SOBRE LAS POSIBILIDADES DE UNA EQUIVALENCIA PARA EL FUNDAMENTO DE LA ARITMETICA

Carlos ALVAREZ

ABSTRACT

Our aim in this paper is to analyse the possibilities of a logical or epistemological equivalence between the projects of R. Dedekind and G. Frege for the foundations of arithmetic. It is well know that both of them have a "logicist" point of vew. But we think that even if some coincidences exist in the way they define the main concepts of arithmetic, some important differences remain.

En el año 1893, al momento de la publicación de la segunda edición de su libro *Was sind und was sollen die Zahlen*, R. Dedekind escribía en el prefacio:

> *Aproximadamente un año después de la publicación de mi memoria, tuve conocimiento de la obra de Frege: Die Grundlagen der Arithmetik que apareció en el año* 1884. *A pesar de lo lejana que su concepción acerca de la esencia de los números ésta de la mía, mantiene puntos de coincidencia con mi trabajo; particularmente a partir del* § 79 *de su obra hay una gran similitud con mi trabajo en especial con la definición* 44.
> *Dicha coincidencia no es fácil de descubrir, debido a las distintas formas de expresión que adoptamos; pero la manera en la cual el autor habla de la inferencia lógica de n a n*+1, *muestra plenamente que él se apoya sobre el mismo fundamento que yo*[1].

Efectivamente, los dos manifiestos acerca del fundamento de la aritmética presentan numerosos aspectos en común, uno de los cuales es el señalado por Dedekind acerca de la inferencia de n a $n+1$. Sin embargo no resulta obvio el afirmar que de la presencia del principio de inferencia en los dos trabajos se pueda concluir que ambos descansan

THEORIA - Segunda Época - Año II
Curso 1986-87, nº 5-6, pp. 345-364

sobre el mismo fundamento. En el intento compartido de fundamentar la existencia de los números de manera puramente lógica, podemos ver algunas equivalencias, pero también posiciones distintas en torno a la definición de número natural o el principio de inducción. En este caso, el lugar de la equivalencia puede ser entonces ocupado por una controversia.

Por ello vale la pena conocer también las opiniones de Frege acerca de la supuesta comunión de ideas y de objetivos que comparte su proyecto de fundamento de la aritmética con el de Dedekind. Frege afirmaba a este respecto que:

> *No es posible encontrar en ninguna parte de su obra la enumeración de las leyes lógicas sobre las cuales se funda.* [...] *él* (Dedekind) *sostiene que la teoría de números es una rama de la lógica, pero su libro aporta muy pocos elementos para probarlo*[2].

Tal parece que para Frege una posible equivalencia matemática no puede minimizar la enorme diferencia filosófica que lo separa de Dedekind. Sin embargo, nos proponemos en este trabajo mostrar en qué medida es posible hablar de una similitud de ideas o de procedimientos y, dejando de lado las diferencias de fondo que existen en los dos proyectos, nos limitaremos a analizar las posibilidades de una equivalencia. Como se sabe, el punto de contacto, que en buena medida se puede considerar como el punto de alejamiento, es la equivalencia entre las definiciones de los conceptos de *sucesión* y de *cadena*, las definiciones § 79 y 44 a las que Dedekind alude en el prefacio citado.

Por el Camino Trazado en la Cadena de Dedekind

Dedekind elabora su concepto *cadena* a partir del § 37 de su memoria para poder definir a los números naturales como la *cadena* de un elemento base, llamado así "primer elemento". Dicha caracterización le permite expresar el orden de los números naturales como un *buen orden* y al mismo tiempo demostrar sobre este conjunto el principio de inducción.

Dado un conjunto x y una función definida sobre él y que toma valores en el mismo conjunto, una *cadena*, respecto a la función, es un subconjunto Y de X que satisface la propiedad de contener a su propia imagen bajo la función. Es decir, si $f: X \to X$ es una función y Y es un subconjunto de X que satisface la condición de que $f(Y)$ es un subconjunto de Y, entonces este es una *cadena* (respecto de f).

Para un subconjunto arbitrario A del conjunto X, se define a la *cadena de* A (denotada como A') como la intersección de todas las *cadenas* de X que contienen al subconjunto A. A es una *cadena* según la definición original y es, de hecho, la mínima *cadena* que contiene a A. A partir de estas definiciones Dedekind demuestra dos propiedades fundamentales de las *cadenas*:

1) Que la imagen de la *cadena* coincide con la *cadena* de la imagen; es decir, que $f(A') = \{f(A)\}'$.

2) Que la *cadena* de un subconjunto es la *suma* (unión) del subconjunto con la imagen de la cadena; es decir:

$$A' = A \cup f(A').$$

Con estas dos propiedades se obtiene el siguiente resultado: "Si una propiedad es válida para todos los elementos de un subconjunto A, y si cada vez que se cumple para un elemento que pertenece a la *cadena* de ese subconjunto la misma propiedad se cumple para su imagen bajo la función, entonces la propiedad es válida para todos los elementos de la *cadena* del subconjunto". Este resultado es la forma más general del principio de inducción pues no hace otra cosa que afirmar que todos los elementos de la *cadena* A' cumplen una cierta propiedad P siempre que se cumplan las siguientes condiciones:

1) Todos los elementos de A cumplen la propiedad P.

2) Si un elemento x de A' cumple la propiedad P, entonces su imagen $f(x)$ cumple también la propiedad P.

