LA DEFINITION DE L'IDENTITE

D'ARISTOTE A ZERMELO

Jean-Louis GARDIES

ABSTRACT

This paper sketches a **history** of **definition** of **identity** from the **Aristotle's** Topics down to the modern **set theory**. The author tries to explain particularly: **first,** how the transformation of the concept of **predicate** at the end of the nineteenth century made it necessary to revise the **leibnitian definition of the identity of individuals; secondly,** why **Dedekind, Peano, Schröder,** etc. made, between **two** possible **definitions** of **identity of predicates** or of **sets,** a choice which later made it necessary to postulate in set theory the **axiom of extensionality.**

I- LA DEFINITION LEIBNIZIENNE DE L'IDENTITE DES INDIVIDUS

On attribue assez souvent à Leibniz le mérite d'avoir le premier réussi à définir l'identité. On dit aussi parfois qu'on trouve chez lui deux définitions différentes de cette notion. Ce qu'on recontre en réalité sous sa plume ce sont deux caractérisations distinctes, dont une seule mérite d'être reconnue comme une définition.

Ce qu'on pourrait en effet appelar irrespectueusement la *fausse définition* leibnizienne de l'identité est donné notamment au début du *Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis*, publié en 1840 dans l'édition Erdmann, dans laquelle les auteurs du XIXème siècle la retrouveront:

> Sont *les mêmes* les choses dont l'une peut être substituée à l'autre sans atteinte à la vérité [1].

Il y a au moins deux raisons de refuser à une telle caractérisation le titre de définition.

D'abord il faut reconnaître que cette expression, qu'on la présente ou non comme une définition, repose sur la confusion des *choses*, ou si l'on préfère des *individus*, et des *noms* qui désignent ces choses ou ces individus. Si je dis que

Gerbert d'Aurillac est identique à Sylvestre II

ce sont les individus Gerbert et Sylvestre II qui sont identiques l'un à l'autre, tandis que ce sont les noms 'Gerbert' et 'Sylvestre II' que nous pouvons substituer l'un à l'autre. Sans doute cette substitution n'est valide que si les individus désignés sont identiques; mais, sauf l'exception que constitue l'expression du principe d'identité (*a est a*), une telle substitution n'est généralement intéressante que si les noms employés sont différents. Aussi conviendrait-il préalablement de rectifier la formule leibnizienne soit sous la forme:

Sont *les mêmes* les choses dont le nom de l'une
peut être substitué au nom de l'autre sans atteinté à la vérité

soit sous la forme:

Désignent *les mêmes* choses les noms dont l'un
peut être substitué à l'autre sans atteinte à la vérité.

Telles sont les deux manières d'échapper à là critique contenue au paragraphe 5.5303 du *Tractatus* de Wittgenstein:

Dire de *deux* choses qu'elles sont identiques
est un non-sens, et dire *d'une* qu'elle est
identique à elle-même ne dit strictement rien[2].

Cepedant, la formule de Leibniz, même rectifiée, ne constituerait pas encore une *définition* de la identité, comme la soulignait à sa manière Husserl au chapitre VI de sa *Philosophie de l'arithmétique*. La propriété de substituabilité est une simple conséquence de l'*identité des individus*: c'est parce que les individus désignés par deux distincts sont identiques que je peux, dans une proprosition vraie, substituer l'un des deux noms à l'autre sans atteinte à la vérité. Aussi cette formule de Leibniz, loin de fournir une définition valable de l'identité, a plutôt formé, dans cette voie, un "obstacle épistémologique", comme nous aurons l'occasion de le constater en étudiant le cas de Frege.

En revanche l'authentique définition de l'*identité* qu'on peut trouver chez Leibniz d'une manière assez explicite est celle qu'on pourrait être tenté de formaliser aujourd'hui de la façon suivante:

a est indentique à b $\underset{df}{=}$ $\forall P(Pa \Longrightarrow Pb)$

Que *a* soit identique à *b* signifie que tout prédicat applicable à l'un est applicable à l'autre. Que Gerbert d'Aurillac soit identique à Sylvestre II signifie que si les prédicats:

a étudié à Cordoue
a été archevêque de Ravenne
est mort en 1003
etc.

valent pour l'un, ils valent aussi pour l'autre. De cette définition se laisse immédiatement déduire que, si deux individus *a* et *b* ne sont pas identiques, s'ils sont différents, c'est qu'il y a au moins un prédicat qui s'applique à l'un sans s'appliquer à l'autre:

$\exists$P (Pa & non Pb).

Car, nous dit Leibniz, deux individus auxquels on pourrait rapporter tous les mêmes prédicats seraient indistinguables; ils ne seraient donc qu'un seul et même individu.

Est-ce à dire que Leibniz ait ainsi donné la *définition moderne* de l'*identité de deux individus*, telle qu'on la trouvera ensuite exposée, par exemple, dans les *Principia Mathematica* de Whitehead et Russell (Part. I, Section B, * 13 *Identity*)? Ceci ne serait vrai que si Leibniz, dans son utilisation de la notion de *prédicat*, ne s'en était pas tenu à la version aristotélicienne de cette notion. Le *prédicat* reste, chez Leibniz comme chez Aristote, ce que nous appellerions aujourd'hui un *prédicat monadique*, convenant à la simple énonciation des *propriétés*.

L'identité entre Gerbert et Sylvestre II ne signifie pas seulement, dans la définition moderne, que toutes les propriétés de l'un soient celles de l'autre; elle signifie aussi que dans toutes les relations dans lesquelles puisse se trouver l'un, l'autre se retrouvera; plus généralement encore, que tout ce qu'on peut dire de l'un peut se dire de l'autre. De ce indispensable élargissement de la notion de *prédicat* témoigne dans les *Principia Mathematica*, la présence de l'*axiome de réductibilité*, que Whitehead et Russell introduisent à cet effet immédiatement avant la définition de la identité[3]. Car, pour eux comme désormais pour nous "*x* et *y* peuvent être appelés identiques, quand toute fonction prédicative satisfaite par *x* est aussi satisfaite par *y*"[4].

On ne trouve cependant rien de pareil chez Leibniz, dont tout le système s'accorde merveilleusement à la reconnaissance exclusive du prédicat monadique, hérité de la tradition aristotélicienne. Leibniz n'a pas tiré toutes les leçons philosophiques des remarques que Jaochim Jungius avait consacrées à la notion de relation dans sa *Logica hamburgensis*, et dont lui-même avait pourtant su souligner l'originalité et l'importance. Au contraire, pour Leibniz, comme l'identité d'un individu tient à l'unicité de l'ensemble de ses propriétés, c'est-à-dire des prédicats monadiques qu'on peut lui rapporter, il ne peut y avoir à deux endroits distincts deux individus ayant exactement les mêmes propriétés, puisqu'ils seraient alors à la fois identiques et distincts. C'est le *principe des indiscernables*:

> Il ne peut sa faire qu'il y ait dans la nature
> deux corps qui soient parfaitement à la fois
> égaux et semblables[5].

