LA IDENTIDAD DE LAS FIGURAS GEOMETRICAS

Javier ECHEVERRÍA

ABSTRACT

The *Erlangen Program* of F. Klein ensures a ground for the ἔκθεσις procedure, which has not been much studied in the recent debates about geometrical analysis, but refers to a more general problem: the identity of a sign within a sign system, and the attempts of reduction of the mentioned system by another one. The example considered is the reduction of the conics to characteristic rectangles realized by Apollonius. Starting from Klein and Apollonius, as well as from cartesian geometry, the figures are considered as geometric signs, and the proposed analysis of sign identity are conceived as models to follow in the analysis of identity of mathematical signs in general.

I: Introducción

Una cuestión básica en filosofía de las matemáticas, y en general en filosofía de la ciencia, se refiere a la identidad de los signos matemáticos. Se razona, se refuta y se experimenta mediante números, signos lógicos y algebraicos, figuras geométricas, gráficos, tablas de datos, etc.; y en todo momento se presupone la identidad de cada uno de esos instrumentos científicos. Szabo [1] destacó el hecho de que, en el origen de la matemática griega, demostrar (δείκνυμι) era la acción de hacer ver concretamente, y que por lo tanto implicaba una deixis. Aun hoy, en la enseñanza, se muestra que al final de una cadena demostrativa se ha obtenido lo que se quería demostrar.

Sin embargo, los recursos para la deixis demostrativa se han refinado considerablemente. Apelar a un axioma, o a un teorema ya demostrado, al objeto de justificar un ulterior paso demostrativo, implica evocar y hacer ver la expresión concreta y sensible de dicho axioma, normalmente a base de citarlo: decir "en virtud de la definición 5 del libro de los Elementos de Euclides", o "en virtud del tercer postulado de la misma obra", equivale a poner un nombre a una proposición o a una fórmula distinguida dentro de una escritura formal. Ya no se muestra con el dedo, sino que se nombra, menciona o cita; pero lo cierto es que, inclu-

THEORIA - Segunda Época,
Año I (1985), N° 1, pp. 213-230.

so en los cálculos más formalizados, se sigue mostrando en virtud de qué expresiones y fórmulas se verifica una derivación. Toda demostración se basa en la identidad o coincidencia entre una expresión escrita, por ejemplo un axioma, y su reescritura efectiva o cuando menos su evocación a lo largo de la cadena demostrativa. Comprobar una predicción, asimismo, implica constatar que los datos obtenidos y los previstos coinciden (o no). Lo propuesto en el enunciado de un teorema ha de ser idéntico, en tanto ensamblaje de signos [2], a lo obtenido al final de la derivación formalizada.

Este principio o requisito general de toda ciencia escrita es válido también en el caso de la geometría clásica, basada en figuras: las pruebas geométricas de Euclides, Apolonio o Arquímedes tienen lugar recurriendo continuamente a coincidencias entre figuras, y ello tanto en las construcciones auxiliares como en buena parte de los resultados finales de los teoremas. Como a las figuras geométricas se les ha considerado como objetos, más bien que como signos, la relación de identidad ha sido analizada más profundamente que en el caso de otros instrumentos científicos; de ahí que convenga detenerse en la identidad en el caso de las figuras antes de elaborar una teoría general sobre la identidad del signo, o al menos de los signos matemáticos.

* * * * *

II: Félix Klein y el Programa de Erlangen

En geometría se distinguen entre sí las relaciones de identidad, igualdad, semejanza y congruencia, lo cual no suele hacerse en otras disciplinas matemáticas [3]. Dos triángulos son iguales porque pueden ser superpuestos mediante un movimiento de traslación, o de traslación y giro, que hace coincidir los vértices del uno con los del otro, y los lados con los lados correspondientes. Otro tanto cabe decir de los triángulos semejantes, aunque en este caso el movimiento sea de tipo diferente: una homotecia, además de los anteriores. No basta una igualdad métrica para que dos figuras sean la misma: la congruencia es una relación que no se confunde con las precedentes.

Otros ámbitos científicos tampoco disponen de esta gradación de relaciones para analizar la identidad presupuesta a sus signos, con excepción de la Topología. Una fórmula lógica es la misma independientemente de cómo esté escrita, e incluso de la notación elegida.

En su célebre Programa de Erlangen, Klein afirmó explícitamente la inesencialidad de las figuras como objetos de la Geometría [4] ; de hecho, hoy en día los matemáticos procuran rehuir su utilización. Klein consideró grupos de transformaciones en el plano y en el espacio, definiendo diversos grupos principales, característicos de cada Geometría. Los movimientos de traslación, de giro, de simetría, de homotecia, de proyección, etc., engendran otros tantos tipos de grupos, tanto por separado como gradualmente combinados. Partiendo de estos diversos grupos de transformaciones admitidas en el plano y en el espacio geométrico, Klein demostró que

> *"las propiedades geométricas (de las figuras) no son alteradas por las transformaciones del grupo principal"* [5] ,

y recíprocamente:

> *"las propiedades geométricas están caracterizadas por su invarianza, relativamente a las transformaciones del grupo principal"* [6] .

