UNE MÉTHODE ARITHMÉTIQUE DE DÉCISION POUR LE SYSTÈME MODAL S5 PAR DES INVARIANTS NUMÉRIQUES DE SES CLASSES D'ÉQUIVALENCE*

Miguel SANCHEZ-MAZAS**

Résumé

Il s'agit d'une méthode qui permet d'**associer** à chaque **formule bien formée** du **système** S5 de **logique modale** un **nombre naturel invariant** pour toutes les formules qui appartiennent à la **même classe d'équivalence** que la première.

En particulier, étant donné que la méthode associe à toutes les **tautologies** du système le **nombre** 0 et à toutes les **contradictions** du système **un certain nombre** Φ, il suffit de calculer le nombre qui, en vertu des associations fondamentales, reste associé à n'importe quelle formule pour **décider** si cette dernière est **tautologique, contradictoire** ou **contingente.**

Les **relations logiques** reliant **deux formules** du système -par exemple, des **implications,** des **incompatibilités,** des **oppositions contradictoires,** etc.- sont révélées par un simple examen oculaire des **nombres associés** aux **formules** données et une rapide vérification manuelle ou informatique fondée sur la comparaison des chiffres du même rang de ces nombres, écrits en **hexadécimal.**

Finalement, l'analyse de la **composition binaire** du **nombre associé** à une **formule** donnée permet d'obtenir l'expression de la première sous sa **forme normale conjonctive.**

La méthode décrite constitue donc une nouvelle **méthode arithmétique de décision** pour le système modal indiqué.

Introduction.

Le but de cette communication est de proposer une méthode permettant d'associer un **nombre naturel** à chaque **formule bien formée** d'un système de **logique modale (aléthique** ou **déontique)** de base **propositionnelle,** de telle sorte que ce nombre reste **invariant** pour toutes les formules de la même **classe d'équivalence** que la première et que son **analyse binaire,** toujours explicite puisque le nombre sera écrit en **hexa-**

---

*Ponencia presentada al **Logic Colloquium Berlin 89 (European Summer Meeting of the ASL)**, Berlin, 25 de julio al 3 de agosto de 1989.

THEORIA - Segunda Epoca - Año IV
Curso 1988-1989, Nº 11, pp. 491-513

décimal, revèle immédiatement la composition de la formule sous une **forme normale conjonctive modale.** L'association comporte, en outre, une **méthode arithmétique de décision** ou d'**évaluation** des formules du système dans la mesure où **le nombre 0 (zéro)** reste toujours associé à toutes les **tautologies** et **thèses** de ce dernier.

Le point de départ de cette méthode est une **interprétation arithmétique** du **calcul propositionnel binaire** d'un nombre fini de variables dans une **algèbre de Boole** formée d'un **ensemble fini de nombres naturels**, muni des **opérations arithmétiques infime binaire, suprême binaire** et **complément binaire**, respectivement associées à la **disjonction**, à la **conjonction** et à la **négation logiques**, ainsi que de la **relation arithmétique absorption binaire**, associée à l'**implication**[1].

Les exemples d'application ou extension de notre méthode au domaine modal (aléthique ou déontique) se bornent pour l'instant à deux travaux concernant respectivement l'**arithmétisation** du **système de logique déontique pour des normes de premier ordre** proposé par **G.H. Von WRIGHT** en 1981 -exposée dans un article paru en 1987 dans la <u>Revue européenne des sciences sociales</u>[2]- et celle d'un **système équivalent au S5 de LEWIS** -développée dans un article publié dans la revue belge <u>Logique et Analyse</u>[3]-.

1. Notre principe de l'équivalence et ses conséquences pour l'arithmétisation de S5.

Dans cette communication, nous avons l'intention d'exposer brièvement les principes et les critères qui ont inspiré notre recherche d'une **méthode** simple et efficace pour l'**arithmétisation du système modal S5 de LEWIS** ainsi que les principaux **résultats** de cette recherche.

Signalons pour commencer que, comme **le système S5 contient le calcul propositionnel PC** -ou, si on veut, **comme tout théorème du calcul propositionnel est aussi un théorème de S5**-, les **associations** entre **opérations et relations logiques**, d'une part, et **opérations et relations arithmétiques**, d'autre part, établies dans des travaux précédents[4] pour notre **arithmétisation du calcul propositionnel** (sur une base **intensionnelle**) sont automatiquement incorporées dans l'actuelle **arithmétisation de S5.** Nous avons montré que ces **associations** satisfont notre **principe de l'équivalence** que nous énoncerons de la manière suivante:

Deux formules ont le même nombre caractéristique si et seulement si elles sont logiquement équivalentes. Le nombre associé à une formule est donc un invariant de sa classe d'équivalence.

Ce principe entraîne, à notre avis, des **conséquences décisives** pour le choix d'une **méthode** simple et efficace d'**arithmétisation de S5** et avant tout pour le choix de la **base logique** la plus adéquate pour un **système modal équivalent à S5** dont la **traduction arithmétique** soit facile et comporte des **conditions** précises **nécessaires et suffisantes** pour le **calcul immédiat** du **nombre naturel** qui doit rester **associé** à n'importe quelle **formule bien formée** de **S5.**

En effet, notre **principe de l'équivalence** nous indique que si nous pouvons construire un **système équivalent à S5** dont la **base logique,** à l'exception des **tautologies** empruntées au **calcul propositionnel,** ne contienne **que** des **axiomes** et des **définitions** ayant la forme d'**équivalences** exprimant les **formules de base** de **S5** sous une **forme normale conjonctive modale,** nous aurons, comme **traduction arithmétique** de cette nouvelle **base logique** de **S5,** un **ensemble de conditions arithmétiques** sous forme d'**équations** exprimant les **nombres naturels** qui doivent rester **associés** à ces **formules de base** de **S5** en fonction des **nombres associés** aux **composants** des **formes normales conjonctives** indiquées.

Ces **équations** pourraient être, d'après leur origine, des **conditions nécessaires et suffisantes** pour le **calcul** du **nombre** qui doit rester **associé** à n'importe quelle **formule bien formée** du **système S5.**

Dans les deux parties du **Tableau I,** nous proposons, d'une part, une **base logique** de la sorte indiquée pour un **système modal équivalentiel** équivalent à S5 et, d'autre part, la **traduction arithmétique** de cette **base** par un ensemble d'**équations** reliant des **expressions arithmétiques** formées par des **nombres** et des **opérations binaires** sur ces derniers, comme l'**infime** et le **suprême** binaires.

On constatera que, en dehors des **tautologies** empruntées au **calcul propositionnel** par le truchement de l'**axiome A0**[5], la **base spécifiquement modale** proposée ne comporte que **4 axiomes** et **3 définitions** ayant les uns et les autres la formes d'**équivalences** reliant des **formules de base de** S5 à des **formes normales conjonctives modales.**

Dans le **Tableau II,** nous trouvons, d'une part, plusieurs **théorèmes** importants du **système S5**, lesquels peuvent être démontrés soit par les méthodes logiques habituelles à partir de la **nouvelle base logique** que nous venons de proposer pour **S5**, soit **arithmétiquement**, en effectuant les **calculs** nécessaires sur les **nombres** associés aux **formules** concernant ces **théorèmes**, comme nous le montrons dans le **Tableau VIII** et dans les **Notes aux Tableaux**[6] et, d'autre part, les **équations** associées à ces **théorèmes.**

2. Méthodes pour le calcul de l'invariant numérique qui doit rester associé à n'importe quelle formule bien formée de S5.