Si el subconjunto A está formado por un único elemento y la función que define a la *cadena* es inyectiva (1 a 1), la *cadena* A' es un conjunto *simplemente infinito* siempre que este elemento no forme parte de la imagen de su *cadena*. Es decir, si $A = \{a\}$ y a no es un elemento de $f(\{a\}')$, (en donde la función f es 1 a 1) el conjunto $X=A'$ ($X=\{a\}'$) es *simplemente infinito*. A partir de esta definición Dedekind afirma que cualesquiera dos conjuntos simplemente infinitos son equivalentes, el conjunto de *números naturales* aparece así como el modelo canónico: un número natural es entonces un elemento de un conjunto simplemente infinito[3]. La caracterización de los objetos como números ordinales se deriva de las propiedades inducidas por el *conjunto cadena* : si el elemento a partir del cual se forma la cadena se considera primer elemento, su imagen bajo la función inyectiva, al igual que la imagen de esta, son *sucesores* del primer elemento. Cada elemento tiene siempre un único sucesor inmediato: su imagen bajo la función (la unicidad del sucesor es una propiedad garantizada por la inyectividad de la función). Se puede ver además que todos los elementos de la cadena, salvo el primero, son sucesores inmediatos de algún elemento.

De las dos propiedades generales de las *cadenas*:

1) $A' = A \cup f(A')$.

2) $f(A) = \{f(A)\}$.

se deriva al conjunto *simplemente infinito* X a partir de la igualdad $X = \{a\}' = \{a\} \cup \{f(a)\}' = \{a\} \cup \{\{f(a)\} \cup \{f(f(a))\}'\} = \ldots\ldots$ dando al final el siguiente conjunto: $\{a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a))), f(f(f(f(a)))), \ldots\ldots\}$. El principio de inducción deviene el principio conocido para los números naturales: si una propiedad vale para el primer elemento, y si cada vez que vale para un elemento del conjunto vale para su sucesor, entonces la propiedad vale para todo el conjunto. La propiedad fundamental que caracteriza a este conjunto *simplemente infinito*, y que resulta indisoluble de este principio de inducción, es que el orden dado por la función inyectiva, llamada función sucesor, es un *buen orden*: a cada subconjunto no vacío de la *cadena* le corresponde siempre un primer elemento.

En una conocida carta escrita a H. Keferstein en 1890, Dedekind asegura que los elementos que presenta en su memoria acerca de la naturaleza de los números son el resultado de un "*profundo análisis de la serie de los números naturales tal y como esta se presenta en nuestra experiencia*". Dedekind comienza preguntándose por las relaciones, que de manera independiente las unas de las otras, pueden caracterizar de manera completa a la serie de los números naturales. Los principios a los que se tiene que apegar un análisis de este estilo son los siguientes:

1. El conjunto N (*sistema* en términos del propio Dedekind) está formado de individuos llamados *números*.
2. Los elementos del sistema N se encuentran en una relación determinada los unos con los otros. Dicha relación establece lo

que de manera común llamamos un *orden* en el sistema de los números y que se expresa diciendo que a cada número n le corresponde un único número n' y que es el *sucesor inmediato* de n. Esto lleva a la definición de una función f definida sobre todo el conjunto N y que a cada elemento n le asigne justamente su sucesor, f (n) = n'.

3. A distintos números corresponden distintos sucesores, lo cual obliga a definir a la función f como una función inyectiva (*similar* le llama Dedekind). Además de que es importante establecer que el primer elemento será el único que no es sucesor de ningún otro elemento.

4. La propiedad más dificil de ser establecida es aquella que permita asegurar que con esta caracterización se ha dado una definición precisa de los números naturales de modo que ningún otro conjunto distinto de N puede ser descrito por los elementos que se han presentado hasta ahora. Tal propiedad la presenta Dedekind a partir del siguiente problema: Se puede tomar un conjunto S del cual N sea un subconjunto propio (de modo que exista otro subconjunto T de S ajeno a N). Si la función sucesor f está definida sobre todo el conjunto S de modo que, restringida a N, sea la función que a cada n le asigne n' y tal que cumpla la condición f $(T)=T$, entonces el conjunto S cumple con las condiciones hasta ahora presentadas y ello conduce así a un conjunto que contiene otros elementos además de los números naturales; a saber, los elementos t del conjunto T ajeno a N. La propiedad adicional que puede eliminar a los elementos t de T es la siguiente: un elemento n es miembro de N si (y solo si) este puede ser "alcanzado" a partir del primer elemento mediante aplicaciones sucesivas de la función f de sucesión. (i.e. si n=f (...f (1)..)). Esto lleva a Dedekind a proponer la siguiente definición: un elemento n de S es un elemento de N si n es elemento de cualquier subconjunto K de S que cumple las siguientes condiciones, i) el primer elemento 1 es miembro de K. ii) f (K) es a su vez un subconjunto de K[4]. Es esta condición la que lleva a Dedekind a la definición de la *cadena* y también a pedir que el conjunto N sea la intersección de todas las cadenas que contienen al primer elemento 1. (N={ 1 }'). En este punto de su explicación a H. Keferstein, Dedekind hace de nuevo alusión a Frege y a sus

dos obras: *Begriffsschrift* y *Die Grundlagen der Arithmetik* en donde es posible encontrar que "*su modo de definir a los sucesores no inmediatos de un elemento coincide en esencia con la definición de la cadena; pero es necesario no confundirse con su notación que resulta poco adecuada*".