Si, conforme al criterio clásico (aristotélico-leibniciano), acordásemos caracterizar la identidad de cada figura geométrica por sus propiedades, resultaría que dos figuras transformables entre sí por cualquier movimiento del grupo principal serían idénticas. En relación a un determinado grupo, el proyectivo, figuras visualmente diferentes, como la elipse, la parábola y la hipérbola, son una misma figura; mientras que con respecto a otro grupo principal, como el de la geometría afín, son figuras distintas. A partir del planteamiento kleiniano, la identidad de las figuras geométricas es relativa a cada grupo principal de transformaciones, y no hay formas geométricas sino en el marco de una determinada Geometría. El estudio de las figuras geométricas habría quedado reducido al estudio de los grupos de transformaciones y de sus invariantes, así como la geometría clásica a la teoría de grupos. Las figuras son inesenciales para la geometría porque no son sino un caso particular, o si se prefiere una manera de representar los invariantes de dichos grupos.

Se alcanzó así una fundamentación rigurosa del antiguo procedimiento de demostración basado en la ἔκθεσιν. En cualquier teoría geométrica, las propiedades y los teoremas que se demuestran recurriendo a una figura concreta, yuxtapuesta al texto de la demostración, valen para cualesquiera otras figuras idénticas (en el sentido de Klein) a la dibujada. Las propiedades de una figura concreta son universales porque en el fondo son las propiedades de un conjunto invariante para el grupo principal de dicha Geometría: la figura no es más que un signo o representante de dicho invariante. El trazado y la visualización de una figura son relativos a, y presuponen, una Geometría particular, caracterizada por su grupo principal.

La validez trans-espacial y trans-temporal de una demostración geométrica se justifica de la misma manera, y no en virtud del carácter sintético a priori de los juicios matemáticos. El teorema demostrado por Pitágoras sobre una determinada figura, y conforme a cierta construcción auxiliar, puede ser reproducido en múltiples lugares geográficos, distintas épocas históricas y utilizando otros sistemas sígnicos y procedimientos auxiliares, en base todo ello a esa presuposición del grupo principal que caracteriza a la geometría euclídea.

* * * * *

III: El método de análisis y la instanciación de figuras

La discusión reciente sobre el método de análisis, y en particular sobre su función en la geometría griega, ha renovado en cierta manera la reflexión sobre el papel de las figuras geométricas. Hankel y Polya reactualizaron el interés mostrado en el siglo XVII por el método de análisis de los geómetras griegos. Hintikka y Remes, en 1974, propusieron una reconstrucción lógica de dicho método como procedimiento de prueba, manteniendo la tesis de que:

> *"lógicamente hablando, la prueba obtenida por medio del método analítico equivale esencialmente a una prueba mediante los métodos de la lógica moderna que suelen ser llamados de deducción natural"* [7] .

En la conferencia de Jyväskylä en que ambos presentaron este trabajo, Lakatos se mostró contrario a sus planteamientos:

> *"Hintikka y Remes basan su reconstrucción en el supuesto de que el análisis de Pappus fue un patrón heurístico en la ya*

axiomatizada geometría euclídea y dan siempre por supuesto que las partes deductivas del análisis son válidas y los lemas aducidos susceptibles de prueba. Desde mi punto de vista, los análisis más estimulantes de la geometría griega fueron pre-euclídeos y su papel fue generar el sistema axiomático de Euclides" [8].

Szabo y Lakatos coincidieron además, contra Hintikka y Remes, en considerar el método de análisis como un método conjetural, más que axiomático-deductivo. En un apéndice a la obra de Hintikka y Remes, Szabo, siguiendo a Lakatos, afirma que

> *"el análisis en el sentido de Pappus es un ensayo, una tentativa"* [9].

La reducción al absurdo pasa a ser la manera de refutar ese procedimiento por conjeturas.