Nous savons par le **théorème de la reduction de S5**[7] que toute formule de **dégré supérieur au premier** est **reductible dans S5** à une **formule de premier degré** et par le **théorème de la forme normale conjonctive modale**[8] que toute formule de ce système est **réductible,** en outre, à une **formule normale conjonctive modale** équivalente.

Par ces théorèmes, nous pouvons donc affirmer que pour toute **formule bien formée de S)** de n'importe quel degré et forme et arbitrairement choisie on peut trouver au moins une **formule de premier degré** et de **forme normale conjonctive modale, équivalente** à la première et ayant, par conséquent, **le même nombre associé que celle-ci.**

Le but préliminaire de notre recherche est donc de trouver et d'appliquer la **méthode** appropriée permettant d'**associer,** d'abord aux **disjonctions élémentaires,** éventuellement **dégénérées,** composant les **formes normales conjonctives modales** qui expriment, d'après la **base logique** du **système,** les **formules fondamentales de S5** les **nombres** susceptibles de **satisfaire** les **conditions arithmétiques** imposées par les **équations associées** à cette **base** et de **calculer systématiquement** ensuite, en vertu de notre **association** entre **opérations logiques,** d'une part, et **opérations arithmétiques,** d'autre part, les **nombres** qui doivent rester **associés** à n'importe quelle **formule de premier degré de S5,** une fois que, grâce aux **théorèmes de la réduction** de ce système, toute **formule de degré supérieur au premier** devra nécessairement rester associée elle aussi à un des ces **invariants numériques**[9].

Une fois obtenu ce résultat fondamental, le but suivant est d'établir la **méthode arithmétique de décision** la plus simple possible pour **S5,** permettant d'**évaluer** toute **formule bien formée de premier degré** de ce système, en décidant par des calculs simples, effectués manuellement ou informatiquement, si la formule en question a) est une thèse de S5; b) n'est pas une thèse de S5; c) est, plus particulièrement, une antithèse de S5, incompatible avec ce système.

Finalement, nous devons considérer aussi la contribution que notre traduction arithmétique des formules de premier degré de S5 et notre association d'équations aux théorèmes de la réduction des formules de degré supérieur au premier peuvent apporter aussi au processus systématique de réduction lui-même et donc à l'identification rapide de la classe d'équivalence de ces formules par l'invariant numérique correspondant.

Le Tableau III nous montre, d'abord l'association initiale de nombres naturels -puissance de 2 ou somme d'un petit nombre de puissances de 2-, écrits en hexadécimal, aux disjonctions élémentaires ci-dessus mentionnées et ensuite le processus systématique de calcul sur ces nombres par lequel nous pouvons déterminer les nombres qui doivent rester associés à toutes les formules de S5.

Le Tableau IV nous montre les nombres naturels écrits en hexadécimal associés, en vertu du processus de calcul ci-dessus mentionnés à 48 formules de base de S5, à savoir:

a) 16 formules du calcul propositionnel (au centre);

b) les 16 formules obtenues des premières en appliquant à celles-ci l'opérateur de possibilité (à gauche);

c) les 16 formules obtenues des premières en appliquant à celles-ci l'opérateur de nécessité (a droite).

Il est trés facile de constater que toutes les relations d'absorption binaire entre ces nombres, associées aux relations classiques d'implication entre les formules correspondantes, sont satisfaites par les premiers.

En fait, cet ensemble de 48 associations entre nombres et formules peut être obtenu et donc remplacé par un petit sous-ensemble contenant seulement 7 associations, accompagné de 6 équations fondamentales. Les unes et les autres, facilement mémorisables, sont énumérées dans les Notes au texte[10].

Dans le Tableau V nous reproduisons les matrices des opérations

arithmétiques infimum, supremum et **complément binaires, associées** respectivement à la **disjonction**, la **conjonction** et la **négation propositionnelles**, ainsi que celle de la **relation arithmétique absorption binaire, associée à l'implication.**

L'utilisation de ces **matrices** permet d'effectuer assez rapidement des **opérations arithmétiques** et des **vérifications** sur des **nombres écrits en hexadécimal**, profitant d'une propriété très avantageuse de cette écriture, à savoir:

Toute opération binaire ou toute vérification d'une relation binaire sur des nombres écrits en hexadécimal se réduit à l'opération ou vérification correspondante sur les chiffres du même rang de ces nombres.

Il faut ajouter, naturellement, à cela qu'en utilisant nos **associations logico-arithmétiques** toute **évaluation démonstration** concernant, pour l'instant, des **formules de premier degré de S5, à 1** ou **2 variables,** peut être effectuée en quelques secondes ou minutes avec une très petite calculatrice de poche, comme la **Hewlett-Packard 16 C,** qui ne pèse que 100 grammes.

Le **Tableau VI** nous donne un exemple de notre **traduction** des **relations logiques** entre des **formules de S5** par des **relations arithmétiques** entre les **nombres associés** à ces dernières. Les **formules,** accompagnées de leurs **nombres caractéristiques,** sont disposées soit sur les **sommets** du grand carré, soit au milieu des côtés de celui-ci, soit au centre des 4 petits carrés. Les flèches du diagramme indiquent des relations d'**implication** entre des **formules** ou d'**absorption** entre les **nombres associés,** les **barres (de Sheffer)** de relations d'**incompatibilité** respectivement **logique** ou **arithmétique,** les **W** des relations de **contradiction logique** ou de **complementarité arithmétique** et les V des relations de **disjonction logique** ou **arithmétique.**

Le **Tableau VII** nous montre de quelle manière notre **association** entre **formules modales,** d'une part, et **nombres écrits en hexadécimal,** d'autre part, facilite notablement la construction des **chaînes des implications** reliant les premières, une fois que ces **chaînes d'implications** peuvent être ostensiblement révélées et représentées par les **chaînes des absorptions associées** à ces **implications,** puisque les **absorptions binaires** sont susceptibles de **vérification** oculaire immédiate.

Le Tableau VIII nous donne **7 exemples** de **démonstrations** ou **évaluations** effectuées sur des **formules de S5** par le truchement d'**opérations** et **vérifications arithmétiques** effectuées sur les **nombres naturels associés à ces formules.**

Les **5 premières vérifications arithmétiques** montrent que les **formules testées** sont des **théorèmes de S5**, la **vérifications** suivante que la **formule testée n'est pas une thèse de S5** (sans être, pour autant, une **antithèse**) et la dernière que la **formule testée** est précisement une **antithèse du système modal S5.**

Le Tableau IX, finalement, nous offre les **matrices traduisant l'application des équations associées aux théorèmes de la réduction à plusieurs formules modales de S5.**

Ces formules et d'autres analogues, mémorisées dans un ordinateur, pourraient faciliter la **réduction automatique** des **formules de degré supérieur au premier** à des **formules de premier degré**, permettant d'effectuer rapidement l'association aux **formules de degré supérieur** de l'**invariant numériques** qui leur reviennent et qui, en identifiant leurs **classes d'équivalence** respectives et en leur fournissant automatiquement leurs expressions sous **forme normale conjonctive modale** situe avec précision chaque **formule** dans le cadre du **système**, lui fournissant ainsi sa véritable **carte d'identité logique.**

Notes au texte.

[1]Dans des travaux précédents, publiés notamment entre 1977 et 1988, nous avons exposé des versions différentes et des développements successifs d'une telle interprétation arithmétique du calcul propositionnel dans une algèbre de Boole de nombres naturels, parfois en liaison avec une interprétation semblable d'un calcul des motions ou prédicats monadiques et de la syllogistique, dans la perspective des calculs logiques leibnitiens de 1679, 1686 et 1690. Voir spécialement à ce sujet nos travaux [14], [15], [16], [17] et [22].

