

LA MATEMÁTICA, ¿INCOMPLETA, ALEATORIA, EXPERIMENTAL?

CONSIDERACIONES SOBRE ALGUNAS CONSECUENCIAS DE DISTINTAS VERSIONES DEL TEOREMA DE INCOMPLETUD DE GÖDEL

Javier de LORENZO*

En 1931 Gödel publica su Teorema de incompletud. Resultado clave en Lógica matemática, se interpretó como una limitación de los formalismos, un fracaso del Programa de Hilbert. Sin embargo, el método de aritmetización, la recursividad han propiciado una visión positiva y la creación de nuevas teorías —Teorías de la Complejidad, de Información algorítmica...—. Con ellas, nuevas demostraciones del teorema y, consecuentes, nuevas discusiones en Filosofía de la Matemática. En especial, desde la Teoría de la Complejidad. Además de incompleta, la Matemática se ve por algunos como aleatoria y experimental. En este ensayo se pretende explicitar los supuestos de estas interpretaciones. Discusión que conduce, en principio, a su rechazo, dejando abierta la problemática sobre el aspecto epistemológico del razonamiento matemático.

§1. EL TEOREMA Y SUS VERSIONES

Manteniendo como carácter de la demostración o derivación lógica el proceder etapa tras etapa, sin lagunas, sin intromisión de elemento intuitivo, psicológico o conceptual alguno, pero invirtiendo la afirmación fregeana de que no importa la longitud de tales derivaciones en el sentido de que las mismas no tienen por qué medirse con la vara, los resultados de indecidibilidad han hecho surgir otra problemática: la complejidad de las demostraciones. No ya para las proposiciones indecidibles, sino para las decidibles. Estas, según lo que se entienda por complejidad de la demostración, pueden clasificarse en 'prácticamente decidibles' —si pueden ser resueltas en un tiempo o espacio polinómicos, es decir, en tiempo o espacio del tipo cn^k para las constantes dadas c y k , con n la longitud del input o programa— y en 'prácticamente indecidibles' —si sólo pueden ser resueltas en tiempo o espacio exponencial—. Frente a la creencia de Frege, frente a la no visión de Hilbert de que en la finitud derivativa se incardinaba un problema, resulta que la decidibilidad teórica puede convertirse en indecidibilidad práctica en cuanto a una de las claves adoptadas en el marco de logificación fundacional del hacer matemático.

La cuestión de la complejidad ha conducido a tratar el primer teorema de incompletud de Gödel y alguna de sus consecuencias desde el enfoque de la Teoría de la Información Algorítmica. En versión puramente clásica ha dado

paso a desarrollos conceptuales, matemáticos, con implicaciones en teorías como la Teoría de la Información, de Computabilidad, o en Computación, Inteligencia Artificial... Junto a estos desarrollos internos que, en lo que sigue, calificaré de *Versión apolínea*, algunos autores han tratado de trasvasarlos a lo que calificaré de Filosofía de la Matemática y, mediante una interpretación que calificaré de *Versión dramática*, pretenden romper la imagen formalista, deductivo-sintáctica del marco en el que se mueven. La imagen clásica, desde lo dramático, adopta la identificación de la Teoría de la recursividad a los fenómenos mecánicos, enfocando esta teoría como la materialización actual del Mecanicismo, dado que la misma maneja procesos discretos pero deterministas. Bien entendido que sin confundir la Computabilidad o recursividad de la que aquí se va a tratar, con la Computación práctica. Entre estos autores cabe destacar a Chaitin quien parece jugar con las nociones de complejidad y obtener una interpretación dramática a través del caos y la aleatoriedad de los teoremas de incompletud.