Fernando Broncano ha retomado recientemente la cuestión, adhiriéndose en lo fundamental a las posiciones de Hintikka y Remes, pero matizándolas y perfeccionándolas. Su objetivo es la reconstrucción del substrato lógico en el que se despliega el método de análisis, y su recíproco de la síntesis. Al distinguir las cuatro fases clásicas del proceso de prueba por análisis (instanciación, enunciado, construcción auxiliar y prueba propiamente dicha), subraya brevemente el interés teórico de la primera, en la cual, al objeto de demostrar un enunciado, se elige una figura concreta para proceder a la prueba sobre ella. Esta instanciación de un enunciado en una figura ('instantial way' la llaman Hintikka y Remes, y en este punto coinciden con Lakatos), sin embargo, queda poco estudiada a lo largo de todo el debate sobre el método de análisis, pese a que, como veremos, su interés es grande; de ahí que vayamos a centrarnos exclusivamente en este punto, que es presentado por Broncano en los siguientes términos:

> *"partimos de una proposición general (es decir, el teorema a probar) seguida de una* ἔκθεσις *o instanciación, en la que el contenido de la proposición se concreta en una figura determinada, aunque cualquiera"* [10].

Se interpreta la ἔκθεσις como la instanciación (que hay que suponer mostrativa, o si se quiere por ocurrencia) de un enunciado general: la figura ejemplar elegida para la prueba debe reunir las condiciones de lo dado en el enunciado, por una parte, y también las de lo pedido, pues precisamente en esto consiste el método de análisis. Lo interesante, sobre todo si se tiene en cuenta que el método de análisis va a ser comparado con el de deducción natural, es que la prueba precisa de este recurso a figuras que se corresponden con lo dado y lo pedido en el enunciado, y en concreto a una de ellas. Broncano interpreta así esta primera fase del método:

> *"Esto lleva a sospechar que la ἔκθεσις inicial juega un papel similar a la instanciación de principios generales cuantificados en individuos indeterminados que forman particulares configuraciones entre sí, lo cual a su vez podría entenderse como predicados relacionales. La ἔκθεσις, por otro lado, permite acercar el principio general buscado de manera que pueda ser analizado visualmente"* [11].

y un poco más adelante, refiriéndose de nuevo al recurso a las figuras para el adecuado planteamiento de los problemas científicos:

> *"Es curioso comprobar que este antiguo procedimiento de los geómetras sigue practicándose actualmente en el aprendizaje de la física elemental: los libros de texto enseñan al alumno que, lo primero que debe hacer al plantearse un problema, es dibujarlo con precisión, eliminando el mayor ruido informativo posible y teniendo en cuanta solamente las entidades esenciales y su continuación"* [12].

Esta última observación es muy importante, y debería de ser ampliada a otras ciencias, y en concreto a la lógica: para hacer una deducción lógica mediante los árboles semánticos hay que aprender, además de los axiomas y de las reglas de derivación, a dibujar bien. La lógica no está tan ajena al recurso de la configuración como para prestar tan poca atención al aspecto figurado de las derivaciones lógicas. La comparación entre el cálculo de deducción natural y el método de análisis geométrico, caso de mantenerse, ha de ser planteada en ambos sentidos; de ahí el interés que para la lógica formalizada puede tener una reflexión sobre las antiguas figuras geométricas, hoy en día reemplazadas por otras formas de figuración, pero no desterradas en su problemática más profunda.

* * * * *

IV: La instanciación en los sistemas formales

Veíamos al final del apartado II que la teoría de Klein permitía una fundamentación rigurosa de la validez del procedimiento demostrativo basado en la instanciación o ejemplificación de un enunciado general en una figura concreta: todo lo que se demuestre sobre ella vale para todas las figuras iguales a ella salvo isomorfismo, e incluso, en el caso de la mayoría de los teoremas, para las figuras que le son simplemente semejantes. Esto nos permite proponer dos posibles consecuencias:

1.- También en el caso de los cálculos lógicos, o al menos en los que proceden por deducción natural, deben de existir grupos de homeomorfismos que hacen "idénticas" las distintas presentaciones formales que se puedan hacer de una determinada derivación o teorema.

2.- La instanciación de un enunciado geométrico en forma de figura no supone ningún problema teórico importante, si se acepta el planteamiento de Klein.

No entraremos a estudiar el primer punto, pues su desarrollo habría de ser particularmente prolongado. En cuanto al segundo, vamos a ver que la cuestión no se soluciona tan fácilmente. En efecto, la reducción kleiniana de la geometría figurada al estudio de los grupos principales y sus invariantes no resuelve por completo el problema, sino que lo traslada y lo reproduce en otro sistema de signos. Para estudiar el grupo característico de la geometría proyectiva en toda su generalidad, y lo mismo para cualquier otra geometría, hemos de recurrir a una determinada expresión escrita de dicha teoría de grupos, la cual podría empezar, por ejemplo, de la manera siguiente:

> "Sea G un grupo, es decir un conjunto G no vacío dotado de una ley de composición interna que verifica los siguientes axiomas:
>
> 1.- $(\bigwedge x)\ (\bigwedge y)\ (\bigwedge z)$: $(x*y)*z = x*(y*z)$;
>
> 2. $(\exists e)\ (\bigwedge x)$: $e*x = x*e = x$;
>
> 3.- $(\bigwedge x)\ (\exists x')$: $x*x' = x'*x = e$."