5. Finalmente Dedekind intenta responder acerca de la existencia de un método general de prueba contenido de manera explícita en la clasificación hecha de los números naturales. Es decir, la existencia de un método para poder probar que una cierta propiedad es compartida por todos los elementos del conjunto *N* que han sido obtenidos a través de la *cadena*. Dedekind asegura a Keferstein que el método de inducción puede ser formulado de manera segura a partir de la definición de la *cadena*.

Tras las sucesiones de Frege

Algunos años antes de la publicación de la memoria de Dedekind, G. Frege daba a conocer en 1879 su *Begriffsschrift* (Conceptografía). El próposito de la obra es la elaboración de un lenguaje conceptual para el pensamiento puro, de ahí que su tarea principal sea lograr la expresión correcta de la inferencia lógica:

> "*Mi primer paso fue el intento de reducir el concepto de orden en una sucesión al de inferencia lógica, de modo que de ahí se pueda llegar al concepto de número*".

La tercera parte de esta memoria está dedicada al estudio general de las *sucesiones*. Esta sección, como el resto de la memoria, trata únicamente con las leyes del pensamiento puro. En este caso, se trata en general de la sucesión de ideas o de juicios y de aquellos conceptos cuyas propiedades son heredadas o transmitidas por dichas sucesiones de juicios. Frege da el siguiente ejemplo: si se toma como un juicio el establecimiento de que M es hijo de N, y como concepto la propiedad de ser humano, entonces la propiedad de ser humano es "heredada" a través del juicio que establece la relación entre M y N (el hijo de un ser humano es a su vez un ser humano).

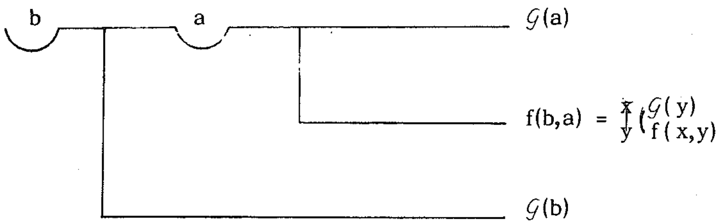
En la primera parte de la *Begriffsschrift*, Frege estableció que una función no es sino un *contenido* al cual siempre es posible introducir variables que sustituyan a algún signo que ocurra varias veces en el.

Bajo esta óptica, intenta englobar como caso particular el concepto de función matemática y de variable matemática. Para el estudio de las sucesiones se consideran tanto los valores de la variable como el resultado de la aparición de dicha variable en el *contenido* considerado. Una función matemática se distingue por tener un único valor resultante, y la f-sucesión es la aplicación reiterada de f al resultado obtenido a través de ella.

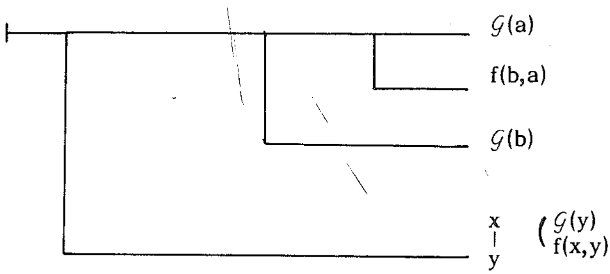
Con estas consideraciones el principio hereditario bajo una función dice que:

La propiedad $\mathcal{G}$ es hereditaria en la f-sucesión si dado un objeto con la propiedad $\mathcal{G}$, el resultado obtenido al usar dicho objeto como variable en la función f tiene tambien la propiedad $\mathcal{G}$[5].

En la notación de la Conceptografía de Frege, la propiedad hereditaria se expresa de la siguiente manera:



De la disposición del enunciado se concluye fácilmente que si una propiedad $\mathcal{G}$ es hereditaria en la f-sucesión, y si un elemento b tiene la propiedad $\mathcal{G}$ y a es el resultado de aplicar f a b, entonces a tiene la propiedad $\mathcal{G}$.

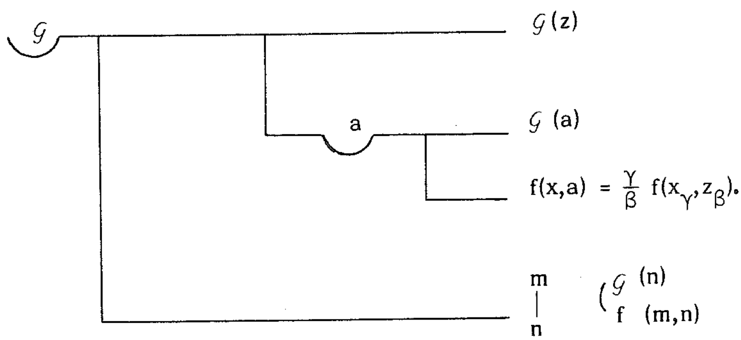


En 1884, en su libro sobre los fundamentos de la aritmética, dicho principio se formula de manera ligeramente distinta y es de esta nueva formulación que la equivalencia con la *cadena* de Dedekind parece posible: no se habla ya de un objeto con la propiedad $\mathcal{G}$, sino de un objeto que cae bajo un concepto $\mathcal{G}$. La equivalencia se obtiene a condición de especificar la unicidad del resultado de la aplicación de la función; así como la definición precisa de su dominio, el cual debe contener a $\mathcal{G}$.