A. COMPLEJIDAD O ENTROPÍA: VERSIÓN APOLÍNEA

Cuál sea la medida de la complejidad de la demostración de una configuración en un sistema formal F ya supone un primer reto electivo. Gödel en *Sobre la longitud de las demostraciones* (1936) toma la longitud como el número de líneas que tiene la demostración. Posteriormente adoptará el número de símbolos que intervienen en cada una de las fórmulas de la sucesión derivación. Como señala Parith (1986) la adopción de uno u otro criterio no es inocuo: no es lo mismo tomar la longitud de una derivación como el número de líneas que la constituyen, a considerar como tal longitud su número de símbolos —variables, parámetros, cuantificadores.— o, de modo equivalente, su número gödeliano en una u otra aritmetización. Y ello porque cabe realizar axiomatizaciones arbitrarias de teorías recursivamente enumerables —en adelante r.e.—, como la misma Aritmética de primer orden, PA, tales que todos los teoremas tengan demostraciones con un máximo de tres líneas... y la complejidad, en todas, la misma por lo que el criterio, como tal, desaparece. Por otro lado, según sea la formalización elegida —que el lenguaje para F se adopte con o sin símbolos de función, por ejemplo— se tendrá que la longitud de las derivaciones puede quedar acotada o no por lo que el criterio de medida de la complejidad es función del lenguaje elegido para la formalización y, por ello, no es criterio absoluto. La caracterización de la medida de la complejidad se presenta como problemática porque el concepto problemático es, por principio, el propio de complejidad. (Margenstern 1989-2, cap. 7).

Intentando paliar alguna de las dificultades señaladas, aceptado el marco de logificación sintáctica fundacional, se adopta, en Teoría de la Complejidad, no ya el sistema formal F y, consecuentemente, las derivaciones formales sintácticas fórmula a fórmula, sino el conjunto r.e. de sus teoremas. Es decir, se identifica F con el conjunto numérico r.e. de sus teoremas, conjunto

obtenido de las configuraciones sintácticas de F vía gödelización en aritmetización binaria. De esta manera la complejidad de una demostración vendrá en función de los inputs necesarios para establecer la configuración dada. Si esa computabilidad se hace en términos de máquinas-Turing, la terminología a usar será la de tales máquinas, aunque por la Tesis Church-Turing se acepte que puede establecerse en cualquier otra versión equivalente —lambda-cálculos, máquinas registradoras, funciones recursivas...—.

Con estos supuestos, y desde la Teoría de la Información Algorítmica, la complejidad se establece en términos de la longitud del programa más corto mediante una aritmetización binaria. Es lo que se plasma en la definición siguiente:

Sea U una máquina universal Turing apropiada, x una configuración finita binaria denotada por $|x|$ y f una función parcial recursiva con número de Gödel asociado n . La complejidad K de x respecto a la función f será

$$K(x) = \begin{cases} |p| & \text{si } p \text{ es el input más corto tal que } f(p)=x \\ \infty & \text{si no hay un input tal que } f(p)=x \end{cases}$$

La máquina-Turing universal U se especifica de manera que para los inputs de la forma 0^n1p —sucesión de n ceros seguida de un 1 y de la configuración p — simule la acción de f sobre p . Fijada U y una aritmetización gödeliana binaria, $K_U(x)$ es lo que se llama *complejidad-Kolmogorov de x* o simplemente *complejidad de x* . En lugar de inputs cabe hablar de programas.

Es la caracterización de complejidad que Kolmogorov calificó como descriptiva. Pretende captar el *contenido de información individual* es decir, reflejar como medida la dificultad de especificar, describir o calcular un objeto individual, atendiendo a la longitud de su aritmetización binaria más corta, atendiendo a la menor descripción de x en términos de los programas que lo imprimen a partir de un input fijado como, por ejemplo, 0. Al ser una caracterización por la propiedad 'más corto', la complejidad puede ser establecida en términos de funciones recursivas mediante el operador de minimalización como

$$K(x) = \mu e(f_e(0)=x)$$

donde e es el índice o código de la función parcial recursiva f .