Para demostrar cualquier teorema en teoría de grupos, y por consiguiente cualquier teorema relativo a los invariantes de los grupos principales, hay que proceder a una ἔκοεθις o instanciación de dicho grupo, independientemente de que con esa notación, como antes con la figura geométrica efectivamente dibujada, se aluda a un grupo cualquiera, que sólo ulteriormente será especificado por axiomas auxiliares. El supuesto que sigue prevaleciendo, al igual que en la Geometría clásica, consiste en que cuanto demostremos a partir de esa notación vale también para cualquier otra notación equivalente: apta para expresar todo lo dado y lo pedido en el teorema o teoremas que pretendamos demostrar. La teoría de grupos, y en general los razonamientos basados en sistemas formalizados, hacen uso de un nuevo tipo de instanciación, mediante la cual una determinada estructurada matemática (o lógica) se ejemplifica en la forma de notación concretamente elegida para proceder a demostrar.

Obsérvese que ello tiene lugar sin que la noción de "notaciones equivalentes" haya sido precisada, pues así como se ha investigado mucho sobre la derivación de teoremas a partir de unos u otros axiomas, muy poco se ha dicho sobre la posibilidad de escribir (en fórmulas bien formadas) con un sistema de notaciones tanto como es posible escribir con otro, y viceversa. Por poner un ejemplo, no es claro que la notación propuesta por Frege en su Conceptografía sea equivalente en este sentido a la notación de los Principia Mathematica, o a la de la escuela polaca. Resta por elaborar una teoría de los homeomorfismos sígnicos que fuese paralela a la propuesta por Klein para la Geometría.

Mas centrémonos en el punto segundo: propuesto un teorema en un determinado sistema formal, y convenientemente instanciado dicho teorema en una notación concreta, capaz de expresar lo dado y lo pedido en el teorema, nos encontramos con que tampoco las construcciones auxiliares faltan en este caso. En efecto, la notación elegida ha de ser capaz para que en ella se inscriban las fórmulas intermedias que van a permitir la derivación final de lo pedido en el enunciado. Y, al igual que en el método de ánalisis griego, surge también la pequeña dificultad de que existen varias "derivaciones auxiliares" posibles para cada demostración, como bien se muestra a la hora de derivar en un cálculo lógico cualquier tautología o contradicción a partir de determinados axiomas dados.

Los invariantes de cada grupo de transformaciones geométricas constituían la base del análisis kleiniano de la identidad de las figuras geométricas, y por consiguiente de su inesencialidad como objetos de la geometría. Pero el nuevo lenguaje reductor de la teoría de grupos está sustentado en un postulado análogo: elección de una notación concreta, y a poder ser de una buena notación, para poder efectuar demostraciones que luego serán válidas (salva traductione) para cualquier otra notación equivalente. El axioma implícito a toda formalización, incluída la específica a las figuras geométricas, consiste en que lo probado no depende de la representación sensible o notación elegida para probarlo. Las matemáticas y las ciencias formales dependen estrictamente de este postulado de invarianza de la demostración respecto de la escritura, y por supuesto de la ocurrencia espacio-temporal: las demostraciones de Gödel pueden ser presentadas según diferentes sistemas de notación. Así como nadie dudaba de que las figuras sobre las cuales Euclides demostró sus teoremas son transcribibles a lo largo del espacio y del tiempo, tampoco nadie pone en duda que somos capaces de transcribir en lenguaje actual los sistemas de signos utilizados por cualquier matemático, por ejemplo del siglo XVII, sin pérdida del contenido demostrativo. No sólo las figuras geométricas, sino también las notaciones y los signos matemáticos, son invariantes a través de sistemas de transformaciones sígnicas sin cuya presuposición no hay transmisión posible del pensamiento científico, por encima de las diferencias aparentes entre unos modos de escribir la ciencia y otros.

* * * * *

V: La identidad de una cónica, según Apolonio

Puesto que la reducción de la geometría clásica a teoría de grupos traslada la cuestión de la identidad de las figuras geométricas a la identidad de las notaciones utilizadas en teoría de grupos, no puede considerarse que la propuesta kleiniana nos sugiera una solución completa del problema aquí abordado. Además, las diferencias entre las relaciones de identidad, igualdad, semejanza y congruencia han desaparecido a lo largo de dicho proceso de reducción, siendo así que pueden ser pertinentes a la hora de profundizar en la comparación entre los sistemas sígnicos en general y el característico de la geometría griega.