De cela Leibniz peut immédiatement tirer deux conséquences pour son système:

1) "la notion des atomes est chimérique"[6], les atomes étant pensés comme des êtres identiques par toutes leurs propriétés, qui ne se distingueraient que par leur place occupée dans l'espace.

2) Si la identité des individus tient à leurs seuls prédicats monadiques, il ne peut exister évidemment que des *monades*, chacune caractérisée par de tels prédicats, donc sans portes ni fenêtres sur l'extérieur, les relations entre elles étant assurées par la seule *harmonie préétablie*.

Au contraire de la définition leibnizienne, la définition moderne de l'*identité* n'empêche nullement de *penser* l'atomisme et n'accule pas le philosophe à accepter le système de la *Monadologie*: si deux atomes ont toutes leurs propriétés identiques, il suffit, par exemple, que leur relation au monde extérieur soit différente, pour qu'il existe un *prédicat* (cette fois polyadique) qui s'applique à l'un sans s'applique à l'autre, nous garantissant ainsi que les deux ne sont pas identiques. Ainsi Leibniz est-il davantage le précurseur que le créateur de la définition moderne de l'*identité* des individus, qu'on ne peut obtenir, à partir de son oeuvre, que par une généralisation de la notion de *prédicat*, généralisation qui au demeurant atteindrait les principes mêmes de sa philosophie.

II- LA REPRISE DE LA DEFINITION DE L'IDENTITE DES INDIVIDUS AU XIXème SIECLE: FREGE, JEVONS, PIERCE, DEDEKIND, PEANO

Cette généralisation de la notion de *prédicat*, permettant d'accéder à ce que nous avons appelé la *définition moderne* de *identité*, se fera, de manière assez simultanée, bien qu'avec une netteté variable, chez différents auteurs de la fin du XIXème siècle.

Il est cependant remarquable que cette définition de l'identité ne se trouve pas chez Frege, dont on peut se demander s'il ne fut pas victime de ce que nous nous sommes permis de désigner comme la *fausse définition* rencontrée chez Leibniz. Frege dans *Die Grundlagen der Arithmetik*, déclare en effet faire sienne la formulation de Leibniz:

> *Eadem* sunt, quorum unum potest substitui
> alteri salva veritate,

toutes les lois de l'identité se trouvant "contenues dans la remplaçabilité universelle" [7]. Non seulement Frege se satisfait de la caractérisation de l'identité des individus par la substituabilité des noms qui les désignent, mais, quand il rencontrera la vériatable définition moderne chez Peano ou chez le jeune Russell, il la refusera explicitement pour ce qu'il faut bien appeler une très mauvaose raison.

En 1896, après que Peano a donné cette définition moderne dans son *Formulaire de mathématique*, et, en 1904, quand Frege la retrouve sous la plume de Russell, il la dénonce comme circulaire: l'identité serait une notion qu'on ne pourrait définir sans faire appel à elle-même, puisque toute définition consiste à dire d'un *definiendum* qu'il *est identique à* un certain *definiens*. Tant Peano que Russell lui répondent fort pertinemment que le symbole " $=_{df}$ ", qui relie le *definiens* au *definiendum*, et dont il faut noter que Peano est l'introducteur dans l'usage moderne, appartient (comme nous le dirions aujourd'hui) au métalangage du langage auquel appartient de son côté le symbole de l'identité des individus, en sorte qu'il n'y a pas ici la moindre circularité. Frege comprend si peu cette réponse qu'il reprend telle quelle, en 1904, l'objection soulevée en 1896, et dont le contenu se trouvait déjà en 1884 dans son compte rendu de la *Philosophie de l'arithmétique* de Husserl: "Comme toute définitions est une équation (*Gleichung*), on ne peut pas définir l'égalité (*Gleichheit*) elle-même[8].

Il est caractéristique qu'au paragraphe 20 du premier volume de ses *Grundgesetze der Aritmetik*, Frege, loin de refuser l'équivalence entre ce qui constitue le *definiens* et ce qui constitue le *definiendum* de la définition moderne de l'identité, l'affirme même explicitement aussi bien dans son idéographie propre qu'en langage vulgaire:

> Si Γ est le même que Δ, Γ tombe sous
> chaque concept sous lequel tombe Δ, ou,
> comme on peut encore le dire, toute proposition
> qui vaut de Δ vaut de Γ .... une
> égalité de parcours de valeurs est toujours
> convertible en universalité d'une égalité
> et réciproquement[9].

Mais, aux yeux de Frege, ceci n'est jamais qu'une *équivalence*, c'est-à-dire una expression pour laquelle la question de la circularité ne se pose pas, mais ne saurait constituer une *définition*, une telle définition n'ayant un sens (La *Logique de Port-Royal* le soulignait déjà, à la suite de Pascal) qu'à la condition de n'être pas circulaire.

A défaut de pouvoir être trouvée chez Frege, la définition moderne de l'égalité est déjà au moins esquissée chez Stanley Jevons qui caractérise "A = B" de la façon suivante:

> En quelque relation que B se trouve à une
> troisième chose C, A est nécessairement
> dans la même relation à C[10].

Le seul reproche qu'on puisse adresser à une définition de ce genre, c'est de se limiter apparemment aux prédicats dyadiques. comme on pouvait reprocher à la définition leibnizienne de se limiter aux prédicats monadiques.

On trouve sous la plume de Charles Sanders Peirce en 1885 la définition suivante:

> Dire que des choses sont identiques, c'est
> dire que tout prédicat est vrai des deux ou
> faux des deux[11];

ce que, laissant tomber la notation propre à Peirce, nous pourrions écrire:

a est identique à b $=_{df}$ $\forall P$ [(Pa & Pb) (non Pa & non Pb)].

Le *definiens* est ici équivalent à

$\forall P$ (Pa $\Longrightarrow$ Pb)

expression à son tour équivalent au *definiens* auquel nous nous étions arrêté:

$\forall P$ (Pa $\Longrightarrow$ Pb).

La seule hésitation que laisse encore cette définition peut venir de ce qu'il faudrait être sûr que "prédicat" soit bien pris ici déjà au sens moderne, et non au sens restreint qu'il avait encore chez Leibniz.

En 1888, dans *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Richard Dedekind donne de l'identité des individus une définition cette fois à peu près irréprochable:

> Une chose a est la même que b (identique à b), et b la même que a, si tout ce qui peut être pensé de a peut l'être aussi de b, et tout ce qui vaut de b peut être aussi pensé de a[12]

Il complète d'ailleurs immédiatement cette définition par celle de la non-identité, à savoir: "les choses a et b sont dites différentes"

ou: "a est une autre chose que b"
ou encore: "b est une autre chose que a"

qui signifie qu'"il y a quelque propriété, qui appartienne à l'une et n'appartienne pas à l'autre"[13].