En esta línea, y por mencionar alguno de los resultados básicos, en la década de los 70, Solomonoff y Kolmogorov, de modo independiente, lograron demostrar el teorema de invariancia: la complejidad descriptiva es independiente de la máquina-Turing universal elegida. Por ello vale la identificación $K(x)=K_U(x)$.

Por su lado, Levin demostró lo que calificar ley de conservación de la información: la cantidad de información que una sucesión A puede dar de otra B no puede crecer significativamente por un proceso algorítmico.

Sin entrar en más detalles, se puede establecer la formulación del Teorema de incompletud de Gödel, ahora en su versión Algorítmico-informacional:

- (1) Para todo sistema formal F consistente y válido para la Aritmética —identificado con su conjunto r.e. de teoremas— existe una constante c_F tal que para toda configuración finita binaria x de F, se tiene
- $$\neg(F \vdash c_F < K(x)).$$

Como sistema formal F puede tomarse PA, de primer orden, en cuyo caso la formulación del teorema queda en los términos

- (1') Existe una constante c tal que en PA no se pueden demostrar proposiciones que tengan la forma $c < K(x)$.

Teniendo en cuenta que en F los axiomas se interpretan como una configuración finita —basta una concatenación sintáctica— y que las reglas de inferencia constituyen realmente algoritmos para la enumeración de los teoremas a partir de los axiomas, lo que asegura el teorema, desde esta formulación, es que en el interior de F una configuración especificada que tenga una complejidad mayor que la complejidad asociada a los axiomas —y que viene dada por la constante c_F en F y por c en PA— no puede ser demostrada. En términos clásicos se decía que la configuración era indecidible.

Junto a la interpretación anterior, cabe afirmar que el teorema gödeliano, aceptado el concepto de complejidad informacional anterior, establece que a cada teoría o sistema formal —identificado con su conjunto r.e. de teoremas, ahora convertidos en números binarios vía aritmetización gödeliana— se le puede asociar un programa de complejidad informacional dada k que no se detiene sobre ninguna sucesión binaria de complejidad mayor que una constante dada. Y ello sin que esta proposición pueda ser demostrada en el interior de F.

Es una segunda interpretación que liga los problemas de decisión con los problemas de parada. Problema de parada que engloba, realmente, la esencia de los problemas r.e como señalara Börger en 1976 (Börger, 1989: 70).

Ambas interpretaciones lo que avalan es que en los sistemas formales se tiene una serie de proposiciones indecidibles, serie sobre la cual el conocimiento que se puede obtener viene limitado, de modo esencial, por el tamaño del sistema axiomático elegido. Limitación por la cual el proceso deductivo no puede aportar información adicional alguna. En otras palabras, el teorema de indecidibilidad indica que la indecidibilidad viene dada, en cierta manera, por una constante asociada al sistema de axiomas elegido, constante que mide su amplitud o complejidad algorítmica.

En este punto, y sin entrar en el interés que un tema como el de la complejidad muestra como hacer matemático intrínseco, en enlace con un hacer computacional, lo que me interesa destacar es el hecho de que la complejidad o contenido informacional local, individual y no global, viene establecida considerando la mínima longitud de los axiomas de partida. Es decir, para su manejo y, fundamentalmente, para sus interpretaciones, se Exige:

- Formalización sintáctica de F con sus axiomas, suponiendo, claro está, su validez en el caso de PA;
- Aritmetización gödeliana, ahora binaria;
- Manejo mediante máquinas-Turing —o cualquier otro proceso equivalente—,
- Establecimiento de la longitud de la configuración más corta asociada a la concatenación sintáctica de los axiomas y de la derivación formal de una configuración como el criterio de medida de la complejidad.

Son exigencias que posibilitan calificar a la función K asociada de **entropía**, contenido informacional local o individual, complejidad descriptiva o autorreferente. En cualquier caso, lo que se observa es que la complejidad así definida se liga con la mínima longitud de las configuraciones obtenidas a partir de la complejidad de los axiomas. Y es a lo que se pretende calificar como medida de dificultad de la demostración sin que en ella intervenga, para nada, el contenido conceptual de la misma, reducido F a un conjunto numérico r.e, el de sus teoremas vía aritmetización gödeliana.