Conviene pues remontarse a las tentativas clásicas de analizar la identidad de los signos geométricos, o si se prefiere de las distintas ocurrencias de una figura en un determinado sistema de signos geométricos, como los Elementos o cualquier otro tratado sistemático.

Elegiremos aquí las Cónicas de Apolonio, en parte por tratarse de una obra casi olvidada por los filósofos de la matemática, pese a su enorme importancia, pero sobre todo porque en su libro VI se estudia a fondo la cuestión de la igualdad y de las diferencias entre las cónicas.

Para Apolonio, en efecto, la igualdad o la semejanza entre dos elipses está lejos de ser inmediata. Precisamente porque las cónicas no eran, hasta él, auténticos objetos de la Geometría, las igualdades, desigualdades, semejanzas y desemejanzas entre las cónicas eran cuestiones problemáticas, a investigar conforme al método de análisis geométrico. En lugar de ser evidencias inmediatamente perceptibles (como pueden serlo hoy en día, expresiones del tipo $x = x$, o $f = f$, por cierto), había que demostrar la igualdad o la semejanza entre dos elipses, caso de ser cierta. La identidad de los signos geométricos, al menos en el caso de las cónicas, planteaba un problema que había de ser resuelto por medio de una teoría adecuada. Apolonio dejó de ver en la repetición del dibujo (o escritura) de una cónica la expresión de una identidad evidente, pasando a considerar esos enunciados y sus instanciaciones en forma de figuras como problemas a resolver.

Este no era el caso del círculo, o de otras figuras geométricas. Para Euclides el círculo es una figura geométrica, idéntica a sí misma y objeto de estudio teórico, porque existe una definición de ella:

> *"Círculo es una figura plana limitada por una sola línea que se llama periferia, respecto de la cual son iguales las rectas que inciden sobre ella trazadas desde uno de los puntos situados en el interior de la figura"* [13].

El centro y los diámetros, por consiguiente, son las figuras que permiten formular una definición del círculo en los Elementos, con lo cual su identidad puede ser remitida a la de la línea y el punto. La formulación de ésta u otra definición, en cualquier caso, era condición sine qua non para suponer identidad geométrica a un trazo o dibujo.

Las cónicas, en cambio, carecieron durante mucho tiempo de definición, y por consiguiente de identidad geométrica. Eran figuras mecánicas, puros recursos técnicos para las construcciones auxiliares, pero no objetos geométricos. Se sabía cómo construírlas, se conocían algunas de sus propiedades y también su utilidad para abordar problemas como el de la duplicación del cubo o el de la trisección del ángulo; pero todo ello no les proporcionaba identidad geométrica. Unicamente cuando Apolonio precisó un εἶδος (figura) para cada una de las cónicas, cuyos trazados mecánicos eran simples σχήματα y propuso dicho εἶδος como definición geométrica, sólo entonces cabe hablar de la elipse, de la hipérbola y de la parábola como figuras geométricas. En términos actuales, como veremos, cabe decir que Apolonio reduj̲o̲ las representaciones o trazos de las cónicas (σχήματα) a sus auténticas figuras (εἶδος), y que dicho proceso de reducción científica le permitió analizar sus respectivas diferencias. Como en el caso de Klein, nos encontramos con una tentativa de reducción científica, que merece la pena considerar y comparar con la teorización de las figuras geométricas emanada del Programa de Erlangen.

Para cada cónica Apolonio discierne un determinado rectángulo al que, siguiendo a Brunschvig [14], podemos denominar rectángulo característico. A partir de ello los criterios clásicos de igualdad entre rectángulos (es decir la superponibilidad) pasan a ser el fundamento de la identidad, igualdades y diferencias, semejanzas y desemejanzas entre los trazados de las cónicas.

La primera definición del libro VI de las Cónicas recuerda, en efecto, el criterio euclídeo de igualdad en geometría, especificándolo para las cónicas:

> *"Def. 1: Dos secciones cónicas se dicen iguales cuando se puede aplicar una a la otra de manera que coincidan en toda su extensión y no se corten. Las que no cumplen estas condiciones se dicen desiguales"* [15].

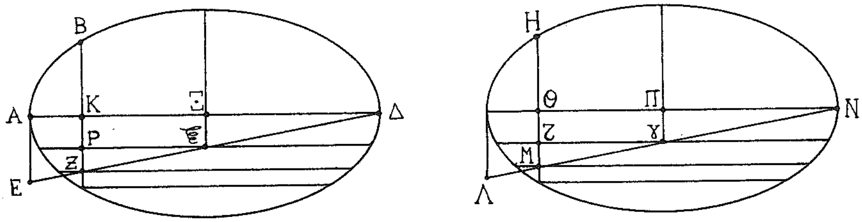
Para reducir la identidad de las cónicas a las de sus figuras (que difieren del trazado o esquema), Apolonio precisa previamente esta última noción, fundamental en su teoría:

> *"Def. 10: Llamaremos figura de la sección construida sobre el eje o sobre un diámetro al rectángulo delimitado por este eje o este diámetro y el lado recto (es decir el parámetro) correspondiente"* [16].