Peano enfin en 1897, dans sa *Logique mathématique*, propose encore cette "définition générale de l'égalité ou identité":

> "Nous disons que $a = y$, lorsque toute classe a qui contient x, contiendra aussi y" ou "toute propriété de l'objet x est une propriété de l'objet y"[14].

Cette formulation présente l'avantage de laisser le choix entre une définition exprimée en extension et son équivalente en compréhension. et P étant respectivement une variable de classe et une variable de prédicat:

$$\forall a\ (x \in a \Longleftrightarrow y \in a)$$

ou $$\forall P\ (Px \Longleftrightarrow Py).$$

Mais cette formulation présente en revanche la même ambiguïté que celle de Peirce: c'est qu'il faudrait être sûr que le prédicat n'y soit pas pris au sens restreint de *prédicat monadique*. Aussitôt après, Peano cite la *fausse définition* de Leibniz ("*Eadem* sunt etc.") sans autre commentaire, en particulier sans nous dire que c'est une simple conséquence de la définition qu'il vient de donner. Mais il ajoute ensuite de façon remarquable:

> On déduit les propriétés réflexive, symétrique,
> et transitive de la ralation =.

Car il est conscient qu'un avantage majeur de la définition de l'*identité* est qu'on en puisse déduire les propriétés qui en font une relation d'équivalence, sans qu'il soit nécessaire de les postuler.

III- LA DEFINITION "EXTENSIONNELLE" DE L'IDENTITE DES PREDICATS OU DES ENSEMBLES: DEDEKIND, PEANO, SCHRÖDER, FREGE

En fait d'*identité*, nous n'avons considéré jusqu'ici que celle des individus. Or cette notion, dans son usage courant, s'applique aussi aux *classes* ou *ensembles* d'individus (L'*ensemble des hommes* est identique à l'*ensemble des animaux raisonnables*), ou, si l'on préfère le point de vue de la compréhension à celui de l'extension, aux *prédicats* d'individus (*Est homme* est identique à *Est animal raisonnable*), ou, tout simplement, à ce que Frege lui-même appelait encore les *concepts* (le concept d'*homme* est identique au concept d'*animal raisonnable*).

Il se trouve que presque tous les auteurs de la fin du XIXème siècle, dans leur commune préoccupation de définir l'*identité*, caractérisent celle des *prédicats*, *classes* ou *concepts*, par la communauté des individus auxquels les deux termes s'appliquent. P et Q étant deux *prédicats* d'individus

$$P = Q \underset{df}{=} \forall x\ (Px \Longleftrightarrow Qx);$$

A et B étant deux *ensembles* d'individus

$$A = B \underset{df}{=} \forall x\ (x \in A \Longleftrightarrow x \in B).$$

Ainsi Dedekind, désignant par le mot *système* ce que nous appelons aujourd'hui un *ensemble*, écrit-il:

> Le système S est... le même que le système T, en symboles S = T, si tout élément de S est aussi élément de T et si tout élément de T est aussi élément de S[15].

Quant à Peano, il définit aussi bien dans son *Introduction au Formulaire de mathématique* que dans sa *Logique mathématique*

1) d'une part, l'identité de deux classes comme leur inclusion réciproque[16], ce que nous écririons:

$$A = B =_{df} A \subseteq B \ \& \ B \subseteq A$$

2) d'autre part, l'inclusion d'une classe dans une autre par une implication que nous écririons:

$$A \subseteq B =_{df} x \varepsilon A \Longrightarrow x \varepsilon B$$

Ces deux définitions, une fois réunies, donnent la définition suivante de l'identité de deux classes:

$$A = B =_{df} \forall x \ (x \varepsilon A \Longleftrightarrow x \varepsilon B)$$

Mais ce ne sont pas seulement les ensembles d'individus ou (en compréhension) les prédicats à unique argument qui sont traités de cette manière. En 1895, Schröder, dans le volume III de ses *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, intitulé *Algebra und Logik der Relative*, applique le même traitement à l'identité de deux relations[18], écrivant:

$$a = b = \prod_{ij} (a_{ij} = b_{ij})$$

ce qu'on pourrait transposer sous une forme aujourd'hui plus familière ayant en outre l'avantage de ne pas prêter le flanc au reproche de circularité:

$$R = S =_{df} \forall xy (Rxy \Longleftrightarrow Sxy)$$

où R et S désignent deux relations binaires. On retrouvera ce genre de définition de l'identité de deux ensembles, prédicats ou relations, par la communaute des éléments auxquelles ils s'appliquent, chez presque tous les grands classiques de la théorie des ensembles: Zermelo, Skolem, Gödel, etc.

Sur cette question en revanche Frege occupe une position originale, qui mérite que nous nous y arrêtions un instant. Car, pour lui, on ne peut définir l'*identité* de deux *concepts* ou de deux *fonctions*. Ceci d'abord pour une première raison, sur laquelle nous passerons vite parce que c'est une mauvaise raison que nous avons déjà rencontrée: ici encore toute définition de l'identité ne pourriant être que circulaire, puisqu'elle appuierait elle-même sur l'identité[19]. Mais la seconde raison es plus intéressante et appelle réflexion.

Frege réserve le terme d'*identité* à l'identité d'un *objet* avec un *objet*, ou, si l'on préfère, d'un *individu* avec un *individu*. Ainsi, peut-on dire que le *vainqueur d'Austerlitz* est identique au *vaincu de Waterloo*. Mais, poursit Frege, nous ne pouvons pas dire que le *triangle équiangle* soit, au même sens, identique au *triangle équilatéral*, parce que ni le triangle équiangle, ni le triangle équilatéral ne sont des objets et que le seule communauté qui entre ici en jeu est celle de l'ensemble des éléments auxquels ces deux concepts s'appliquent:

> Ici un objet n'est pas identique à un objet, mais un concept a la même extension (= ist umfangsgleich mit) qu'un concept. On ne peut pas véritablement parler d'identité pour des concepts[20].

Il écrivait déjà dans son compte rendu de la *Philosophie de l'arithmétique* de Husserl:

> La coïncidence de l'extension est une caractéristique nécessaire et suffisante de ce qu'il y a entre les concepts la relation qui correspond à l'égalité dans le cas des objets. Je fais remarque ici que j'utilise le mot "égal" sans autre addition au sens de 'non différent', 'coïncidant', 'identique'[21].

De même encore, écrivait-il à Russell en 1902:

> Quand on parle de l'identité des fonctions, on ne peut vouloir dire que l'identité de leurs parcous de valeurs[22].