Una primera observación: en el hacer matemático lo que importa —si es que este hecho auténticamente importa algo— no es la complejidad en sí de los axiomas, sino básicamente la dificultad de las demostraciones. En cualquier caso, en la práctica del trabajador matemático no parece que exista relación alguna entre el contenido conceptual de un teorema y la dificultad como longitud de la demostración del mismo. En Matemática hay proposiciones que, conceptualmente, muestran una gran dificultad y, sin embargo, su demostración se hace, a veces, trivial mientras que, por el contrario, hay proposiciones aparentemente elementales que exigen, para su demostración, una maquinaria potentísima y el recurso a campos, en ocasiones, muy alejados de aquél al que esa proposición ‘elemental’ pertenece. Recurso que exige de la analogía, del poder comparativo que tenga el matemático que lo hace, del saber conceptual en suma y no de unos procesos sintácticos o exclusivamente algorítmicos. Precisamente el manejo de las funciones recursivas, funciones aritméticas de N^k en N , es el que posibilita plantear problemas muy fáciles de comprender pero muy difíciles de demostrar... Desde esta perspectiva, el llamado contenido informacional individual, complejidad o entropía, no parece muy ligado al contenido conceptual que el matemático maneja, de hecho, en cada uno de sus campos de trabajo.

Aparte de su interés intrínseco teórico donde, insisto, se plantean temas como el de los grados de complejidad no-determinísticos o los de acotación o m-completud..., este terreno se muestra como apto para la posibilidad de comunicación de hechos como el de poseer una demostración de un teorema, por ejemplo, sin dar información alguna del contenido de dicho teorema ni de la estructura de la demostración. Más general, es un terreno apto para la comunicación de actividades demostrativas —siempre que sean aritmetizables— sin informar para nada de cuáles sean los contenidos de tales actividades, contenido que podrá intentar descifrarse, posteriormente. Terreno válido, por ello, para su manejo no sólo en el terreno sintáctico formal, sino en campos como el criptográfico, sistemas de comunicación privados, interacciones o transacciones financieras...

Tema de estudio matemático junto al informacional, pero no base fundacional para dicho hacer. Campo de estudio que permite reafirmar tanto el *ars iudicandi* leibniziano de búsqueda de algoritmos para tomar decisiones correctas, como el *ars inveniendi* de búsqueda de algoritmos para establecer las clases de todas las soluciones que puedan darse a problemas arbitrarios. Lo que puede implicar una ayuda heurística en algunos casos. Así, saber que la clase NP encierra gran cantidad de problemas de complejidad maximal posibilita indicar que los mismos sólo podrán resolverse restringiendo su generalidad...

Que el matemático trabaja teniendo en cuenta el contenido de su hacer y no ocultando el mismo; que sólo resolviendo problemas de alcance particular, restringido, puede alcanzar la capacidad de plantear y resolver problemas de carácter más general —idea ya expresada por Hilbert—; que la complejidad tal como ha sido definida no es sino tema muy tangencial en cuanto al proceso práctico matemático son intuiciones que, en cierto sentido, vienen confirmadas en un ensayo, más formal, de van Lambalgen (1989).

En él, comparando la formulación clásica con la versión algorítmico-informacional del teorema de incompletud se observa, entre otras diferencias, que ambos muestran aspectos diametralmente opuestos en cuanto a su enfoque constructivo: la versión clásica establece explícitamente una fórmula indecidible, mientras que la algorítmico-informacional no puede hacer tal cosa; de aquí que más que una versión ampliada del teorema quepa considerarla como una versión más débil del mismo. Lo que me interesa destacar —además de la nota anterior y de que la versión (1) no es aceptable desde un enfoque intuicionista— es la demostración de van Lambalgen de que la constante c_F no pueda identificarse con el contenido informacional del sistema de axiomas de la teoría formal F . Demostración apoyada en teoremas clásicos de Kreisel y Levy, por la que existe una colección C infinita de teorías aritméticas F esencialmente diferentes para las cuales no hay relación interesante entre el contenido informacional o complejidad de F y el minimal c_F tal que, para todo x , $\neg(F \vdash_{c_F} K(x))$. Demostración que conduce a van Lambalgen a la conclusión:

La complejidad de los axiomas no es una buena medida de información (p. 1395).