Partiendo de estas definiciones, Apolonio va a demostrar que dos parábolas e hipérbolas no pueden ser semejantes entre sí, con lo cual Apolonio culmina su estudio del género 'cónica', evidenciando que posee dientes figuras (prop. 2). Dejaremos de lado la primera proposición para centrarnos en la segunda, que tiene mayor interés teórico.

Apolonio procede de la manera siguiente:

Sean AB, ΓH dos elipses (o hipérbolas) cuyos ejes son las rectas AK, ΓΘ ; y sean ΔE , NΛ las figuras equivalentes y semejantes construídas sobre los ejes transversos. Digo que las secciones AB, ΓH son iguales" [17].



Si AΔ es el eje de la elipse, divide a dicha figura en dos partes iguales, por ser un diámetro. BKZ es un eje transverso y, conforme Apolonio ha demostrado anteriormente, los segmentos AK y KΔ del eje tienen a KB como media proporcional. Es decir que

$$\frac{AK}{BK} = \frac{BK}{B\Delta}$$

o lo que es lo mismo,

$$\frac{\overline{BK}^2}{AK.K\Delta}$$

es una magnitud constante para todo punto B de la elipse; si designamos a dicha magnitud por $\frac{p}{a}$, siendo a la mitad del eje de la elipse, tendremos definido un parámetro p que va a desempeñar la misma función caracterizadora que el parámetro de la parábola, estudiado en la proposición 1.

Estando dado todo lo anterior, Apolonio procede a una construcción auxiliar, en la que surgirá la figura de la elipse. Para ello se levanta en E la perpendicular AE al eje, siendo la longitud de AE = 2p. Se traza a continuación EΔ, que corta al eje transverso BK en Z. Pues bien, por el teorema de Tales:

$$\frac{KZ}{K\Delta} = \frac{AE}{A\Delta}$$ pero como AΔ = 2a y AE = 2p, será:

$$\frac{KZ}{K\Delta} = \frac{p}{a} = \frac{\overline{BK}^2}{AK.K\Delta}$$

con lo cual obtenemos finalmente la expresión:

$$KZ.AK = \overline{BK}^2$$

Esta media proporcional es válida para todo punto de la elipse (por ejemplo también para AΞ .Ξξ). El cuadrado que tiene por base la mitad de los ejes transversos siempre es igual al rectángulo cuyos lados son AK y KZ (o AΞ yΞξ). Este último rectángulo, construído sobre el eje de la cónica y los ejes transversos de la elipse (análogamente en el caso de la hipérbola) es el εἶδος de la elipse. Al final de la proposición 2 [18], Apolonio amplía el procedimiento también a la parábola.

Para estudiar la igualdad y las diferencias entre las tres especies de cónicas, así como entre las infinitas cónicas de cada especie, basta con considerar los distintos rectángulos característicos. Con ello se ha procedido a reducir la igualdad y la desigualdad entre cónicas (figuras curvilíneas y hasta Apolonio no geométricas, sino mecánicas) a igualdad y desigualdad entre figuras rectilíneas. Los esquemas o trazados (σχῆμαται) de las cónicas son superponibles o no en función de la superponibilidad o no de sus figuras (εἶδος), lográndose culminar así el análisis o reducción de la identidad de las cónicas a la de sus rectángulos característicos.

El procedimiento vale también para la relación de semejanza, tal y como queda probado en la proposición XII del libro VI:

> *"Si las figuras construídas sobre los ejes o diámetros de las hipérbolas o elipses son semejantes, también lo son las cónicas, y recíprocamente"* [19].

En resumen: la igualdad, desigualdad, semejanza y desemejanza de las cónicas, en cada una de sus tres especies, y en las infinitas variantes de cada especie, son estudiables en función de las <u>figuras</u>, o rectángulos característicos. Las proposiciones 14 y 15 muestran que las elipses, parábolas e hipérbolas no pueden ser semejantes entre sí, con lo cual Apolonio culmina su estudio del género 'cónica', evidenciando que posee tres especies diferentes, y cada una de ellas discernible por su rectángulo característico, el cual pasa a ser una auténtica <u>definición</u> de cada cónica, en el sentido aristotélico de la palabra. A partir de este momento las cónicas poseen identidad geométrica, aunque ésta no depende de la representación sensible de su trazado, sino de la existencia de un εἶδος que define a cada especie y, además, a cada individuo dentro de la especie. Por lo mismo, las cónicas pasan a ser objetos geométricos de pleno derecho, y no ya simples figuras mecánicas o auxiliares.