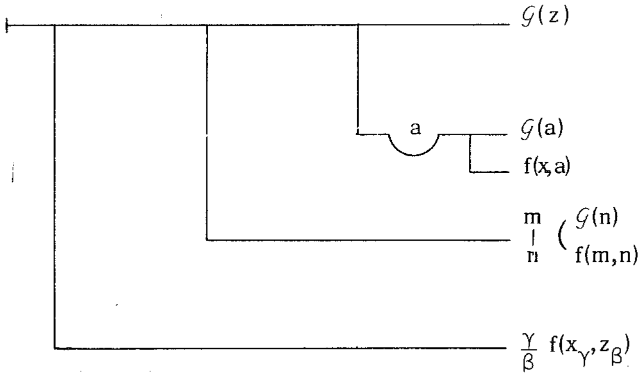
Junto con el establecimiento de las propiedades hereditarias, otros dos conceptos son formulados en la *Begriffsschrift* como leyes del pensamiento y que le permitirán en 1884 completar su definición de número: el principio de sucesión y el principio de inducción.

El principio de sucesión dice que dado un objeto x, se afirma que z *sucede* a x en la f-sucesión de cualquier objeto que sea resultado de aplicar a x la función f cae bajo $\mathcal{G}$, y si de la propiedad de que un objeto cae bajo $\mathcal{G}$ se sigue que el resultado de aplicarle f también cae bajo $\mathcal{G}$, entonces, para cualquier $\mathcal{G}$, z cae bajo $\mathcal{G}$.

Para que un objeto suceda a x en la f-sucesión, debe pues caer bajo todos los conceptos (poseer todas las propiedades) que son hereditarias en la misma f-sucesión y a los cuales pertenece todo resultado de aplicar f a x. De manera obvia, si un objeto cae bajo todos los conceptos hereditarios en la f-sucesión, siempre que se presenten las condiciones iniciales, este objeto sucede a x en la f-sucesión.

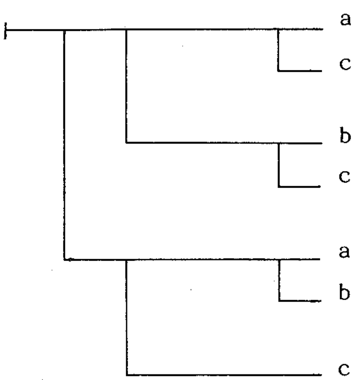


Una vez que la propiedad de que un elemento sucede a x en la f-sucesión se asume, el que este elemento posea todas las propiedades que resultan ser hereditarias en la misma f-sucesión se concluye de manera inmediata. Es por ello posible afirmar que al momento de suponer como condición inicial el que un elemento z sucede a x en la f-sucesión, se concluye que este elemento z tendrá una propiedad $\mathcal{G}$ arbitraria, siempre que esta propiedad sea hereditaria en la f-sucesión y que la imagen de x bajo f la posea. En palabras de Frege "si z sigue a x en la f-sucesión, y si la propiedad $\mathcal{G}$ es hereditaria en la misma f-sucesión, y si todo resultado de la aplicación del procedimiento f a x tiene la propiedad $\mathcal{G}$, entonces z tiene la propiedad $\mathcal{G}$"[6].

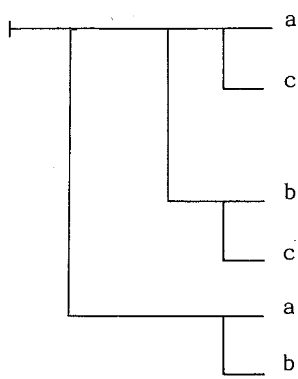


I

Una vez establecida esta propiedad en la f-sucesión, Frege retoma dos "leyes del pensamiento" expresadas en la primera parte de la *Begriffsschrift* y que mas tarde fueran establecidas como axiomas del cálculo de proposiciones:

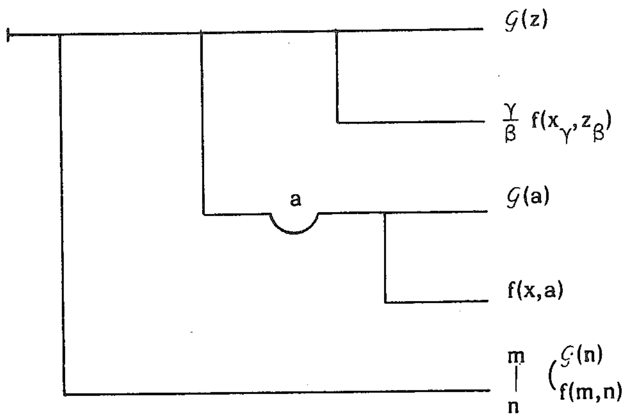


II.



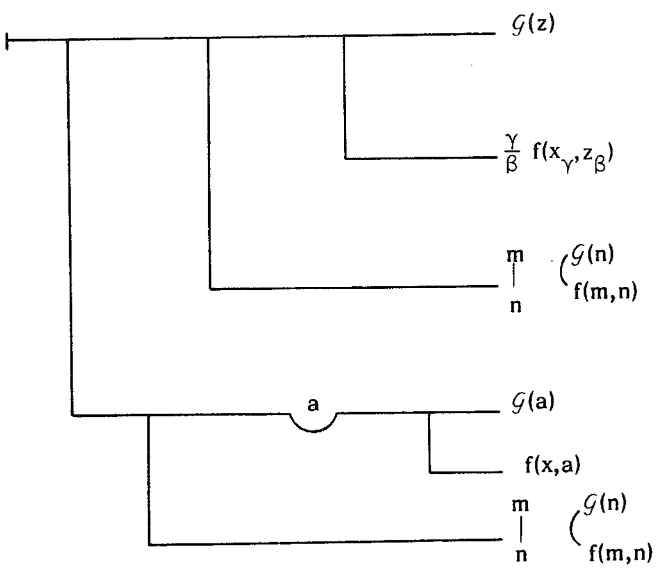
III.