Il y a ici dans l'attitude de Frege, masqué par son entêtement à dénoncer, dans le principe même d'une définition de l'identité, une circularité qui ne s'y trouve pas, quelque chose de plus profond qu'un simple caprice terminologique de réserver l'application du terme d'*identité* aux seuls individus. Car, à défaut de définition, Frege se trouve bien d'accord avec Dedekind, Peano et Schröder pour caractériser l'*equivalence* de deux *ensembles*, *prédicats* ou *concepts* par la communauté de leur extension. Or

P *a la même extension que* Q[23],

P et Q désignant ici deux *prédicats* ou deux concepts, peut se transposer sous la forme du premier ordre:

$$\forall x(Px \Longleftrightarrow Qx).$$

Mais enfin cette *caractérisation* ("Kennzeichen", comme dit Frege dans un texte que nous venons de citer) de l'*identité* de deux concepts, pour irréprochable qu'elle soit, suffit-elle, indépendamment des objections de Frege préalablement rencontrées et réfutées, à constituer une *définition* qui soit analogue à celle de l'identité des individus?

IV- <u>LA DISSYMETRIE ENTRE LA DEFINITION DE L'IDENTITE DES INDIVIDUS ET LA DEFINITION "EXTENSIONNELLE" DE L'IDENTITE DES PREDICATS OU ENSEMBLES</u>

Rapprochons ici, sous la formalisation que nous leur avions donnée, les deux définitions

-d'une part de l'*identité des individus*:

$$a = b \underset{df}{=} \forall P(Pa \Longrightarrow Pb)$$

-d'autre part de l'*identité des prédicats* *concepts*:

$$P = Q \underset{df}{=} \forall x(Px \Longleftrightarrow Qx)^{24}.$$

Il y a entre ces deux "définitions", une dissymétrie, que cette formalisation souligne et à laquelle les textes que nous avons cités de Frege semblent bien montrer que celui-ci n'ait pas été insensible. Pour le dire en termes aristotéliciens, quand nous écrivons dans la première de ces deux définitions que $a = b$ (a est identique à b), les lettres et désignent des *substances premières*, ou des individus, dont je ne peux définir l'identité que par évocation de la totalité des *substances secondes*, c'est-à-dire des *prédicats* qu'on peut leur attribuer. Pour le dire maintenant en termes modernes, ils est impossible d'exprimer l'identité des individus, en demeurant dans les limites et par les seils moyens du simple *calcul des prédicats du premier ordre*, puisque, comme le montre la formalisation que nous en avons donnée, nous ne pouvons définir cette identité sans une quantification portant sur les prédicats eux-mêmes.

En revanche, quand nous écrivons, dans la seconde de ces deux définitions, que P = Q (P est identique à Q), les lettres P et Q désignent des *substances secondes*, ou, si l'on préfère, des prédicats (d'individus), ou encore, pour le dire vulgairement, des entités *abstraites*, ce que les individus ne sont pas. Car enfin Diogène, dans le faisceau de sa lanterne, recontrait des individus humains, mais non pas le prédicat "homme". Or, curieusement, alors que nous ne réussissions pas à exprimer l'identité des individus concrets sans sortir du premier ordre, notre seconde "définition" parvient à se maintenir dans le premier ordre, la quantification ne portant désormais que sur les individus lorsqu'il s'agit de l'identité, non plus des individus, mais des prédicats. Ainsi, dans la pratique du logicien ou du mathématicien, l'identité des individus se présente-t-elle paradoxalement comme un concept plus abstrait que l'identité des prédicats ou des ensembles.

Que dire de cette *dissymétrie*, entre les deux définitions, pour ne pas parler d'*anomalie* voire d'*inélégance*? Rien pourtant ne nous empêcherait de garder un entier parallélisme dans la définition de l'identité à ses différents niveaux, en particulier de définir l'identité des *prédicats* ou des *ensembles* d'individus d'une manière analogue à celle des *individus* eux-mêmes. On pourrait avoir, P et Q désignant deux *prédicats d'individus* et ϕ étant une variable de *prédicat de prédicats*:

$$P = Q \underset{df}{=} \phi(\phi P \Longrightarrow \phi Q)$$

ou encore, A et B désignant des *ensembles d'individus* et étant une variable d'*ensemble d'ensembles*

$$A = B \underset{df}{=} \forall \Delta (A \varepsilon \Delta \Longrightarrow B \varepsilon \Delta)$$

Le maintien de ce parallélisme s'imposerait d'autant plus que, comme le font remarquer Whitehead et Russell[25], dans la pratique nous n'avons nul besoin de connaître de manière absolue le type de nos variables, et que nous nous contentons, dans nos calculs et nos raisonnements, de prendre, assez arbitrairement, comme individus de base entités de type quelconque, à charge pour nous, bien sûr, de rester attentifs aux entités voisines de type supérieur et de garder à l'esprit leur type relatif. Mais les commodités mêmes d'un tel relativisme pratique ne peuvent se conserver intégralement que si, d'un niveau à l'autre, toutes les notions *analogues*, comme, entre autres, l'identité, se trouvent définies de manière elle-même *analogue*, sans que des considérations circonstancielles soient à l'origine de ruptures d'un niveau à l'autre.

Pour éclairer, indépendamment de toute formalisation, ce que signifiw l'identité de duex prédicats, nous pouvons prendre l'exemple (puisque, comme nous venons de le voir, pue importe le type absolu) de ces *prédicats de prédicats*) que sont, dans la ligne des analyses de Frege, les nombres entiers. Que signifie que le nombre 7 + 5 *soit identique* au nombre 12? Si l'on se fie au genre de définition le plus répandu, celui que nous avions trouvé notamment chez Dedekink, chez Peano ou chez Schröder, cette identité signifie que, quel que soit l'ensemble[26] d'individus considéré (par exemple, l'*ensemble des fils de Jacob selon la Biblie*, l'*ensemble des apôtres de Jésus*, ou l'*ensemble des maréchaux de France à la veille de la Révolution*, etc.), si cet ensemble a le cardinal 7 + 5, alors il a le cardinal 12. Mais l'autre définition possible que nous avions indiquée reviendrait à dire, tout différemment, que, quels, que soient les prédicats eux-mêmes applicables à des prédicats de prédicats (... *est un entier naturel est divisible par* 2, 3, 4 ou 6, ... *peut diviser* 24, 36, etc., ...*est racine carrée de* 144, ... *est plus grand ou plus petit que tel ou tel nombre*, etc.), si ce prédicat s'applique à 7 + 5, alors il s'applique à 12. Notons, sur cet exemple, que la seconde définition que nous venons de proposer possède sur la première cet avantage d'être analogue à la définition, sur laquelle chacun s'accorde, de l'identité des individus: elle caractérise en effet l'identité de deux prédicats, par la communaute des prédicats d'ordre immédiatement supérieur qui s'y appliquent, comme on caractérise l'identité de deux individus par la communauté de leurs prédicats d'individus.