La teorización de Apolonio fue una condición sine qua non para que, a partir del Renacimiento, se comenzasen a encontrar por doquier (Kepler, Hooke, Newton, etc.) modelos físicos de estas figuras geométricas, que a su vez pasaron a ser criterio de identificación para otro tipo de entidades científicas (sistema solar, sistema planeta/satélite, etc).

Toda esta trayectoria ulterior de la teoría de cónicas, incluído sus tratamientos analítico y proyectivo, es más conocida, por lo que no merece la pena insistir en ella. Más interesante puede resultar resumir y extraer las consecuencias de esta primera tentativa de reducción y análisis de la identidad de las cónicas planas, en base a figuras geométricas rectangulares. Dicho muy brevemente: Apolonio reduce un sistema de signos geométricos que no tienen status plenamente geométrico y se utilizaba hasta él en las construcciones auxiliares, pero no como objeto de teorización geométrica (las cónicas), a otro sistema de signos previamente constituído, y en el cual la identidad (igualdad, semejanza, etc.) de cada signo no planteaba problemas teóricos. En todo caso, Apolonio muestra con este ejemplo paradigmático de análisis geométrico que la identidad de las figuras geométricas no depende del trazado de las mismas sino que, si es identidad geométrica, y no la de un simple dibujo, depende estrictamente de otra identidad previa: la de su rectángulo característico. No hay identidad de una figura geométrica que no dependa de una teoría, mediante la cual y en cuyo contexto la materialidad del trazado pasa a ser un signo geométrico, además de un instrumento para la demostración por ἔκθεσις.

* * * * *

VI: A modo de conclusión y propuesta.

Tanto Klein como Apolonio remiten la identidad de las figuras geométricas a otros sistemas de signos: el primero a un sistema heterogéneo (de las figuras a la teoría de grupos), el segundo a un subsistema de una misma teoría (las cónicas a los rectángulos característicos); pero incluso en este caso, en principio las cónicas no eran figuras geométricas, sino mecánicas, por lo cual cabe hablar también de una heterogeneidad entre ambos sistemas. Sólo a posteriori se puede decir que dicha reducción era homogénea.

Asimismo el trazado de las figuras es irrelevante teóricamente: éstas no son sino expresiones o representaciones de otro tipo de entidades.

En un trabajo anterior [20] he intentado mostrar que, en el caso de la reducción cartesiana de las figuras a ecuaciones, nos encontramos con una fundamentación de la identidad de las figuras geométricas muy semejante: en este caso depende de la identidad de los signos algebraicos, organizados en un sistema de notación cuya unidad básica es la ecuación.

La simple consideración de tres ejemplos históricos (Apolonio, Descartes y Klein) no basta, evidentemente, para extraer una conclusión general, máxime si se tiene en cuenta que entre las tres tentativas reductoras existen importantes diferencias, y no sólo paralelismos; pero también es cierto que abre una nueva vía de investigación para el estudio de la identidad de los signos geométricos, y en general de los signos matemáticos. Toda tentativa de fundamentación de la identidad de un signo matemático -cabría aventurar-, supuesto que dicho signo está inserto en un determinado sistema de signos, en el cual su identidad es un presupuesto a priori del funcionamiento del propio sistema, depende de su remisión a otro sistema de signos en el cual esa identidad pasa a ser reducible y analizable. Esa oposición entre ambos sistemas sígnicos puede ser interpretada conforme a la distinción sistema/metasistema; pero, aunque aquí no voy a tratar de argumentarlo, puede comprobarse que en toda distinción de este tipo interviene un tercer sistema de signos, sin el cual la distinción no tiene virtualidad, al menos para articular en torno a ella un discurso científico.

Con ello estamos en condiciones de hacer una propuesta general, que se ejemplificaría en el caso de las figuras geométricas de la manera siguiente: la identidad de un objeto matemático (por ejemplo de una elipse) en cada una de sus expresiones sígnicas (esquema, figura, ecuación, conjunto invariante para el grupo principal de transformaciones) depende de las identidades relativas de dicho objeto en cada una de sus expresiones sígnicas pero, sobre todo, depende de las interconexiones entre dichas expresiones sígnicas a lo largo de los sucesivos procesos de interrelación (en este caso de reducción) entre las teorías correspondientes y entre los sistemas sígnicos que las expresan. La identidad de una figura, lejos de ser inmediata o intuitiva, tiene que ver, en primer lugar, con la competencia en la lectura e intelección del signo concreto en el que se exprese, y, en segundo lugar, aparece como una relación de invarianza a través de las distintas transformaciones o traducciones de unos sistemas de signos en otros, habitualmente heterogéneos a los primeros.