A partir de un cambio en el orden de las hipótesis, validado también desde la primera parte de su libro, Frege reordena la propiedad hereditaria en la f-sucesión de la siguiente forma:

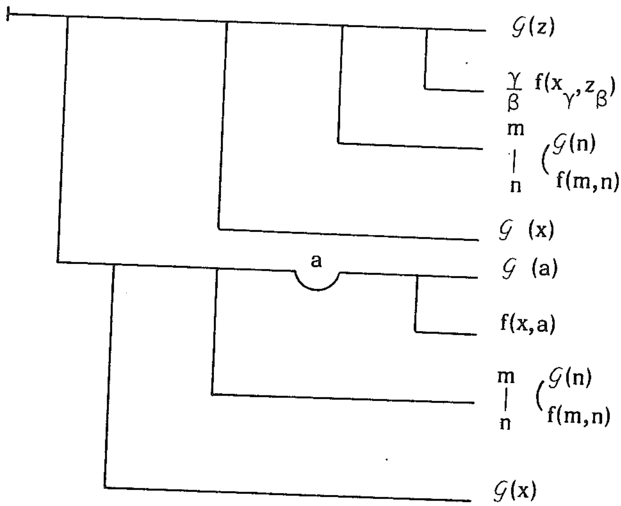


IV.

y utilizando la propiedad II del cálculo de proposiciones se obtiene la siguiente ley lógica a partir de la ley IV.



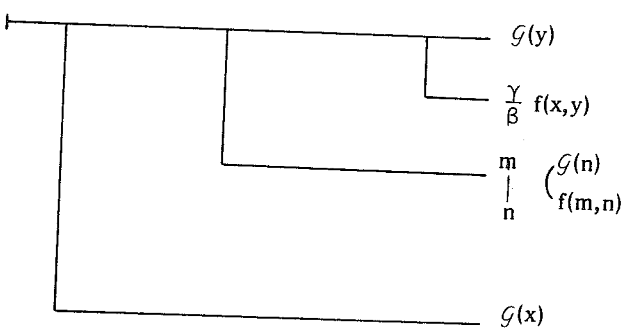
Utilizando ahora para esta última ley la propiedad III. se obtiene el siguiente principio:



VI.

de donde el principio de inducción se deriva.

El principio de inducción resulta una consecuencia de la definición de la *propiedad hereditaria* en la f-sucesión: si un objeto x tiene la propiedad $\mathcal{G}$ -la cual es hereditaria en la f-sucesión y el elemento z sucede a x en la f-sucesión, entonces z tiene también la propiedad $\mathcal{G}$. En la notación de la *Begriffsschrift* este principio se expresa del siguiente modo:



Como se sabe, el mayor orgullo de Frege al término de su *Begriffsschrift* fue el de haber sido capaz de derivar el principio de inducción como principio puramente lógico, es decir, analítico, y no como una propiedad o consecuencia derivable de los números naturales[7].

En *Die Grundlagen der Arithmetik* la f-sucesión en cuestión es la sucesión de números naturales. *Un número natural sucede a otro en la sucesión de números naturales* es la expresión aritmética del principio lógico "z sucede a x en la f-sucesión".

La Definición de Número Natural

Por la forma en que cada uno de estos intentos por fundamentar la existencia de la serie de los números naturales se da, la observación reiterada de Dedekind acerca de lo poco conveniente de la notación de Frege en la *Begriffsschrift* parece justificada ya que resulta difícil encontrar una posible similitud a consecuencia de la enorme diferencia que existe en sus modos de presentación. Quedan sin embargo, ciertos elementos que no requieren de un análisis demasiado elaborado para poder encontrar los primeros signos de una similitud entre ellos. Tomemos por ejemplo las definiciones de *cadena* y de *propiedad hereditaria*. Si se interpreta a la teoría de Frege de modo que un "concepto" denote un conjunto y que por ende la propiedad de que "un objeto cae en un concepto" se refiere al hecho de que ese objeto es miembro del conjunto[8], la afirmación de que "la propiedad G es hereditaria en la f-sucesión" no hace sino afirmar que si un elemento x ya tiene esa propiedad (x es elemento del conjunto G) y el elemento z es la imagen de x bajo f (f(x,z) en la notación de Frege; z=f(x) en nuestra actual notación) entonces z tiene la propiedad G (z es elemento de G) que no es otra cosa sino la afirmación de que G es una *cadena* bajo f.

Pero una aproximación más interesante es la que se puede obtener a partir de algunas de las precisiones que el propio Dedekind haría a H. Keferstein en la carta de la que hemos hablado. En este caso, quisiéramos referirnos a las observaciones hechas en la búsqueda de la precisión completa del conjunto N de números naturales. Dedekind asegura que un elemento n pertenece al conjunto N si a partir del elemento 1 es posible alcanzar al elemento n mediante sucesivas aplicaciones de la función sucesión. Si recordamos que "pertenecer a la sucesión de los números naturales" es la redefinición que da Frege en su obra *Die Grundlagen der Arithmetik* de la expresión "pertenecer a la f-sucesión" que fue dada en la *Begriffsschrift*, la condición de Dedekind expresada en la terminología de Frege dice que el número n "sucede" al primer elemento 1 en la f-sucesión definida cuando f es la función sucesor canónica. En el § 80 de *Die Grundlagen der Arithmetik* Frege señala que su definición de "seguir a x en la f-sucesión" pretende expresar de manera inconfundible el hecho de que, a partir de x y "de manera continua seguimos a los objetos con los que llegamos a través de la función f y de este modo llegamos a y". Si recordamos la posibilidad de aproximar la definición de la *cadena* con la de *propiedad hereditaria en la f-sucesión*, la condición de Dedekind expresa que el elemento n debe poseer todas las propiedades que resultan ser hereditarias en la f-sucesión de modo que todas estas propiedades sean compartidas por cualquier elemento que se pueda obtener a través de la función f (la f-sucesión) a partir del primer elemento 1.