Placé devant le choix entre deux définitions possibles de l'identité de deux prédicats ou de deux concepts, en l'occurrence de l'identité de 7 + 5 et de 12, nous nous permettrons d'aller consulter le chapitre des *Topiques* (de 151b 25 à 152b 35) où Aristote expose les lieux communs de l'identité.

Devant ce texte, le lecteur moderne éprouvera d'abord inévitablement une gêne, qui tient à ce qu'Aristote envisage l'identité de deux termes dont il ne précise pas si ce sont ce que nous appellerions aujourd'hui des *individus* ou des *prédicats*. Ils est difficile de reprocher au Stagirite cette confusion, puisqu'elle tient à une faiblesse de sa logique qui ne sera vraiment surmontée qu'à la fin du XIXème siècle, sinon au début du XXème, quand on aura compris la necessité de distinguer non seulement les individus et les prédicats, mais, parmi ces derniers, un nombre indéfini de types; faute de telles distinctions, il est bien connu qu'Aristote, suivi par toute une longue tradition, croira possible de relier les deux termes constitutifs de toute proposition par cet ὑπάρχειν dont les auteurs de la fin du XIXème siècle montreront qu'il regroupe abusivement des liaisons aux propriétés fort différentes. Ceci étant mis à part, bien qu'il ne faille pas l'oiblier, disons qu'Aristote caractérise l'identité de deux termes par la possibilité d'applique à l'un tous les prédicats qui s'appliquent à l'autre, sans s'enfermer, à la différence de Leibniz, dans les limites des prédicats monadiques, ceux précisément de la tradition désignée comme ... *aristotélicienne*. En termes modernes, le texte des *Topiques* revient à dire que, pour savoir si deux termes sont identiques, il faut vérifier si l'on peut appliquer à l'un tous les prédicats et toutes les relations qu'on peut appliquer à l'autre: "On doit examiner les deux choses... Il faut voir de plus si ... En outre il faut voir ... De plus, il faut s'aider de ... Il faut examiner aussi, non seulement si ..."[27].

Mais il y a un passage plus extraordinaire encore (152b 25-30) qui constitue une réponse à la question que nous avions soulevée:

> D'une manière générale, on doit examiner s'il existe quelque part une discordance dans les prédicats affirmés d'une façon quelconque de chacun des deux termes, et dans les choses dont ces termes son eux-mmes affirmés: car tout ce qui est attribué à l'un doit aussi être attribué à l'autre, et tout ce dont l'un est predicat doit aussi avoir l'autre comme prédicat[28].

Si nous nous permettions de projeter dans le texte d'Aristote la distinction moderne des types et d'appliquer son propos à deux prédicats P et Q, nous traduirions sa phrase "*tout ce qui est attribué à l'un doit aussi être attribué à l'autre*" sous la forme déjà rencontrée[29]:

$$\forall \phi(\phi P \Longleftrightarrow \phi Q)$$

et sa phrase suivante "*tout ce dont l'un prédicat doit aussi avoir l'autre comme prédicat*" sous la forme aussi rencontrée :

$$\forall x(Px \Longleftrightarrow Qx).$$

Car enfin, le propos d'Aristote revient ici à nous dire que l'identité de deux concepts s'exprime non seulement par la communauté des propriétés *qui s'y appliquent*, mais aussi par la communauté des termes *auxquels eux-mêmes s'appliquent.*

V- L'AXIOME D'EXTENSIONNALITE ET LA POSSIBILITE D'UNE AUTRE DEFINITION DE L'IDENTITE DES PREDICATS OU ENSEMBLES

S'il convient de retenir, comme nous y invitait Aristote, une définition de l'identité qui s'accorde à cetre double exigence, il faut alors souligner que celle qui fonde l'identité de deux prédicats sur la communauté de leur prédicats d'ordre supérieur, définition qui donc fait appel à une quantification de prédicats de prédicats, implique la caractéristique, sur laquelle tablait l'autre définition, de la communauté des éléments auxquels les deux prédicats s'appliquent. Sans recourir à une procédure formalisée, il est facile de montrer la validité de l'implication:

$$\forall \phi(\phi P \Longleftrightarrow \phi Q) \Longrightarrow \forall x(px \Longleftrightarrow Qx)$$

en faisant correspondre aux prédicats de troisième ordre

P *s'applique à a*

Q *s'applique à a*

leurs équivalents dans le premier ordre "Pa" et "Qa". Une de deux définitions possibles de l'identité me donne donc immédiatement la caractéristique sur laquelle se fonde l'autre.

Que se passe-t-il en revanche, si l'on privilégie la définition de l'identité des prédicats ou des ensembles par la communauté des éléments auxquels ils s'appliquent ou qui leur appartiennent, suivant l'usage majoritaire? C'est alors, comme l'ont observé notamment Henkin et Quine[31], que nous ne pouvons conserver l'autre caractéristique de l'identité qu'en postulant un axiome à cet effet, comme celui qu'on qualifie en général aujourd-hui d'*axiome d'extensionnalité* et qu'on trouve déjà sous l'appellation d'*Axiome der Bestimmtheit* dans la première présentation axiomatique de la *Théorie des ensembles* donnée en 1908 par Ernst Zermelo dans ses *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*:

> Si tout élément d'un ensemble M est aussi un élément de N et vice versa, si donc à la fois M ⊆ N et N ⊆ M, alors toujours M = N; ou, plus brièvement: Tout ensemble est déterminé par ses éléments[32].

Cet axiome peut se transcrire, suivant les suggestions de Hilbert et Ackermann[33].

$$\forall P \forall Q \ [\ x(Px \Longleftrightarrow Qx) \Longrightarrow \forall \phi (\phi P \Longrightarrow \phi Q)].$$

Cette présentation manifeste immédiatement que *par ce moyen*, l'identité de deux prédicats, même définie par la simple communauté des individus auxquels ils peuvent convenir, impliquera (ce qu'elle n'impliquerait pas à elle seule) la communauté des prédicats de prédicats qui peuvent leur convenir.

L'appellation d'*axiome de déterminabilité Bestimmtheit)* signifie sous la plume de Zermelo que cet axiome permet de considérer un ensemble comme déterminable par ses seuls éléments, tout en maintenant la garantie que deux ensembles identiques appartiendront bien néanmoins aux mêmes ensembles d'ensembles, garantie qui justement ne s'obtient que par ce postulat introduit à cet effet. Zermelo sur ce point sera assez uniformément suivi, notamment par Skolem et Gödel[34].

