ}(N_2,N_1)^{*}$$

$$62.)\ \text{a.})\ (f!:)\ (\text{Vorg}`N_2 = N_1) \equiv \text{Vorg}(N_1.N_2)$$

$$\text{b.})\ (f!:)\ (\text{Succ}`N_1 = N_2) \equiv \text{Succ}(N_2,N_1)^{*}$$

Auf Grund der Sätze 60 a.) und 60 c.) folgt nun, dass nach Einführung von 52.) die Sätze 24.) und 25.), mittels denen die intuitiv paradox erscheinenden Sätze 26 a.), 26 b.), sowie der Unendlichkeitssatz 1.) abgeleitet wurden, falsch sind. Bei der Nichtgeltung von 24.) und 25.) lassen aber die Sätze 26 a.) und 26 b.), sowie der Unendlichkeitssatz 1.) nicht mehr herleiten.

Damit ist gezeigt, dass bei der strengen Unterscheidung der beiden Identitätsformen, nämlich der extensionalen und intensionalen (oder L-) Identität, ferner bei der zu 5.) zusätzlichen axiomatischen Einführung von 52.) der intuitiv paradox erscheinende Satz 17.) seinen paradoxen Charakter verliert und weiters sich die intuitiv paradox erscheinenden Sätze 26 a.), 26 b.), sowie der Unendlichkeitssatz 1.) nicht mehr herleiten lassen, w.z.b.w.

Wien, März 1955.

(*) So lässt sich wohl herleiten: $(\text{Succ}`M \overset{L}{=} \text{Succ}`N) \supset (M=N)$ gemäss: $((\text{Succ}`M \overset{L}{=} \text{Succ}`N) \supset \text{Succ}(\text{Succ}`N, M)) \supset (\text{Succ}(\text{Succ}`N,M)\,.\,\text{Succ}(\text{Succ}`N, N)\,.\,(\text{Satz } 9)) \supset ((M=N)))$. Dagegen lässt sich nicht herleiten: $(\text{Succ}`M = \text{Succ}`N) \supset (M=N)$ (Peano).