[2]Voir SANCHEZ-MAZAS [21].

[3]Voir SANCHEZ-MAZAS [23].

[4]Voir surtout SANCHEZ-MAZAS [14], [15] et [22].

[5]Cet axiome entraîne l'incorporation à la base logique su système de n'importe quel système d'axiomes complet pour le calcul propositionnel S5. Dans [23], par exemple, nous proposons l'incorporation, qui est assez habituelle pour des système modaux, des quatre axiomes suivants de HILBERT-ACKERMANN dans [6], § 10: Die Axiome der Aussagenkalküls, p. 23, à savoir:

a) $(p \vee p) \rightarrow p$

b) $p \rightarrow (p \vee q)$

c) $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$

d) $(p \rightarrow q) \rightarrow ((r \vee p) \rightarrow (r \vee q))$

Nous avons donné une interprétation arithmétique de ce système d'axiomes, ainsi que des systèmes de Łukasiewicz (1924), Church (1951) et les postulats de Kleene dans SANCHEZ-MAZAS [14], pp. 378-380.

Or, par nos associations logico-arithmétiques fondamentales, on garantit, pour le calcul propositionnel et pour tous les systèmes qui, comme S5, contiennent ce dernier, que le nombre qui reste associé à toute tautologie est le 0 et que à toute équivalence logiquement vraie correspond toujours une équation arithmétiquement vraie.

[6]Les schémas utilisés dans le Tableau VIII et dans les Notes aux Tableaux peuvent être utilisés indifféremment pour le calcul manuel et pour le calcul informatique, par exemple avec la minuscule Hewlett-Packard 16C.

[7]Voir, par exemple, HUGHES and CRESSWELL [7], p. 51.

[8]Ibid., p. 55

[9]Des matrices comme celles que nous proposons dans le Tableau IX, peuvent, une fois mémorisés dans l'ordinateur, apporter une contribution arithmétique à la réalisation automatique des formules de degré supérieur au premier.

[10]Il s'agit, en l'occurrences des sept associations suivantes:

N1. N(M(p&q)) = 6.421.357

N2. M(p&-q)) = 9.218.A3B

N3. .(M(-p&q)) = 9.184.5CD

N4. N(M(-p&-q)) = 6.842.CAE

N5. N(p) = 3.333.333

N6. N(q) = 5.555.555

N7. N(f) = F.FFF.FFF

et des six équations suivantes:

EQ1. N(-p) = N(f) - N(p)

EQ2. N(pvq) = (N(p),N(q))

EQ3. N(p&q) = [N(p), N(q)]

EQ4. N(M(pvq))=(N(Mp),N(Mq))

EQ5. N(Lp)=N(-M-p)=N(f)-N(M-p)

EQ6. N(L(p&q)) = N(Lp&Lq) = [N(Lp), N(Lq)]

TABLEAU I.

SYSTEME MODAL EQUIVALENTIEL POUR L'ARITHMETISATION DU S5 DE LEWIS.

EMSA-S5 (Equivalential Modal System for the Arithmetization of Lewis's S5).

BASE LOGIQUE	INTERPRETATION ARITHMETIQUE
Axiomes	Equations associées aux axiomes
A0. Toutes les tautologies t_i du calcul propositionnel PC (introduites par une base complète pour le PC)	E0. (i) $N(t_i) = 0$
A1. M(pvq) ↔ Mp v Mq	E1. N(M(pvq)) = (N(Mp), N(Mq))
A2. M(p&q) ↔ Mp & Mq & (M(p&q) v -Mp v -Mq)) avec (M(p&q) v -Mp v -Mq) +/→ $\underline{t}$	E2. N(M(p&q)) = [N(Mp), N(Mq), N(M(p&q)v-Mpv-Mq)] avec N(M(p&q)v-Mpv-Mq) ≠ 0
A3. p ↔ Mp & (p v -Mp) avec (p v -Mp) +/→ $\underline{t}$	E3. N(p) = [N(Mp), N(pv-Mp)] avec N(pv-Mp) ≠ 0
A4. M-Mp ↔ -Mp	E4. N(M-Mp) = N(-Mp)
Définitions	Equations associées aux définitions
(Def L) Lp $=_{Df}$ -M-p	E5. N(Lp) = N(-M-p)
(Def Cont) Cont p $=_{Df}$ Mp & M-p	E6. N(Cont p) = N(Mp & M-p)
(Def ⥽) p ⥽ q $=_{Df}$ L(p→q)	E7. N(p ⥽ q) = N(L(p→q))
Règles de transformation logique	Règles arithmétiques associées
TR1. Règle de substitution uniforme: $\vdash \alpha \to \vdash [wff/p_i]\ \alpha$ (le résultat de substituer une wff à une variable dans une thèse est une thèse)	AR1.: $N(\alpha) = 0 \to N([wff/p_i]\alpha) = 0$
TR2. Modus ponens: $\vdash \alpha$ et $\vdash \alpha\to\beta \to \vdash \beta$	AR2.: $N(\alpha)=0$ et $N(\alpha\to\beta)=0 \to N(\beta)=0$
TR3. Règle de nécessitation: $\vdash \alpha \to L\alpha$	AR3.: $N(\alpha)=0 \to L\alpha$

TABLEAU II.

THEOREMES FONDAMENTAUX DU SYSTEME EMSA-S5 ET EQUATIONS ASSOCIEES

THEOREMES

T1. Mp ↔ M(pvq) & M(pv-q) & (Mpv-M(pvq)v-M(pv-q))
avec Mpv-M(pvq)v-M(pv-q) ↮ t[1]

T2. pvq ↔ M(pvq) & ((pvq)v-M(pvq))
avec (pvq)v-M(pvq) ↮ t[2]

T3. L(p&q) ↔ Lp & Lq[3]

T4. L(pvq) ↔ Lp v Lq v (L(pvq)&-Lp&-Lq)
avec L(pvq)&-Lp&-Lq ↮ f[4]

T5. L(p→q) → (Lp→Lq)[5]

T6. p → Mp[6]

T7. Lp → p[7]

T8. Mp v M-p ↔ t[8]

T9. L(pvq) → (Lp v Mq)[9]

T10. L(pvLq) ↔ (Lp v Lq)[10]

T11. L(pvMq) ↔ (Lp v Mq)[11]

T12. M(p&Mq) ↔ (Mp & Mq)[12]

T13. M(p&Lq) ↔ (Mp & Lq)[13]

EQUATIONS ASSOCIEES

E8. N(Mp) = [N(M(pvq)), N(M(pv-q)), N(Mpv-M(pvq)v-M(pv-q))]
avec N(Mpv-M(pvq)v-M(pv-q)) ≠ 0

E9. N(pvq) = [N(M(pvq)), N((pvq)v-M(pvq))]
avec N((pvq)v-M(pvq)) ≠ 0

E10. N(L(p&q)) = [N(Lp), N(Lq)]

E11. N(L(pvq)) = (N(Lp), N(Lq), N(L(pvq)&-Lp&-Lq))
avec N(L(pvq)&-Lp&-Lq) ≠ Φ

E12. (Φ-N(L(-pvq)), Φ-N(Lp), N(Lq)) = 0

E13. (Φ-N(p), N(Mp)) = 0

E14. (Φ-N(Lp), N(p)) = 0

E15. (N(Mp), N(M-p)) = 0

E16. (Φ-N(L(pvq)), N(Lp), N(Mq)) = 0

E17. N(L(pvLq)) = N(Lp v Lq) = (N(Lp), N(Lq))

E18. N(L(pvMq)) = N(Lp v Mq) = (N(Lp), N(Mq))

E19. N(M(p&Mq)) = N(Mp & Mq) = [N(Mp), N(Mq)]

E20. N(M(p&Lq)) = N(Mp & Lq) = [N(Mp), N(Lq)]

TABLEAU III.