On peut cependant exclure l'hypothèse que l'idée de déterminer l'identité d'un ensemble ou d'un prédicat par leurs éléments ou les individus auxquels ils s'appliquent ne soit venue aux auteurs de la seconde moitie du XIXème siècle que faute d'avoir su la déterminer par leurs ensembles d'ensembles ou leurs prédicats de prédicats. Ce qui permet d'abord d'exclure cette hypothèse, c'est le passage des *Topiques* que nous avons évoqué; mains on pourrait ici faire valoir que la remarque d'Aristote ne prend toute sa profondeur que lorsqu'on y projette la moderne distinction de types, profondeur donc que, dans son état historique, elle n'avait certainement pas. En tout cas, de cette définition de l'identité des prédicats ou des ensembles analogue à celle de l'identité des individus, nous trouverions de nombreux exemples chez les auteurs mêmes du XIXème siècle auxquels nous nous sommes déjà référés.

Stanley Jevons par exemple caractérise l'identité des deux termes '*éléments*' et '*substances indécomposables*' de la façon suivante:

> Tout ce que nous savons du terme '*élément*,
> nous pouvons l'affirmer du terme distinct
> *substance indécomposable*; et, vice versa,
> tout ce que nous savons du terme *substance*
> *indécomposable*, nous pouvons l'affirmer
> d''*élément*[35].

Quand à Peirce, il semble bien qu'il ait voulu donner une unique définition de l'*identité*, valable aussi bien pour les individus que pour les prédicats, et, dirions-nous aujourd'hui, pour les prédicats de quelque ordre que ce soit, lorsqu,il écrivait en 1893:

> Dire que quelque chose K est l'identité,
> c'est dire que, si deux choses quelconques
> i et j sont dans la relation K, le i
> au j, alors n'importe quelle proposition
> x est vraie de i, sinon cette proposition
> est fausse de j[36].

L'usage indifférencié que fait ici Pierce du mot "chose" (*thing*), aussi - bien pour i et j que pour K nous autorise à considérer que:

1) si i et j sont des variables d'individus, x est une variable de prédicat d'individus et K est alors l'identité de deux individus,

2) si i et j sont des variables de prédicats, x est une variable de prédicat de prédicats et K est alors l'identité de deux prédicats,

4) etc.

Et de fait certains traités modernes mentionnent la possibilité qu'il y aurait à définir l'identité de deux prédicats, semb ablement à la définition de l'identité de deux individus, par le fait que "chaque prédicat qui s'applique au premier prédicat s'applique aussi au second"[37].

Les indications que nous venons de relever soulèvent donc un problème historique: Comme se fait-il que les auteurs de la fin du XIXème siècle, ayant une relative conscience deux manières possibles de définir l'*identité*, n'aient pas préféré celle qui, procédant par quantification de prédicats de prédicats, dispensait de tout appel à un axiome supplémentaire, puisqu'elle impliquait à elle seule l'autre caractéristique possible de l'identité?

VI- LES RAISONS HISTORIQUES DE LA PREVALENCE DE LA DEFINITION "EXTENSIONNELLE" DE L'IDENTITE DES PREDICATS OU ENSEMBLES

Les pères fondateurs de la théorie des ensembles et de la logique moderne, se sont ainsi trouvés, au tournant du XIXème siècle et du XXème, placés devant le choix entre deux utilisations possibles du *rasoir d'Occam*. On pouvait d'abord se limiter au *calcul des prédicats* du deuxième ordre, qui suffisait pour définir l'identité de deux individus, le premier ordre suffisant lui-même à définir celle des deux prédicats; le prix à payer pour se maintenir dans ces limites était de changer la définition de l'*identité* en passant d'un ordre à l'autre et surtout d'ajouter au système l'*axiome d'extensionnalité*. Ce fut la solution majoritairement adoptée. Mais nous avions vu qu'il aurait été possible de construire de manière analogue toutes les définitions de l'identité, et de faire ainsi l'economie de tout le reste. En évitant l'*axiome d'extensionnalité*, on pouvait alors donner de la *théorie des ensembles* une présentation purement sémantique, celle-là même que peut recevoir en termes de validité le *calcul des prédicats d'ordre supérieur*, tout faire reposer sur la caractérisation sémantique des connecteurs interpropositionnels et de l'usage des quantificateurs (quantificateurs de variables d'individus ou de prédicats d'ordre quelconque), tout le reste s'y réduisant par voie de pure et simple définition sans appel au moindre axiome.

Ces deux attitudes pouvaient s'accorder, aussi bien l'une que l'autre, avec nos manières ordinaires de penser. Prenoms l'exemple de l'ensemble des trois nombre entiers

$$E = \left\{ 5,\ 6,\ 12 \right\}$$

et de deux prédicats

Px = x est pair

Dx = x est divisible par 3

Dans cet ensemble, on vérifiera facilement que

$\forall x(Px \Longleftrightarrow Dx)$,

dont nous déduirons, si nous nous conformons aux classiques présentations de la théorie des ensembles, que

la parité est identique à la divisibilité par 3.

Cette conclusion ne sera pradoxale que pour celui qui oublierait que le propos s'est, dès le départ, enfermé dans l'ensemble E et qu'il n'y a aucune conséquence fâcheuse qu'on puisse tirer de la verité de notre conclusion dans les limites de cet ensemble. Mais, si nous avions choisi l'autre définition de l'identité, nous aurions pu alors dire qu'il était parfaitement vrai, dans l'ensemble E, qu'*un nombre est pair si et seulement si il est divisible par* 3, tout en refusant (ce qui était légitime, à partir du moment où nous n'acceptions pas de définir un ensemble par ses seuls éléments) de considére que la parité se confonde, ici ou ailleurs, avec la divisibilité par 3. Nous avons toute liberté de choix entre deux attitudes, ni plus no moins scandaleuses l'une que l'autre.

La préférence marquée âr la tradition historique pour la première de ces attitudes, son acceptation facile de cet *axiome d'extensionnalité*,- à qui l'on peut pourtant reprocher, dans la logique de l'autre attitude, d'être une sorte de prothèse mathématique destinée à pallier l'insuffisance de la définition de l'identité des prédicats par la communauté de leur extension, nous paraissent pouvoir s'expliquer par deux sortes de raison.

Nous avions vu que cette caractérisation de l'identité des prédicats par cette communauté d'extension se trouvait déjà chez Frege, même si celui-ci refusait d'y voir une *définition*. Or il n'est pas sûr qu'il n'y ait pas eu chez Frege, plus encore parmi ses successeurs, une légère confusion entre deux distinctions:

1) celle du *Sinn* et de la *Bedeutung*

2) celle de la *compréhension* et de l'*extension*.