Podríamos asegurar entonces que si un elemento pertenece a la *cadena* (respecto a la función sucesor f) definida a partir del elemento 1, es una condición equivalente a que sea sucesor de 1 en la f-sucesión.

Pero si bien hay una cierta "coincidencia" en el modo de generar la serie infinita de los números naturales, las posibilidades de extender dicha coincidencia a la teoría de números cardinales se dificulta. Como se sabe, Frege critica a Dedekind (y a Cantor) por haber hecho de la teoría de números una teoría ordinal de la cual, una vez completada, se desprendía una teoría cardinal. En la última parte de la memoria de Dedekind *Was sind und was sollen die Zahlen*, este aborda la teoría cardinal de la siguiente forma: a partir de cualquier número natural n siempre es posible definir un subconjunto de N al tomar aquellos números que son menores o iguales a n. Este conjunto, llamado Zn, es un subconjunto finito y bien ordenado de N. La propiedad fundamental de los conjuntos *simplemente infinitos* que fue dada por Dedekind al establecer que estos son los "conjuntos infinitos más pequeños" (es decir, que todo conjunto infinito contiene a un subconjunto *simplemente infinito*), le permite probar que todo conjunto infinito X contiene a un conjunto isomorfo a un Zn. Esta propiedad se cumple para cada número natural. Como consecuencia de esta proposición, se establece que un conjunto finito es isomorfo a un Zn; propiedad que de hecho deviene una definición de conjunto finito que contrasta con la que se deduce de la definición dada para los conjuntos infinitos: "un conjunto es finito si no es posible establecer una correspondencia 1-1 entre él y ningún subconjunto propio". A partir de esta nueva caracterización de un conjunto finito se dice que si X es isomorfo a Z_n, entonces no lo puede ser a ningún Z_m con $m \neq n$. El número natural n nos dice el "número de elementos" que tiene el conjunto X y se llama entonces el *cardinal* de X. La teoría cardinal se completa a partir de las siguientes proposiciones:

1. Z_n tiene n elementos.
2. Si X es un conjunto con un único elemento, $X=\{a\}$, entonces su cardinal es 1.
3. Si un conjunto $X=A \cup \{j\}$ con j un elemento que no pertenece a A, si n es el cardinal de A, entonces $f(n)$ es el cardinal de X. La propiedad simétrica también se prueba: si X tiene $f(n)$ elementos y j es un elemento de X, entonces el conjunto $X-\{j\}$ tiene n elementos.

Siempre que se tenga un conjunto finito X isomorfo por tanto a Z_n con algún número natural n, este nos dice "cuantos elementos están contenidos en X".

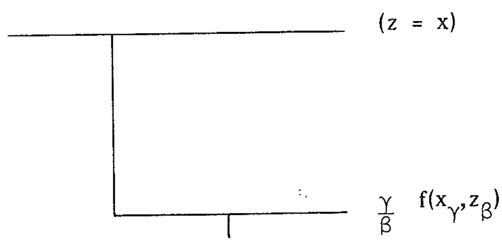
Pero tal vez la propiedad más interesante demostrada por Dedekind para los conjuntos finitos es la proposición 171, el último resultado de la memoria: Si f es una función definida sobre el conjunto finito X, de modo que f no es 1-1 (inyectiva), entonces el conjunto $f(X)$ tiene un número finito de elementos, y como conjunto finito su número cardinal es menor que el número cardinal de X. Esta propiedad permite establecer una equivalencia con la "segunda definición de conjunto finito" dada por Dedekind en el prólogo a la segunda edición de su memoria, ya que establece que para un conjunto finito, un subconjunto propio no podrá permanecer invariante bajo una transformación del conjunto en si mismo. Queda también clara la precisión hecha por Dedekind en el mismo prólogo al afirmar que la equivalencia entre esta definición y la primera sólo es posible mediante una serie de propiedades heredadas de los números naturales. En este caso la primera y más inmediata de las propiedades utilizadas en esos números es la existencia del número n de elementos del conjunto finito.

Frege sostiene por otro lado que los números, al poseer una existencia objetiva, no surgen de ninguna "ordenación" que de ellos se pueda dar. Existen en la medida en que a ellos se asocia un concepto y como consecuencia de ello el número resultará un número cardinal. En su formulación más conocida, Frege asegura que dar un número equivale a enunciar algo acerca de un concepto. Con esta afirmación el número posee el mismo caracter de objetividad con que cuenta el concepto. Dado un concepto F del cúal se afirma que n es el cardinal que le corresponde, n es la extensión del concepto "equinúmerico al concepto F". Es sólo posteriormente que se puede afirmar que una consecuencia de su existencia es la de su ordenación en una sucesión; es decir, como un conjunto ordenado. Esta última propiedad está también lógicamente fundamentada a través del concepto de *sucesión* y de *f-sucesión*. En la definición lógica de los números de Frege, es necesario que la teoría ordinal no se limite únicamente a dar una función de sucesor que permita la definición, para cada número natural, de su sucesor inmediato. Antes de eso es necesario establecer que si el sucesor de un número natural ha de ser también un número natural, se requiere de la existencia de un concepto del cúal ese sucesor sea el número asociado. En primer lugar se dice que el número 0 pertenece al concepto F, "si no hay objeto que caiga bajo F" El número 1 pertenece al concepto F, "si la propiedad de que un elemento no caiga en F no es universalmente válida, y del hecho de que dos elementos, m, n caigan en F se sigue universalmente que m=n". De esto se puede ya dar la definición del sucesor de un número: "decimos que el sucesor de un número n pertenece al concepto F si existe un elemento x de F y además se sabe que n es el número que pertenece al concepto <<que cae en F pero que no es x>>".