A. Association initiale de nombres naturels écrits en hexadécimal aux disjonctions élémentaires des formes normales conjonctives modales traduisant les formules fondamentales de S5.

N(M(pvq))	=	1
N(M(pv-q))	=	2
N(M(-pvq))	=	4
N(M(-pv-q))	=	8[14]
N(Mpv-M(pvq)v-M(pv-q))	=	210
N(M-pv-M(-pvq)v-M(-pv-q))	=	480
N(Mqv-M(pvq)v-M(-pvq))	=	140
N(M-qv-M(pv-q)v-M(-pv-q))	=	820[15]
N(M(p&q)v-Mpv-Mq)	=	6.421.000
N(M(p&-q)v-Mpv-M-q)	=	9.218.000
N(M(-p&q)v-M-pv-Mq)	=	9.184.000
N(M(-p&-q)v-M-pv-M-q)	=	6.842.000[16]
N((pvq)v-M(pvq))	=	1.111.110
N((pv-q)v-M(pv-q))	=	2.222.220
N((-pvq)v-M(-pvq))	=	4.444.440
N((-pv-q)v-M(-pv-q))	=	8.888.880[17]

B. Processus de calcul des nombres naturels écrits en hexadécimal qui doivent rester associés aux formules fondamentales de S5 par l'application des équations associées aux thèses du EMSA-S5 aux nombres précédents.

Par E8	N(Mp)	= [1, 2, 210]	=	213
	N(M-p)	= [4, 8, 480]	=	48C
	N(Mq)	= [1, 4, 140]	=	145
	N(M-q)	= [2, 8, 820]	=	82A[18]
Par E2	N(M(p&q))	= [213, 145, 6.421.000]	=	6.421.357
	N(M(p&-q))	= [213, 82A, 9.218.000]	=	9.218.A3B[19]
Par E9	N(pvq)	= [1, 1.111.110]	=	1.111.111
	N(pv-q)	= [2, 2.222.220]	=	2.222.222[20]
	Np	= [1.111.111, 2.222.222]	=	3.333.333
	Nq	= [1.111.111, 4.444.444]	=	5.555.555[21]
	N(p&q)	= [3.333.333, 5.555.555]	=	7.777.777
	N(p&-q)	= [3.333.333, A.AAA.AAA]	=	B.BBB.BBB[22]
Par E5	N(L(p&q))	= Φ-N(M(-pv-q)) = Φ-8	=	F.FFF.FF7[23]
	N(L(p&-q))	= Φ-N(M(-pvq)) = Φ-4		F.FFF.FFB
	N(Lp)	= Φ-N(M-p) = Φ-48C	=	F.FFF.B73[24]
	N(Lq)	= Φ-N(M-q) = Φ-82A	=	F.FFF.7D5
	N(L(pvq))	= Φ-N(M(-p&-q)) = Φ-6.842.CAE	=	9.7BD.351
	N(L(pv-q))	= Φ-N(M(-p&q)) = Φ-9.184.5CD	=	6.E7B.A32[25]
Par E6	N(Cont p)	= [N(Mp), N(M-p)] = [213, 48C]	=	69F[26]
Par E7	N(p⥽q)	= N(L(-pvq)	=	6.DE7.5C4[27]

TABLEAU IV.
NOMBRES NATURELS ECRITS EN HEXADECIMAL
ASSOCIES AUX FORMULES FONDAMENTALES DU SYSTEME S5

Formules	Nombres	Formules	Nombres	Formules	Nombres
M(pv-p)	0	pv-p	0	L(pv-p)	0
M(pvq)	1	pvq	1.111.111	L(pvq)	9.7BD.351
M(pv-q)	2	pv-q	2.222.222	L(pv-q)	6.E7B.A32
M(-pvq)	4	-pvq	4.444.444	L(-pvq)	6.DE7.5C4
M(-pv-q)	8	-pv-q	8.888.888	L(-pv-q)	9.BDE.CA8
Mp	213	p	3.333.333	Lp	F.FFF.B73
M-p	48C	-p	C.CCC.CCC	L-p	F.FFF.DEC
Mq	145	q	5.555.555	Lq	F.FFF.7D5
M-q	82A	-q	A.AAA.AAA	L-q	F.FFF.EBA
M(p↔q)	6.000.006	p↔q	6.666.666	L(p↔q)	6.FFF.FF6
M(pwq)	9.000.009	pwq	9.999.999	L(pwq)	9.FFF.FF9
M(p&q)	6.421.357	p&q	7.777.777	L(p&q)	F.FFF.FF7
M(p&-q)	9.218.A3B	p&-q	B.BBB.BBB	L(p&-q)	F.FFF.FFB
M(-p&q)	9.184.5CD	-p&q	D.DDD.DDD	L(-p&q)	F.FFF.FFD
M(-p&-q)	6.842.CAE	-p&-q	E.EEE.EEE	L(-p&-q)	F.FFF.FFE
M(p&-p)	F.FFF.FFF	p&-p	F.FFF.FFF	L(p&-p)	F.FFF.FFF

TABLEAU V.

Matrices des opérations arithmétiques infimum, supremum et complément binaires, associées respectivement à la disjonction, la conjonction et la négation, ainsi que de la relation arithmétique absorption binaire, associée à l'implication, pour des nombres à un seul chiffre hexadécimal.

(POUR FACILITER DES EVALUATIONS MANUELLES RAPIDES DES FORMULES).

Infimum binaire (X, Y) associé à la disjonction

X \ Y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A 10	B 11	C 12	D 13	E 14	F 15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
2	0	0	2	2	0	0	2	2	0	0	2	2	0	0	2	2
3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
4	0	0	0	0	4	4	4	4	0	0	0	0	4	4	4	4
5	0	1	0	1	4	5	4	5	0	1	0	1	4	5	4	5
6	0	0	2	2	4	4	6	6	0	0	2	2	4	4	6	6
7	0	1	2	3	4	5	6	7	0	1	2	3	4	5	6	7
8	0	0	0	0	0	0	0	0	8	8	8	8	8	8	8	8
9	0	1	0	1	0	1	0	1	8	9	8	9	8	9	8	9
A 10	0	0	2	2	0	0	2	2	8	8	A	A	8	8	A	A
B 11	0	1	2	3	0	1	2	3	8	9	A	B	8	9	A	B
C 12	0	0	0	0	4	4	4	4	8	8	8	8	C	C	C	C
D 13	0	1	0	1	4	5	4	5	8	9	8	9	C	D	C	D
E 14	0	0	2	2	4	4	6	6	8	8	A	A	C	C	E	E
F 15	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F