Versión dramática: El caos

Partiendo del Teorema de Gödel, en lectura equivalente a la de Kolmogorov y en paralelo a la sugerencia de Börger de establecer un isomorfismo entre el problema de parada y los problemas r.e. y, con ellos, con los problemas de decisión, aunque indique que sus ideas son independientes, Chaitin va a intentar un más allá en cuanto a las interpretaciones del mismo. Interpretaciones adornadas, en algunos casos, con llamadas a la divinidad o con exclamaciones como la de que el Teorema de incompletud, tal como ha sido formulado en (1), es

una versión dramática del teorema de Gödel.

Para Chaitin la Matemática no sólo es incompleta sino aleatoria, lo que implica, por la contraposición entre azar y determinismo, que la Matemática es indeterminista. Azar apoyado en el concepto de entropía o aleatoriedad de Chaitin-Kolmogorov y que se va a ligar con las configuraciones de longitud x cuya complejidad $K(x)$ sea aproximadamente x . Concepto que se caracteriza en términos como los siguientes:

Un número es aleatorio cuando su descripción más breve tiene un número de bits sensiblemente mayor que el propio número. Una sucesión de números será aleatoria si todo algoritmo que la engendre es de longitud superior a la propia sucesión. En otras palabras:

Un número x y el objeto codificado por él se denomina **aleatorio** si x es su descripción más corta, es decir, si $x \leq K(x)$.

Consecuencia de las definiciones resulta que el conjunto de números no-aleatorios es *simple*, es decir, es r.e. y su complementario es infinito y no contiene subconjuntos r.e. infinitos. En otros términos, es r.e. y su complementario es *immune*. Aún más, ese conjunto de números no-aleatorios es efectivamente simple y, por ello, T-completo.

Por ser immune el conjunto de números no-aleatorios —y es uno de los resultados centrales, en versión clásica, no dramática—, resulta que puede obtenerse el Teorema de incompletud de cualquier sistema formal F consistente, y válido para PA. Basta observar que en F un número aleatorio sólo viene dado en cantidad finita de casos porque el conjunto de números aleatorios demostrables es r.e. (Cfr. Odifreddi 1989: 263).

Hay que observar —siguiendo a Chaitin (1982)— que la definición antes indicada de complejidad K o contenido de información algorítmica de x venía dada en términos de la longitud del menor programa que permitiera calcular x . A partir de esta definición —y alguna de las consecuencias que he indicado— se tiene que muchas configuraciones x , cuya expresión binaria tenga

una longitud de n bits, poseen una complejidad $K(x)$ aproximadamente igual a su longitud n más $K(x)$, es decir, n más la información algorítmica contenida en el numeral binario para n . Y ello viene a ser igual a n más un valor del orden de $\log n$. Ello implica que ninguna configuración x de longitud de n bits posee un contenido de información, una complejidad mayor que éste. Y es aquí donde se establece la frontera entre lo aleatorio o caótico y lo regular: aquellas configuraciones x , de amplitud dada, que poseen un valor o contenido de información algorítmico mayor se las va a calificar de aleatorias; las que poseen un contenido de información algorítmico menor, de regulares. Y esta frontera es la que permite formular a Chaitin una versión del Teorema de incompletud en palabras como

no podemos descubrir un número de complejidad mayor que n por cualquier proceso de complejidad menor que n .