Frege procède en effet dans certains textes[38] comme s'il assimilait d'une part le *Sinn* avec la *compréhension* du prédicat, s'autre part la

Bedeutung avec son *extension*, comme si la démarche logique qu'il préconise, en privilégiant la *Bedeutung*, c'est-à-dire les individus et non pas le contenu pensé de leur désignation, la valeur de vérité des propositions et non pas leur sens concret, revenait à privilégier aussi l'extension sur la compréhension. D'où l'ambiguïte du terme d'*extensionnalité* classiquement employé comme synonyme de *vérifonctionnalité*. Car enfin, si l'*axiome d'extensionnalité* est ainsi nommé parce que qu'il permet de se contenter de la définition de l'*identité* de deux prédicats ou ensembles fondée sur la seule communauté de leur *extension*, cette définition, qu'on a parfaitement le droit de qualifier d'*extensionnelle*, s'accorde tout autant, mais non pas davantage, à la vérifonctionnalité que l'autre: le *calcul des prédicats* n'en demeure pas moins vérifonctionnel quand on l'exerce au delà du premier et du deuxième ordre, même si, à nous éloigner le moins possible du premier ordre, nous pouvons éprouver le réconfort de ne jamais perdre de vue les *substances premières*. Cette confusion entre *privilège de l'extension* et *vérifonctionnalité* nous semble déjà esquissée chez Frege et s'accentuer chez certains auteurs comme Carnap[39]; elle ne nous paraît pas totalement étrangère à la préférence manifestée par la majorité des mathématiciens pour une définition qui permet de se montrer économe en idealités et nous maintient au niveau des entités les moins abstraites.

Mais il est une autre raison qui nous semble avoir travaillé dans le même sens, et qui a pu jouer un rôle important dans la pensée d'auteurs dont Dedekind est un bon exemple. Le cas de ce dernier est d'autant plus remarquable que nous avions vu que, dans le même texte, à une page d'intervalle, il était amené à définir l'identité de deux *individus* (qu'il appelait deux *choses*) et celle de deux *ensembles* (qu'il appelait deux *systèmes*), en mettant déjà, entre les deux définitions, la dissymétrie qui deviendra classique. Or cette dissymétrie, dont nous nous étions étonné, n'est pas dans le cas de Dedekind sans justification au moins apparente.

Dans *Was sind und was sollen die Zahlen?*, publié en 1888, Dedekind s'interroge sur la nature du nombre entier, comme il s'était interrogé dans *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, publié en 1872, sur la nature du nombre irrationnel et, plus généralement, du nombre réel. Son oeuvre sur ce point s'inscrit dans le grand travail de réduction ou de construction des différents genres de nombres: comme Hamilton avait réussi à construire les complexes à partir des réels, il construit en 1872 les réels à partir des rationnels, et il essaiera en 1888 de construire les entiers eux-mêmes sur la base de considérations purement logiques. On sait que Dedekink définit un réel α comme une coupure dans la succession ordennée des rationnels, coupure divisant l'ensemble des rationnels en deux sous-ensembles, les sous-ensembles A_1, antérieur et le sous-ensemble A_2 postérieur. Mais le sous-ensemble de rationnels A_1 suffit à déterminer le réel α, puisque, à partir du moment où connaissons A_1, nous connaissons son complémentaire A_2. Nous pouvons donc définir l'identité de deux réels quelconques α et β, caractérisés respectivement par les coupures (A_1, A_2) et $(B\ , B\ )$, de la façon suivante:

$$\alpha = \beta \underset{df}{=} \forall x(x \in A_1 \Longleftrightarrow x \in B_1)$$

la variable x étant prise ici dans l'ensemble des rationnels dont A_1 et B_2 sont les sous-ensembles complémentaires[41].

Ainsi l'identité de deux réels α et β, eux-mêmes respectivement assimilables aux deux ensembles de rationnels A_1 et B_1, se définit-elle d'autant plus naturellement par la communauté des rationnels éléments de ces ensembles, que c'est précisément le projet de Dedekind de construire les réels sur la seule base des rationnels: le parti pris d'extensionnalité s'inscrit immédiatement dans le constructivisme qui inspire le projet. Au contraire, la définition de l'identité des deux ensembles de rationnels, auxquels on peut réduire les réels α et β, par la communauté de tous les ensembles d'ensembles auxquels il puissent appartenir, sans être nullement désaccordée à un tel projet constructiviste, *semblait* s'y inscrire moins naturellement. Pour y accéder il eût fallu en outre une conscience de la hiérarchie des types moins implicite que celle qu'on pouvait avoir en 1888; il eût fallu au moins se rendre déjà compte que le parti retenu par Dedekind mettait le mathématicien dans la nécessité de se donner l'*axiome d'extensionnalité*, ce dont l'autre parti le dispensait entièrement.

NOTES

1 "Eadem sunt quorum unum potest substitui alteri salva veritate. Si sint A et B, et A ingrediatur aliquam propositionem veram et ibi in aliquo loco ipsius A pro ipso substituendo B fiat nova propositio aeque itidem vera, idque semper succedat in quacumque tali propisitione, A et B dicuntur esse eadem; et contra, si eadem sint A et B, procedet substitutio quam dixi".

2 "Von zwei Dingen zu sagen, sie seien identisch, ist ein Unsinn, und von Einem zu sagen, es sei identisch mit sich selbst, sagt gar nichts".

3 Si large que soit la notion moderne de *prédicat*, elle devra cependant être limitée aux prédicats *extensionnels*. Car l'identité de Gerbert et de Sylvestre II n'empêche pas que la proposition

Pierre sait que Gerbert est l'auteur d'un traité sur l'abaque

puisse être vraie sans que la proposition

Pierre sait que Sylvestre II est l'auteur d'un traité sur l'abaque

le soit. Il ne faudra jamais perdre de vue cette restriction.

4 *Principia Mathematica*, second edition, Cambridge, At the University Press, volume I, p. 168.

5 *Philosophische Schriften*, ed. Gerhardt, II, p. 250.

6 Ibid., V, p. 214.

7 *Die Grundlagen der Arithmetik*, Breslau, Wilhelm Koebner, 1884, pp. 77:
"In der allgeneinen Ersetzbarkeit sind nun in der That alle Gesetze der Gleichheit enthalten."
Sans doute Frege n'emploie-t-il pas ici le mot d'*Identität*, mais celui de *Gleichheit*; mais il précise que ce terme désigne pour lui ce qu'on peut aussi désigner par *dasselbe*.

8 Cf. Gottlob Frege, *Wissenschaftlicher Briefwechsel* Hamburg, Felix Meiner, 1976, pp. 181-182 et 247, et *Kleine Schriften*, Hildesheim, Georg Olms, 1967, p. 184.

9 *Grundgesetze der Arithmetik*, Jena 1893, pp. 35-36.

10 *Pure logic and other minor works*, ed. by R. Adamson and Harriet A. Jevons, London, Macmillan, 1890, p. 96. Cette référence, parmi d'autres encore, nous a été aimablement communiquée par M. Sinaceur.

11 "To say that things are identical is to say that every predicate is true of both or false of both". *Colleted papers of Charles Sander Peirce*, ed. by Charles Hartshorme and Paul Weill, 3.398.