Supremum binaire [X, Y] associé à la conjonction

X \ Y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A 10	B 11	C 12	D 13	E 14	F 15
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	1	1	3	3	5	5	7	7	9	9	B	B	D	D	F	F
2	2	3	2	3	6	7	6	7	A	B	A	B	E	F	E	F
3	3	3	3	3	7	7	7	7	B	B	B	B	F	F	F	F
4	4	5	6	7	4	5	6	7	C	D	E	F	C	D	E	F
5	5	5	7	7	5	5	7	7	D	D	F	F	D	D	F	F
6	6	7	6	7	6	7	6	7	E	F	E	F	E	F	E	F
7	7	7	7	7	7	7	7	7	F	F	F	F	F	F	F	F
8	8	9	A	B	C	D	E	F	8	9	A	B	C	D	E	F
9	9	9	B	B	D	D	F	F	9	9	B	B	D	D	F	F
A 10	A	B	A	B	E	F	E	F	A	B	A	B	E	F	E	F
B 11	B	B	B	B	F	F	F	F	B	B	B	B	F	F	F	F
C 12	C	D	E	F	C	D	E	F	C	D	E	F	C	D	E	F
D 13	D	D	F	F	D	D	F	F	D	D	F	F	D	D	F	F
E 14	E	F	E	F	E	F	E	F	E	F	E	F	E	F	E	F
F 15	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F

Complément binaire $\bar{X}$ associé à la négation

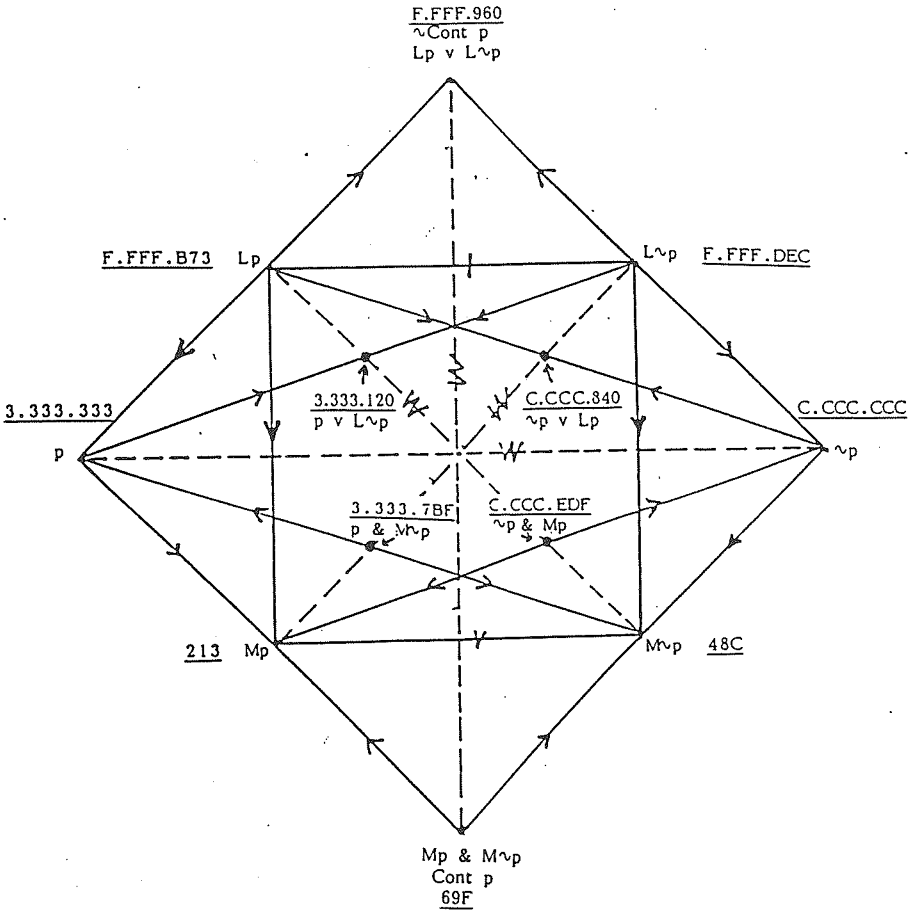
X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A 10	B 11	C 12	D 13	E 14	F 15
$\bar{X}$	F 15	E 14	D 13	C 12	B 11	A 10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Absorption binaire X:Y associée à l'implication

X \ Y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A 10	B 11	C 12	D 13	E 14	F 15
0	V															
1	V	V														
2	V		V													
3	V	V	V	V												
4	V				V											
5	V	V			V	V										
6	V		V		V		V									
7	V	V	V	V	V	V	V	V								
8	V								V							
9	V	V							V	V						
A 10	V		V						V		V					
B 11	V	V	V	V					V	V	V	V				
C 12	V				V				V				V			
D 13	V	V			V	V			V	V			V	V		
E 14	V		V		V		V		V		V		V		V	
F 15	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V

TABLEAU VI.

Traduction des relations logiques qui relient des fonctions modales de p par des relations arithmétiques qui relient les nombres associés à ces fonctions.



Relation logique entre deux formules g et h:		Relation arithmétique entre leurs nombres associés N(g) et N(h):
$g \rightarrow h$	si et seulement si	$N(g) \div N(h)$
$g \mid h$	si et seulement si	$[N(g), N(h)]$ = F.FFF.FFF
g w h	si et seulement si	$N(g) + N(h)$ = F.FFF.FFF
g v h	si et seulement si	$(N(g), N(h)) = 0$

TABLEAU VII. Traduction des chaînes des implications logiques entre des formules de S5 par des chaînes des absorptions arithmétiques entre les nombres associés à ces formules.