Aleatoriedad algorítmica que, según Chaitin, se encuentra cercana a las nociones intuitivas que llevan nombre parecido, a saber: objeto caótico, sin estructura o modelo discernible, sin caracteres distinguidos, con información irreducible... Proximidad terminológica que propicia su identificación conceptual, por lo que una configuración x que sea menor que $K(x)$ se dirá no sólo aleatoria, sino caótica...

Basta observar que lo anterior no es más que una lectura **dramática** del teorema (1) por el que una configuración aleatoria o caótica no vendría a ser otra cosa que una proposición indecidible, por supuesto que no en sí, sino respecto a un F dado y en las condiciones sintácticas dadas... Lectura dramática consecuencia, también, del Teorema de Rice que establece que cualquier propiedad no trivial de las funciones parciales recursivas es indecidible. Lo cual significa, en lectura apolínea, que no se puede predecir, de modo global, la conducta de un mecanismo, si se entiende por ello que cada input viene gobernado por una regla mecánica. Lo cual no implica que no pueda realizarse tal predicción conductual de modo local.

El concepto de configuración aleatoria es lo que desde Kolmogorov y Solomonoff, a mediados de los setenta, se indica con la expresión de configuración, número o sucesión *incomprimible*: aquella que no puede comprimirse en un programa o sucesión de bits más breve que él mismo. Por un ejemplo clásico: la extracción al azar de los números en el bombo de la lotería es aleatoria o incomprimible algorítmicamente ya que la información de esta sucesión sólo se obtiene mostrándola en su totalidad. (Cfr. Chaitin 1988).

La aleatoriedad o entropía de Chaitin-Kolmogorov se pretende un invariante que proporciona la definición de un fenómeno aleatorio y ello porque, en principio, parece indicar si una sucesión es más o menos comprimible que otra, si es más o menos aleatoria que otra. Es decir, se pretende que sirva como criterio para evaluar el grado de aleatoriedad

—aunque sea relativo— de una sucesión dada en comparación al de otra configuración también dada. Es lo que posibilitaría una medida relativa de dicha aleatoriedad, a pesar de la ley de conservación demostrada por Levin.

Como el concepto de aleatoriedad, en el fondo, no es otra cosa que una lectura del Teorema de incompletud, Chaitin da otra demostración —que es lo más original de su trabajo— pero ahora desde el enlace con el problema de parada. Para ello parte del teorema de Turing que establece que el problema de parada en una máquina-Turing universal es indecidible:

No hay algoritmo recursivo, no hay máquina-Turing que decida si una máquina-Turing universal se para o no sobre argumentos dados.

Admitido el Teorema de Turing, se obtiene el de incompletud de modo inmediato en dos fases.

Si fuera posible demostrar que unos programas particulares se paran o no, y dado que el conjunto de teoremas es r.e., se podría utilizar este hecho para resolver el problema de parada para cualquier programa particular enumerando todos los programas hasta llegar al programa dado. Pero ello contradice la insolubilidad del problema de parada, establecida por el Teorema de Turing. Consecuentemente, hay programas indecidibles.

Consecuencia inmediata: la propiedad de aleatoriedad de los números (las sucesiones) sólo puede ser probada en F para aquellos números (sucesiones) cuya complejidad de información sea menor o igual que la constante asociada al sistema formal F, que la complejidad de F. Y ello entraña la incompletud de F, dado que el conjunto de números aleatorios es inmune.

La demostración de Chaitin y su versión la calificaré como versión de indecidibilidad por problema de parada. A ella hace referencia Chaitin como «mi teorema de incompletud» (1982: 307).

Para establecer el enlace entre el problema de parada y el teorema de incompletud, Chaitin crea un elemento universal Ω , del que llega a exclamar que es «un fascinante número real aleatorio», definido «algorítmicamente entre uno y cero» (*id.*). Omega es un objeto adecuado

para ser honrado por cultistas místicos, porque como Charles Bennett ha argumentado persuasivamente, en un sentido omega contiene todas las verdades constructivas matemáticas, y las expresa tan concisa y compactamente como es posible (*id.*).