12 "Ein Ding *a* ist dasselbe wie *b* (identisch mit *b*), und *b* dasselbe wie *a*, wenn Alles, was von *a* gedacht werden kann, auch von

b, und wenn Alles, was von *b* gilt, auch von *a* gedacht werden kann". Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Braunschweig, Friedrich Vieweg, 1888, p. 1.

13 "Es giebt irgend eine Eigenschaft, die zu dem einen zukommt, dem anderen nich zukommt".

14 Peano, *Logique mathématique*, Turin, Bocca frères & Ch. Clausen, 1897, pp. 38-39.

15 "Das System S ist... dasselbe wie das System T, in Zeichen S=T, wenn jedes Element von S auch Element von T, und jedes Element von T auch Element von S ist." *Was sind und was sollen die Zahlen ?* p. 2.

16 Cf. *Notations de logique mathématique, Introduction au formulaire de mathématique*, Turin, 1894, p. 7 et *Logique mathématique*, p. 33.

17 Cf. *Notations de logique mathématique*, p. 18 et *Logique mathématique*, p. 28.

18 Cf. Jean Largeault, *Logique mathématique - Textes*, A. Colin, 1972, p.112.

19 Cf. Frege, *Kleine Schriften*, p. 184.

20 Frege, Lettre à Linke du 24-8-1919 in *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, p. 155.

21 Frege, *Kleine Schriften*, p. 184.

22 *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, p. 226.

23 en allemand: P *ist umfangsgleich mit* Q.

24 Nous ne nous attardons pas à la différence (superficielle) de présentation de ces deux définitions, qui vient de ce qu'une *implication* tient dans la première la place occupé dans l'autre par une *équivalence*. On sait en effet que, dans la première définition l'*equivalence* entre 'Pa' et 'Pb' se laisse déduire de l'implication de 'Pb' par 'Pa'; l'implication est par le fait même ici suffisante.

25 "In practice, we never need to know the absolute types of our variables, but only their relative types. That is to say, if we prove any proposition on the assumption that one of our variables is an individual, and another is a function of order n, the proof will still hold if, in place of an individual, we take a function of order m and in place of our function of order n we take a function of order $n + m$, with corresponding changes for any other variables that may be involved." *Principia Mathematica*, volume I, p. 165.

26 Dans le souci de demeurer dans nos explications le plus intuitif possible nous employons ici indifféremment les termes d'*ensemble* et de *prédicat*, sans nous astreindre, comme nous devrions en principe le faire, à choisir une fois pour toutes entre le point de vue de

l'extension et celui de la compréhension; nous risquerions en effet de perdre en simplicité ce que nous gagnerions, d'une manière purement apparente, en rigueur.

27 Nous reprenons ici la traduction Tricot. *Organon*, V, *Les Topiques*, Libraire J. Vrin, 1974, pp. 294-295.

28 Ibid., p. 296. Cette remarque est aux yeux d'Aristote si importante qu'elle constitue une généralisation, presque même une répétition, de ce qu'il a déjà dit (152a 33-37) deux pages avant, p. 294, en termes extrêmement voisins: "on doit examiner les deux choses, à partir de leurs accidents et des choses dont elles sont elles-mêmes les accidents: car tout ce qui est accident de l'une doit être aussi accident de l'autre; et les choses auxquelles appartient l'une d'elles par accident doivent avoir aussi l'autre pour accident. Si, dans l'un de ces cas, il y a discordance, c'est qu'évidemment les choses en question ne sont pas identiques".

29 Cf. ci-dessus p. 18. Pour comprendre que le différence entre la présente formalisation et celle de la p. 18 est insignifiante, il suffit de se référer ci-dessus, à notre note 24, dont le contenu se laisse ici facilement transposer, sans qu'il soit utile de le reprendre.

30 Cf. ci-dessus p. 17.

31 Henkin écrivait en 1950:

> "Les axiomes d'extensionnalité peuvent être amis si nous consentons à admettre des modèles dont les domaines contiennent des fonctions qui sont regardées comme distinctes même lorsqu'elles prennet des valeurs identiques pour tout argument"

in Jean Largeault, *Logique mathématique - Textes*, p. 208; et Quine souligne effectivement dans *Méthodes de logique*, traduction Maurice Clavelin, Armand Colin, 1972, pp. 268-269 que c'est parce qu'on définit *identité des individus* et *identité des classes* "de manières opposées" qu'on doit postuler l'*axiome d'extensionnalité*.

32 Cf. Jean van Heijenoort, *From Frege to Gödel A source Book in Mathematical Logic*, 1879-1931, Cambridge, Massachusetts, Harvars University Press, 1967, p. 201.

33 *Grundzüge der theoretischen Logik*, Berlin/Heidelberg/New-York,Springer-Verlag, 5. Auflage, 1967, pp. 153-154.

34 Cf. Skolem (1922) in van Heijenoort, *From Frege to Gödel*, pp. 90 et s.; Skolem (1930) in Jean Largeault, *Logique mathématique-Textes*, pp. 145-146; Gödel, (1931) in van Heijenoort, *From Frege to Gödel*, - p. 501.

35 *Pure logic and other minor works*, p. 89.

36 "To say that anything whatever, K, is identity is to say that if any two things i and j are in the relation, K the i to the j, then any proposition whatever x, is true of i, or else that proposi-

tion is false of *j*." *Collected papers of Charles Sanders Peirce*, 4.82.

37 Hilbert und Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*, p. 168.

38 Par exemple *Klein Schriften*, pp. 183-184.

39 Cf. en particulier *Meaning and necessity*, Chicago and London, The University of Chicago Press, 1947, Chapter I.

40 Ci-dessus pp. 10 et 13.

41 Donnons ici le texte même de Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Braunschweig, Friedrich Vieweg, 1872, p. 22:

> Offenbar ist ein Schnitt (A_1, A_2) schon vollständig gegeben, wenn eine der beiden Classen, z.B. die erste A_1 bekannt ist, weil die zweite A_2 aus allen nicht in A_1 enthaltenen rationalen Zahlen besteht, und die charakteristische Eigenschaft einer solchen ersten Classe A_1 liegt darin, dass sie, wenn die Zahl a_1 in ihr enthalten ist, auch alle kleineren Zahlen als a_1 enthält. Vergleich man nun zwei solche erste Classen A_1, B_1 mit einander, so kann es 1) sein, dass sie vollständig idantisch sind, d.h., dass jede in A_1 enthaltene Zahl a_1 auch in B_1, und dass jede in B_1 enthaltene Zahl b_1 auch in A_1 enthalten ist. In diesem Falle ist dann notwendig auch A_2 idestisch mit B_2, die beiden Schnitte sind vollständig identisch, was wir in Zeichen durch $\alpha = \beta$ oder $\beta = \alpha$ andeuten."

Université de Nantes