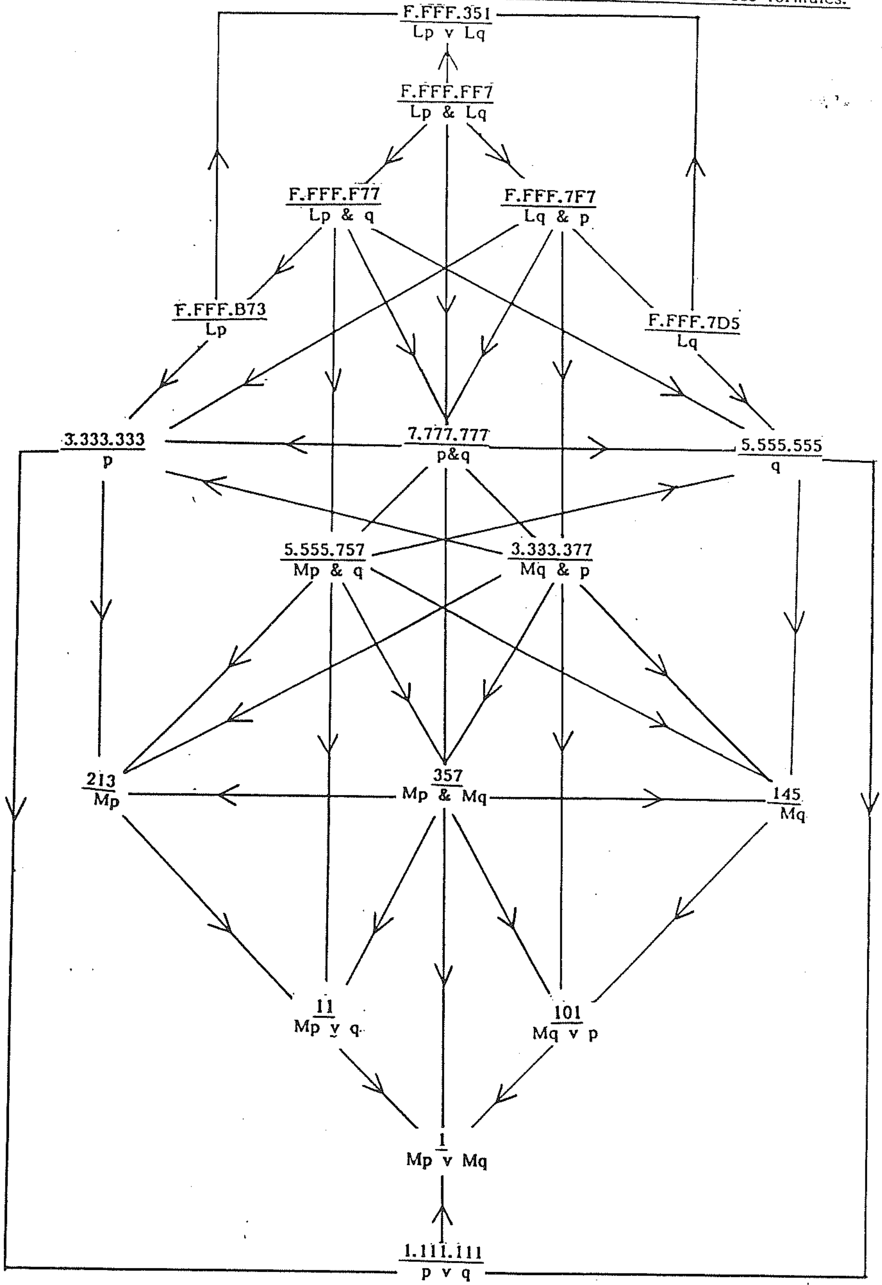


TABLEAU VIII.

EXEMPLES D'EVALUATION PAR VOIE ARITHMETIQUE DES FORMULES DE S5.

1. On démontre arithmétiquement qu'une formule Φ est un théorème de S5 si et seulement si l'on démontre que son nombre associé N(Φ)=0.

Formules	Nombres et opérations introduits	Résultats partiels ou finaux
T5. L(p→q)→(Lp→Lq)[28]		
L(-pvq)	6.DE7.5C4	
-L(-pv-q)	complément	9.218.A3B
Lp	F.FFF.B73	
-Lp	complément	48C
-L(-pvq)v-Lp	infime	8
Lq	F.FFF.7D5	
-(L-pvq)v-LpvLq	infime	0 q.e.d.
T14. (p ⥽ q)→(Mp→Mq)[29]		
L(-pvq)	6.DE7.5C4	
-L(-pvq)	complément	9.218.A3B
Mp	213	
-Mp	complément	F.FFF.DEC
-L(-pvq)v-Mp	infime	9.218.828
Mq	145	
-L(-pvq)v-MpvMq	infime	0 q.e.d
T15. ((p ⥽ q)&(p ⥽ -q)↔L-p[30]		
L(-pvq)	6.DE7.5C4	
L(-pv-q)	9.BDE.CA8	
L(-pvq)&L(-pv-q)	suprême	F.FFF.DEC
L-p	F.FFF.DEC	
L(-pvq)&L(-pv-q) L-p	sustraction	0 q.e.d
T16. L(pvq)→(MpvLq)[31]		
L(pvq)	9.7BD.351	
-L(pvq)	complément	6.842.CAE
Mp	213	
-L(pvq)vMp	infime	2
Mq	145	
-L(pvq)vMpvMq	infime	0 q.e.d
T17. (Lp&Mq)→M(p&q)[32]		
Lp	F.FFF.B73	
Mq	145	
Lp&Mq	suprême	F.FFF.B77
-(Lp&Mq)	complément	488
M(p&q)	6.421.357	
-(Lp&Mq)vM(p&q)	infime	0 q.e.d

2. On démontre arithmétiquement qu'une formule Φ n'est pas une thèse de S5 si et seulement si l'on démontre que son nombre associé N(Φ)≠0.

Formules	Nombres et opérations introduits	Résultats partiels ou finaux
NT1. (p→q)→(Lp→Lq) n'est pas un théorème de S5[33]		
-pvq	4.444.444	
-(-pvq)	complément	B.BBB.BBB
Lp	F.FFF.B73	
-Lp	complément	48C
-(-pvq)v-Lp	infime	88
Lq	F.FFF.7D5	
-(-pvq)v-LpvLq	infime	80≠0 q.e

3. On démontre arithmétiquement qu'une formule Φ est une antithèse de S5 si et seulement si l'on démontre que son nombre associé N(Φ)=F.FFF.FFF

Formules	Nombres et opérations introduits	Résultats partiels ou finaux
AT1. L-p&M(p&q) est une antithèse de S5[34]		
L-p	F.FFF.DEC	
M(p&q)	6.421.357	
L-p&M(p&q)	suprême	F.FFF.FFF q.e.d

TABLEAU IX.

Matrices traduisant l'application des équations E17, E18, E19 et E20 associées aux théorèmes T10, T11, T12 et T13 du système EMSA-S5 pour la réduction au degré modal 1 des formules de S5 de degré modal supérieur.

CES MATRICES PEUVENT FACILITER LA REDUCTION PAR DES OPERATIONS ARITHMETIQUES, INFORMATIQUES OU MANUELLES.

T10-E17	α	p v L-q	p v Lq	q v Lp	q v L-p	-q v Lp	-q v L-p	-p v Lq	-p v L-q
	N(α)	3.333.232	3.333.311	5.555.151	5.555.544	A.AAA.A32	A.AAA.8A8	C.CCC.4C4	C.CCC.C88
	Lα	Lp v L-q	Lp v Lq	Lp v Lq	L-p v Lq	Lp v L-q	L-p v L-q	L-p v Lq	L-p v L-q
	N(Lα)	F.FFF.A32	F.FFF.351	F.FFF.351	F.FFF.5C4	F.FFF.A32	F.FFF.CA8	F.FFF.5C4	F.FFF.CA8
T11-E18	α	q v Mp	p v M-q	-p v Mq	-q v M-p	p v Mq	-q v Mp	q v M-p	-p v M-q
	N(α)	11	22	44	88	101	202	404	808
	Lα	Lq v Mp	Lp v M-q	L-p v Mq	L-q v M-p	Lp v Mq	L-q v Mp	Lq v M-p	L-p v M-q
	N(Lα)	211	822	144	488	141	212	484	828
T12-E19	α	p & Mq	p & M-q	q & M-p	q & Mp	-q & Mp	-q & M-p	-p & M-q	-p & Mq
	N(α)	3.333.377	3.333.B3B	5.555.5DD	5.555.757	A.AAA.ABB	A.AAA.EAE	C.CCC.CEE	C.CCC.DCD
	Mα	Mp & Mq	Mp & M-q	M-p & Mq	Mp & Mq	Mp & M-q	M-p & M-q	M-p & M-q	M-p & Mq
	N(Mα)	357	A3B	5CD	357	A3B	CAE	CAE	C5D
T13-E20	α	p & Lq	-q & Lp	q & L-p	-p & L-q	q & Lp	p & L-q	-p & Lq	-q & L-p
	N(α)	F.FFF.7F7	F.FFF.BFB	F.FFF.DFD	F.FFF.EFE	F.FFF.F77	F.FFF.FBB	F.FFF.FDD	F.FFF.FEE
	Mα	Mp & Lq	M-q & Lp	Mq & L-p	M-p & L-q	Mq & Lp	Mp & L-q	M-p & Lq	M-q & L-p
	N(Mα)	F.FFF.7D7	F.FFF.B7B	F.FFF.DED	F.FFF.EBE	F.FFF.B77	F.FFF.EBB	F.FFF.7DD	F.FFF.DEE

Notes aux Tableaux.

Tableau II.