En el § 78, Frege señala una serie de proposiciones válidas para los números:

1. Si 1 pertenece al concepto F, existe un elemento que cae bajo F.
2. Si n es el sucesor inmediato de 0, n=1.
3. La relación que se establece entre dos números naturales m, n, al afirmar que n es el sucesor inmediato de m es una relación 1-1. (un número tiene un único sucesor).
4. 0 es el único número natural que no es sucesor de ningún otro número.

De estas propiedades no se concluye, sin embargo, que si n es un número natural hay un número natural que es el sucesor inmediato de n. La definición que se dió es aquella a la que este sucesor se debe ajustar una vez que su existencia se conoce. La "prueba" de que todo número natural tiene un sucesor descansa sobre el concepto de sucesión. Ella (la sucesión) viene a demostrarse a partir de la siguiente definición: si n es el número que pertenece al concepto "sucesión de números naturales que termina con m, entonces n es el sucesor inmediato de m". Sin hacer referencia explícita a la *Begriffsschrift* como se hizo al momento de utilizar el concepto de f- sucesión, Frege utiliza aquí otro concepto del texto de 1879 y que es justamente el de que un elemento "pertenezca" a una f- sucesión que finaliza con otro elemento. En la *Begriffsschrift* la ley es la siguiente:



"z pertenece a la f- sucesión que comienza con x". La condición requerida para cumplir con esta situación salta a la vista: o bien z sucede a x en la f-sucesión, o bien z es igual a x. Ello quiere decir que la condición de que z=x basta para afirmar que z pertenece a la f- sucesión que comienza con x. Este enunciado es, para Frege, equivalente al siguiente: "x pertenece a la f- sucesión que termina con z". Lo que esta definición añade a la definición simple de f-sucesión es que en este caso el elemento "inicial" (o el "final") de la sucesión también es considerado. En otras palabras, si bien no es el caso en general que "x sucede a x en la f-sucesión"', siempre es el caso que "x pertenece a la f- sucesión que comienza (o termina) con x".

La última afirmación de *Die Grundlagen der Arithmetik* dice que el concepto que se va a considerar para definir al cardinal sucesor de un número dado es el de "pertenecer a la f- sucesión que termina con m". Este último es el concepto F, y para demostrar que el número natural que le corresponde es precisamente el sucesor de m, la condición que tiene que cumplir es la establecida por la definición original del sucesor; a saber, que si su cardinal es el sucesor de m, entonces hay en F un elemento de modo que el cardinal de "pertenece a F pero no es el cardinal considerado" es justamente m. El elemento que se elige para ajustar el resultado es precisamente el m. El concepto F es: "pertenece a la sucesión de números naturales que termina con m", el resultado de la *Begriffsschrift* asegura que m es un elemento que pertenece a ese concepto. Así, m debe ser el número natural que pertenece al concepto "pertenece a F pero es distinto de m". Para probar esta propiedad, Frege señala la necesidad de probar que si un número n sucede inmediatamente a otro número m, y m es tal que su sucesor es el número que pertenece al concepto "sucesión natural de números que termina con m", entonces n es tal que de él se puede afirmar que el número que pertenece a "sucesión natural de números que termina con n" es el sucesor inmediato de n. Una equivalencia de esta naturaleza requiere de la ley V ya enunciada de manera informal en este texto en el § 73. Si se quiere probar que n es el sucesor inmediato de m entonces hay que hacer ver que el número natural que pertenece al concepto "pertenece a la sucesión de números naturales que termina con n pero difiere de n" es el mismo número que pertenece al concepto "pertenece a la sucesión de números naturales que termina con m". Como se sabe, la ley V exige probar que los dos conceptos tienen la misma extensión. Para completar la demostración para cualquier número cardinal, Frege afirma que se debe mostrar que el número 0, cuya definición ya fue dada, cumple con esta condición. Enseguida se debe probar que esta condición la cumple cualquier elemento n del cual se puede decir que pertenece a la serie de números naturales que comienza con 0.

Pero el establecimiento de los principios de sucesión (z sucede a x en la f-sucesión) y de inducción lleva a algunos problemas que se plantearán con toda claridad años más tarde. En primer lugar, afirmar que z sucede a x en la f-sucesión, será un concepto cuya extensión se utilizará para caracterizar a la sucesión de números naturales. Si el problema es el de encontrar bajo que condiciones se puede decir que un objeto "z" cumple la propiedad de suceder a "x", y este problema se soluciona con la formulación de Frege, vemos como estamos ante un intento de encontrar la extensión de un concepto (el de "pertenecer a la sucesión de números" Cfr. Frege *Die Grundlagen der Arithmetik*, § 79). La necesidad de formular la ley de extensión de conceptos como una ley lógica se plantea aquí por vez primera. Así, la formulación de Frege parece llevarlo por el camino en el que aparecerán las dificultades.