Esta propuesta-conclusión, extraída de la geometría, debe someterse a contrastación y matización en el caso de otros ejemplos extraídos de las matemáticas, y en general de otros sistemas de signos científicos. La noción de ocurrencia de una variable en un cálculo lógico, o si se quiere la posibilidad de identificar un signo o una fórmula en dos lugares diferentes de una escritura científica, ha de dejar de ser inmediata, pasando a ser relativa al sistema concreto de signos en el que dicho signo es legible; y no sólo al sistema mismo, sino sobre todo a las transformaciones sígnicas (por retomar el lenguaje de Klein) que tienen como invariantes a dichos signos en un determinado tipo de escritura o de notación matemática. Las teorías matemáticas, y en general las científicas, no son independientes de los sistemas sígnicos en los cuales se expresan.

En resumen: cabe iniciar en filosofía de la ciencia una línea de investigación que, partiendo de los resultados obtenidos del análisis de la identidad de las figuras geométricas en los autores mencionados, amplíe ese tipo de análisis a las interrelaciones entre los diversos sistemas que se utilizan para expresar las teorías científicas a lo largo de la historia de la ciencia. Dicha Semiología de la Ciencia, o Análisis Semiológico de la Ciencia, debe partir de las sucesivas tentativas de formalización, y singularmente de aquellas en las que estaba involucrada una tentativa de reducción de un lenguaje científico a otro.

* * * * *

NOTAS:

1 A. Szabo, Anfänge der griechischen Mathematik, Budapest, Akadémiai Kiádo 1969, trad. de M. Federspiel, Les débuts des mathématiques Grecques, París: Vrin 1977, pp. 199-214.

2 Es preferible la expresión 'ensamblaje de signos', propuesta por Bourbaki en sus Elements de Mathématiques, a la de 'secuencia de signos', utilizada habitualmente entre los lógicos a partir de Tarski (Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprache, 1933) y Quine (Concatenation as a Basis for Arithmetic, 1946). En efecto, las figuras geométricas no son secuencias de signos, pero sí ensamblajes.

3 Por ejemplo Frege no distingue voluntariamente entre identidad e igualdad, tanto en sus Grudlagen der Arithmetik como en Sinn und Bedeutung.

4 Véase F. Klein, Le programme d'Erlangen, trad. de M.H. Padé, París-Bruselas-Montreal 1974, p. 4, notas 3 y 4.

5 Ibid., p. 7.

6 Ibid.

7 J. Hintikka and U. Remes: The Method of Analysis: Its Geometrical Origin and Its General Significance, Dordrecht, Holanda: Reidel 1974, Introducción, p. XIII.

8 I. Lakatos, The Method of Analysis, en Philosophical Papers, vol. II, Londres, Cambridge Univ. Press 1978, trad. de Diego Ribes en I. Lakatos, Matemáticas, ciencia y epistemología, Madrid: Alianza 1981, p. 141.

9 A. Szabo, Working Backwards and Proving by Synthesis, en Hintikka-Remes, The Method of Analysis, o.c. p. 128.

10 Fernando Broncano, El método de análisis y síntesis como lógica del descubrimiento, en Análisis y Síntesis: Estudios de Lógica y Filosofía de la Ciencia, vol. II (comp. Jorge Pérez Ballestar), Salamanca: Universidad de Salamanca 1984, p. 93.

11 Ibid.

12 Ibid., p. 104

13 Euclides, Los Elementos, libro I, I, Def. 15, p. 703 de la traducción de Francisco Vera en Científicos Griegos, Madrid: Aguilar 1970, vol. I, p. 703.

14 L. Brunschvicg, Les étapes de la Philosophie Mathématique, cap. VII, París: Blanchard 1972, 2ª ed.

15 Apolonio, Las Cónicas, libro VI, Def. 1, p. 424 de la traducción de J. Vera en Científicos griegos, o.c., vol. II, y p. 479 de la edición en francés de Paul ver Ecke, Les coniques d'Apollonius de Perge, Brujas: Desclée de Brouwer 1924.

16 Ibid., p. 425 de la edición de Vera y p. 480 de la edición ver Ecke

17 Ibid., p. 482 de la edición ver Ecke.

[18] <u>Ibid.</u>, p. 484.

[19] <u>Ibid.</u>, p. 484 de la edición ver Ecke y 427 de la edición Vera.

[20] J. Echeverría: <u>La reducción cartesiana de las figuras geométricas a ecuaciones</u>, ponencia presentada en el I Simposio Hispano-Mexicano de Filosofía, Salamanca, octubre 1984 (aparecerá en las Actas).

Departamento de
Lógica y Teoría de la Ciencia
Facultad de Filosofía y CC.EE

Universidad del País Vasco (San Sebastián)