[1]Le théorème T1 peut être obtenu de l'axiome A2 par les substitutions pvq/p et pv-q/q.

[2]Le théorème T2 peut être obtenu de l'axiome A3 par la substitution pvq/p.

[3]Le théorème T3, dual de l'axiome A1, peut être obtenu de ce dernier et de la définition [Def L].

[4]Le théorème T4, dual de l'axiome A2, peut être obtenu de ce dernier et de la définition [Def L].

[5]La démonstration par voie arithmétique de T5 figure dans le Tableau VIII. Ce théorème de notre système, équivalent à S5, figure dans le système de Gödel $S5^G$ (S5 "Gödel style"), équivalent lui aussi à S5, comme premier axione spécifique, après les tautologies empruntés au calcul propositionnel. Voir à ce propos GÖDEL [5] et PRIOR [12], p. 60, où, en notation polonaise, il est écrit 'CLCpqCLpLq', ainsi que FEYS [3]. Voir également BLOK [1], p. 46. KRIPKE [9], de son côté, en fait son axiome A3 (p. 1).

[6]Le théorème T6 est une conséquence de notre axiome A3. La démonstration arithmétique de ce théorème, d'après l'association de nombres naturels aux formules de S5 effectuée d'après les équations associées aux thèses de notre système, est la suivante:

p	3.333.333		
-p	complément	C.CCC.CCC	
Mp	213		
-pvMp	infime		<u>0</u> <u>q.e.d.</u>

Notre théorème T6 est un axiome dans le système M de WRIGHT [25], équivalent au T de Feys, et donc aussi dans le système M'' (équivalent à S5) du philosophe finlandais, puisque M'' est construit par ce dernier en ajoutant l'axiome M-Mp→-Mp.

[7]Le théorème T7, dual de T6, peut être obtenu de ce dernier et de la définition [Def L]. Sa démonstration arithmétique est la suivante:

Lp	F.FFF.B73		
-Lp	complément	48C	
p	3.333.333		
-Lpvp	infime		<u>0</u> <u>q.e.d.</u>

Notre théorème T7 est l'axiome A1 dans la formulation de S5 dans KRIPKE [9], p.1 et l'axiome A3 dans le système $S5^G$ (S5 "Gödel style") de GÖDEL [5]. Voir aussi BLOK [1], p. 46 et PRIOR [12], p. 60, où, en notation polonaise. il est écrit 'CLpp'.

[8]Notre théorème T8 peut être obtenu des théorèmes T6 et T7 et de la définition [Def L]. Sa démonstration arithmétique est la suivante:

Mp	213	
M-p	48C	
MpvM-p	infime	<u>0</u> <u>q.e.d.</u>

[9]Le théorème T9 est obtenu de notre T5, qui est le théorème T28 de HUGHES and CRESSWELL [1972], pour lesquels il est le premier des 5 théorèmes fondamentaux pour la réduction au premier degré de toutes les formules de S5 ayant un degré supérieur. Les autres théorèmes de ces auteurs sont les T29, T30, T31 et 32, qui correspondent respectivement à nos T10, T11, T12 et T13. Pour faciliter l'application de ces théorèmes à cette réduction des formules au premier degré modal par des opérations arithmétiques, rálisées manuellement ou, informatiquement, il peut être utile de construire des matrices numériques traduisant les équations arithmétiques associées aux théorèmes mentionnés. Nous en donnons un exemple dans le Tableau IX.

[10]Voir la note 9 et le Tableau IX.

[11]Voir la note 9 et le Tableau IX.

[12]Voir la note 9 et le Tableau IX.

[13]Voir la note 9 et le Tableau IX.

Tableau III.

[14]L'association des 4 premières puissances de 2 aux formules M(pvq), M(pv-q), M(-pvq) et M(-pv-q) satisfait, d'une part, le caractère non-tautologique de ces formules (puisque le nombre associé à chaque formule de la classe d'équivalence des tautogies est le 0) et, d'autre part, le caractère tautologique de chacune des 6 disjonctions de deux de ces formules, conséquence de l'axiome A1 et du théorème T8. En effet, le nombre associé à chacune de ces disjonctions est toujoiurs le 0:

N(M(pvq)vM(pv-q)) = (1, 2) = 0
N(M(pvq)vM(-pvq))= (1, 4) = 0
N(M(pvq)vM(-pv-q)) = (1, 8) = 0
N(M(pv-q)vM(-pvq)) = (2, 4) = 0
N(M(pv-q)vM(-pv-q)) = (2, 8) = 0
N(M(-pvq)v(-pv-q)) = (4, 8) = 0

[15]En associant des nombres naturels différents de 0 à ces disjonctions, on satisfait la condition du caractère non tautologique de ces formules, établie par le théorème T2, dont la traduction arithmétique est l'équation associée E8, avec la condition arithmétique N(Mpv-M(pvq)v-M(pv-q)) ≠0.

[16]D'une manière analogue à celle indiquée dans la note 15, le fait d'associer aux 4 formules précédentes des nombres différents de 0, assure le caractère non tautologique de ces formules, exigé par notre axiome A2, dont la traduction arithmétique est l'équation associée E2.

[17]D'une manière analogue (voir notes 15 et 16), l'association précédente satisfait les exigences de notre théorème T2 et de l'équation E9, associée à ce dernier.

[18]Par ces associations, nous avons, par exemple:

N(Mp v M-p) = (213, 48C) = 0 (satisfaction du théorème T8 et de son équation associée E15).

N(Mp v Mq) = (213, 145) = 1 = N(M(pvq) (satisfaction de l'axiome A1 et de son équation associée E1).

[19]Par ces associations, nous avons, par exemple:

N(M(p&q)vM(p&-q)) = (6.421.357, 9.218.A3B) = 213 = N(Mp) = N(M((p&q)v(p&-q)))
(satisfaction, à nouveau, de l'axiome A1 et de son équation associée E1).

[20]N((pvq)v(pv-q)) = (1.111.111, 2.222.222) = 0 = N(t).

[21](N(p), N(q)) = (3.333.333, 5.555.555) = 1.111.111 = N(pvq) (satisfait l'association de base entre infime et disjonction).

[22]Pareillement:

(N(p&q), N(p&-q)) = (7.777.777, B.BBB.BBB) = 3.333.333 = N(p)

[23]On constatera que N(L(p&q)) pourra aussi être calculé comme le nombre associé à la conjonction de Lp et Lq, dont les nombres associés figurent dans les lignes suivantes, de cette manière:

N(L(p&q)) = N(Lp&Lq) = [N(Lp), N(Lq)] = [F.FFF.B73, F.FFF.7D5]= F.FFF.FF7

[24]D'une manière analogue (voir note 23), on constatera que N(Lp) pourra aussi être calculé comme le nombre associé à la conjonction de L(pvq) et L(pv-q), dont les nombres associés figurent dans les lignes suivantes, de cette manière:

N(Lp) = N(L(pvq)&L(pv-q)) = [N(L(pvq)), N(L(pv-q))] = [9.7BD.351, 6.E7B.A32] = F.FFF.B73

[25]On pourra constater également que N(L(pvq) satisfait aussi l'équation E11, associé à notre théorème T4. En effet:

N(L(pvq)) = (N(Lp), N(Lq), N(L(pvq)&-Lp&-Lq)) = (F.FFF.B73, F.FFF.7D5, 9.7BD.FFF) = 9.7BD.351