Por otro lado, para poder derivar de este principio de sucesión el principio de inducción, dos artificios son necesarios:

i) Que la propiedad por demostrar pertenezca ya a la familia a la que debe pertenecer el elemento y que sucede a x. Condición que se expresa al decir que dicha propiedad es *hereditaria*.

ii) Que el principio de sucesión funcione efectivamente como un *orden*.

Como consecuencia del primero, vemos que el principio de inducción debería valer en toda f-sucesión. Sin embargo el segundo exige que esta sucesión sea asumida como un orden. Como consecuencia de esto, vemos que la formulación de Frege para la inducción requiere de dos condiciones que nunca fueron postuladas como principios lógicos: el orden y la posibilidad de determinar para cada elemento su sucesor; en resumen, el *buen orden*. En todo caso, si se insiste en que estas condiciones son una consecuencia de los principios postulados, sucesión e inducción, una teoria de los números que descansa así sobre estos principios lógicos descansa también sobre el principio de orden. La teoría ordinal que Frege siempre se negó a reconocer como básica, parece exigir a toda costa su presencia[9].

El análisis que hemos hecho acerca de la posible equivalencia entre las nociones básicas que para la reconstrucción de la aritmética utilizan Frege y Dedekind, nos muestra como es que, si de la aritmética se trata, una serie de elementos parecen exigir necesariamente su presencia. En el caso de la prueba del principio de inducción, Dedekind hace ver que se trata de un principio que descansa sobre las propiedades heredadas del conjunto *cadena*. Para Frege, en cambio, se trata de un principio que no se basa en las propiedades de la serie ordenada de los números naturales; se trata de un principio que se deriva exclusivamente de las leyes de la lógica. Otra diferencia importante que aparece es el concepto central al que cada uno de ellos asignará el nombre de *número*. Mientras que para Dedekind se trata de un elemento de un conjunto simplemente infinito, para Frege se trata de la extensión de un concepto. Aún cuando el "concepto" que se requiere para probar que un número pertenece a una serie, y que por lo tanto tiene un único sucesor inmediato, sea uno que, a nuestro juicio, lo llevara a las antinomias que Russell descubrirá en la ley V. Ello sin embargo no pretende mostrar las limitaciones de uno u otro proyecto. Si en su famosa memoria del '95 sobre los números transfinitos Cantor insistió en que los conceptos de número ordinal y de número cardinal sólo diferían en el caso del transfinito toda vez que "en el caso finito ambos conceptos coinciden", hemos intentado, más allá de las opiniones de Dedekind sobre la coincidencia de su proyecto con el de Frege, analizar hasta que punto es justo hablar de coincidencias en la aritmética finita.

NOTAS

1 R. Dedekind. *Was sind und was sollen die Zahlen*, prólogo a la segunda edición.

2 G. Frege. Prefacio a *Grundgestze der Arithmetik*, 1893.

3 Como se sabe, B. Russell criticaría esta afirmación de Dedekind diciendo que se trata solo del establecimiento de un orden y que por ende no se puede dar a partir de ella una caracterización unívoca de los números naturales. Cfr. *Principles of Mathematics* 1903.

4 Es importante señalar que se considera a un conjunto que cumple con las dos condiciones de Dedekind, este conjunto es un *conjunto inductivo*. La caracterización que da aquí Dedekind se limita a pedir que un número natural sea un elemento que pertenezca a todo conjunto *inductivo* y que coincide con la noción actual de un número natural tal y como lo definiría Von Neumann en 1938.

5 G. Frege. *Begriffsschrift*, sección 3, 1879. Es importante notar que Frege introduce sólo la idea de "aplicación del procedimiento f", diciendo que f(x,y) señala el hecho de que y es el resultado de aplicar a x el procedimiento f (lo que en notación contemporánea denotaríamos por y=f(x) para hablar inmediatamente de la *f*-sucesión. Esta definición que da Frege de la propiedad hereditaria hace pensar que en la *f*-sucesión se encuentra cualquier objeto obtenido a través del procedimiento f al aplicarles este a un objeto ya señalado.

6 G. Frege. *Begriffsschrift*.

7 En su artículo "El cálculo lógico de Boole y la Conceptografía" de 1880-81, Frege analiza este aspecto, entre otros, de su *Conceptografía* y sostiene que las propiedades aritméticas que se pueden probar a través de este principio de inducción son *contenidos posibles* para una ley cuyo dominio de validez yace en el fondo de la lógica pura.

8 Una aproximación de este tipo, con las limitaciones que exige una identificación entre *conjunto* y *concepto* nos parece que fue

la que dió pie a la interpretación de Dedekind.

9 Del ulterior desarrollo de la teoría cantoreana sabemos que el principio de inducción es una condición necesaria y suficiente para la condición del *buen orden*. En el caso finito este principio equivale a la inducción completa. Para el caso transfinito, Clase II, a la inducción transfinita. De hecho cada uno de estos principios de inducción se pueden asociar a los principios de generación de los ordinales transfinitos:

-adjunción de la unidad (paso al sucesor inmediato) <—> inducción completa.
-límite de una serie fundamental de ordinales <—> inducción transfinita.

Esta relación la expresaría J. Cavailles diciendo que "Hay una dependencia de la inducción respecto a los dos principios de creación (que implican la noción de buen orden): toda propiedad que ellos dejan invariante será demostrable por ella".

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
U.N.A.M. México