[26]On constatera que N(Cont p) = N(Cont-p). Notre fonction Cont p est, d'autre part, la même fonction Q utilisée par Lemmon and Gjersten en 1959 comme modalité primitive ou non définie pour offrir une axiomatisation alternative du système S5 de Lewis. Voir à ce propos dans FEYS [4], p. 121 cette axiomatisation alternative et constater que notre Cont p, mis à la place du Q de Lemmon and Gjersten, satisfait les axiomes, par exemple:

Cont p ↔ Cont -p

et Cont (p→q) → (-Cont p → p)

En effet, d'après notre définition de Cont p, nous avons les équivalences:

Cont (p→q) ↔ M(-pvq) & M(p&-q)

et (-Cont p → p) ↔ (Mp&M-p) v p

Le deuxième axiome ci-dessus pourra donc être écrit de la façon suivante:

-M(-pvq) v -M(p&-q) v Mp&M-p v p

Voici la démonstration arithmétique de cet axiome:

M(-pvq)	4		
-M(-pvq)	complément	F.FFF.FFB	
M(p&-q)	9.218.A3B		
-M(p&-q)	complément	6.DE7.5C4	
-M(-pvq) v -M(p&-q)	infime	6.DE7.5C0	
Mp	213		
M-p	48C		
Mp&M-p	suprême	69F	
-M(-pvq)v-M(p&-q)v(Mp&M-p)	infime	480	
p	3.333.333		
-M(-pvq)v-M(p&-q)v(Mp&M-p)vp	infime	0	q.e.d.

[27]On trouvera dans le Tableau VIII la démonstration arithmétique de deux théorèmes (le T14 et le T15) concernant l'implication stricte.

Tableau VIII.

[28]Voir, à propos de ce théorème T5, la note 5 ci-dessus.

[29]Notre T14 est un théorème du système T (et donc aussi de S5) qui figure comme T8 dans HUGHES and CRESSWELL [7], p. 37.

[30]Notre T15 est le T14 de HUGHES and CRESSWELL [7], p. 39.

[31]Notre T16 est le 1.17 c) de CHELLAS [2], p. 22.

[32]Notre T17 est le 1.17 d) de CHELLAS [2], p. 22.

[33]La possibilité de vérifier arithmétiquement qu'une formule n'est pas une thèse nous paraît un avantage de notre interprétation arithmétique de S5.

[34]Rappelons que Φ est associée à toute formule incompatible avec le système et que dans le cadre de formules de moins de 3 variables, Φ = F.FFF.FFF.

Bibliographie

[1] BLOK, W.J. and PIGOZZI, Don [1989]: Algebraizable logics in Memoirs of the American Mathematical Society, Volume 77, Number 396.

[2] CHELLAS, Brian F. [1980]: Modal Logic: An Introduction, Cambridge University Press.

[3] FEYS, Robert [1950]: "Les systèmes formalisés des modalités aristotéliciennes", Revue philosophique de Louvain, Nov. 1950, 16.1-16.24.

[4] FEYS, Robert [1965]: Modal Logics, Edited with some complements by Joseph Dopp, Louvain: E. Nauwelaerts; Paris: Gauthier-Villars.

[5] GÖDEL, Kurt [1933]: "Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls", Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, Heft 4, pp. 39-41.

[6] HILBERT, D. und ACKERMANN, W. [1949]: Grundzüge der theoretischen Logik, dritte, verbesserte Auflage, Berlin: Springer.

[7] HUGHES, G.E. and CRESSWELL, M.J. [1972]: An Introduction to Modal Logic, reprinted with corrections, London: Methuen.

[8] KNUUTTILA, S. (éd.) [1988]: Modern Modalities: Studies of the History of Modal Theories from Medieval Nominalism to Logical Positivism, Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

[9] KRIPKE, Saul A. [1959]: "A Completeness Theorem in Modal Logic", The Journal of Symbolic Logic, Volume 24, Number 1, pp. 1-14.

[10] LEWIS, C.I. and LANGFORD, C.H. [1959]: Symbolic Logic, Second Edition, New-York/London: Dover.

[11] PORTE, Jéan [1983]: "Axiomatisation and independence in S4 and S5", Reports in Mathematical Logic, 16, 23-33.

[12] PRIOR, A.N. [1956]: "Modality and Quantification in S5", The Journal of Symbolic Logic, Volume 21, Number 1, pp. 60-62.

[13] RASIOWA, Helena [1974]: An algebraic approach to non-classical logics, Amsterdam: North-Holland Publishing Company.

[14] SANCHEZ-MAZAS, Miguel [1977]: "Un modèle mathématique de la logique peut-il se fonder sur l'intension?", Actes de la Société helvétique des sciences naturelles, pp. 361-387.

[15] SANCHEZ-MAZAS, Miguel [1978]: "Modelli aritmetici per l'informatica giuridica", Informatica e Diritto, IV, 1, pp. 163-215.

[16] SANCHEZ-MAZAS, Miguel [1979]: "Simplification de l'arithmétisation leibnitienne de la syllogistique par l'expression arithmétique de la notion intensionnelle du 'Non Ens'" in Albert Heinekamp und Franz Schupp (hersg.), Die intensionale Logik bei Leibniz und in der Gegenwart, Wiesbaden: Steiner, pp. 46-58.

[17] SANCHEZ-MAZAS, Miguel [1981]: "Un modelo aritmético de la silogística" in Lógica, Epistemología y Teoría de la Ciencia, Actas del Seminario del I.N.C.I.E., Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia, pp. 35-53.

[18] SANCHEZ-MAZAS, Miguel [1982]: "Algebraic and Arithmetical Translations of Normative Systems and Applications in Legal Informatics" in A.A. Martino (ed.), Deontic Logic, Computational Linguistics and Legal Information Systems, Amsterdam: North Holland Publishing Company, Vol. II, pp. 169-201.

[19] SANCHEZ-MAZAS, Miguel [1984]: "An arithmetic model for modal logic (Feys's T system and Von Wright's M systems", Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic, Florence, Italy, 1982, The Journal of Symbolic Logic (abstract), Vol. 49, N. 2, pp. 704-705.

[20] SANCHEZ-MAZAS, Miguel [1986]: "The 'Ars Judicandi' Programme", in A.A. Martino, F. Socci Natali (eds.), Automated Analysis of Legal Texts: Logic, Informatics, Law, Amsterdam: North-Holland Publishing Company, pp. 773-819.

[21] SANCHEZ-MAZAS, Miguel [1987]: "Une nouvelle méthode arithmétique de décision immédiate pour la logique déontique", Revue européenne des sciences sociales, Tome XXV, Nº 77, pp. 75-113.

[22] SANCHEZ-MAZAS, Miguel [1988]: "Un lenguaje aritmético como instrumento de análisis y de decisión en Lógica y en Derecho", Actas del III Congreso de Lenguajes Naturales y Lenguajes Formales (Sitges, Barcelona, 28.9-2.10.1987), Universitat de Barcelona, Secció de Lingüística General, pp. 105-170.

[23] SANCHEZ-MAZAS, Miguel [1989]: "Identification et analyse des classes d'équivalence de la logique modale par des invariants numériques: une nouvelle méthode de décision", Logique et Analyse, Nº 120.

[24] WHITEHEAD, A.N. and RUSSELL, B. [1970]: Principia Mathematica (to *56), Second Edition, reprinted, Cambridge University Press.

[25] WRIGHT, G.H. von [1951]: An Essay in Modal Logic, North-Holland.

** Centro de Análisis, Lógica e Informática Jurídica (CALIJ)
Universidad del País Vasco
Apartado 1.563, 20080 SAN SEBASTIAN (SPAIN).