Y se hace llamada a un ensayo de Martin Gardner de 1979 (versión española Gardner 1980).

El elemento Ω , en el fondo, es la probabilidad de parada de una máquina-Turing universal. Para su caracterización se parte de algoritmos f tales que satisfagan la condición ' $\langle p \mid f(p) \text{ se para} \rangle$ es prefijo', donde por

prefijo se entiende que ninguna configuración sea segmento inicial de cualquier otra. A partir de aquí se define

$$\Omega = \langle 2^{-|p|} \mid U(p) \text{ se para} \rangle$$

siendo U un algoritmo universal previamente dado.

Omega puede ser representado como el límite de una sucesión computable decreciente de números racionales. Su n -simo bit es entonces el límite, cuando T tiende al infinito, de una función computable de n y T . Con lo cual el n -simo bit de omega puede venir expresado en la forma

(2) Existe X para todo Y (predicado computable de X, Y y n)

Todo ello implica que, aun cuando Ω pueda ser definido con exactitud, no es posible computar sus cifras decimales, porque esa computación viene dada, precisamente, por el problema de parada, que es indecidible. Como consecuencia, al Teorema de Turing le corresponde, en Teoría de la Información Algorítmica, el Teorema de que el desarrollo binario de Ω es algorítmicamente aleatorio.

No puedo evitar reproducir, aquí, y antes de continuar, la exclamación de Chaitin, tras la relación (2) anterior:

El completo caos está sólo dos cuantificadores fuera de la computabilidad (*id.*)

B. ECUACIONES DIOFÁNTICAS: VERSIÓN APOLÍNEA

Para remarcar la aleatoriedad o el caos, Chaitin acude a otra vertiente de los conjuntos r.e. Vertiente que, antes de pasar a su interpretación dramática, conviene precisar.

Como problema Diez de su alocución al Segundo Congreso Internacional de Matemáticos de París, 1900, Hilbert plantea la decidibilidad o no de la resolubilidad de las ecuaciones diofánticas: si existe o no un algoritmo que permita decidir dicha resolubilidad. En el intento de respuesta, además de precisar los términos utilizados por Hilbert, se han ido estableciendo unos resultados que culminarán en los dos siguientes, fundamentales:

Davis-Putnam-Robinson (1961) demuestran que todo predicado o relación r.e. es exponencial diofántico; de otra manera, los predicados r.e. son expresiones existenciales sobre polinomios, son de la forma

$$\exists y (P_1(x,y) = P_2(x,y))$$

con P_i polinomios con coeficientes y variables en \mathbb{N} , polinomios en los cuales intervienen exponenciales.

Matijasevic (1971) demostrará que la relación exponencial $y=2^x$ es diofántica.

Dos consecuencias centrales, e inmediatas, de ambos teoremas, son:

1. Todo conjunto r.e. es diofántico —la recíproca, inmediata.

Es decir, todo conjunto r.e. W puede ser representado en la forma:

$$x \in W \text{ ssi } \exists z P(x,z)=0$$

con P polinomio con coeficientes y variables en \mathbb{N} .

2. No existe algoritmo alguno para decidir la resolubilidad o no de las ecuaciones diofánticas.

Para ello basta tener en cuenta el teorema que establece la existencia de conjuntos recursivos que no son r.e.

Con ello, la respuesta al Problema 10, dada: la resolubilidad de las ecuaciones diofánticas es indecidible. Más aún: Como hay ecuaciones diofánticas insolubles, la Aritmética es indecidible. Y como toda teoría consistente y completa es decidible, se obtiene que la Aritmética, supuesto que sea consistente, es incompleta. Se tiene, así, otra demostración del Teorema de incompletud de la aritmética.

Siguiendo esta línea, se observa que los conjuntos r.e. W_1, W_2, \dots pueden ser numerados de forma que la enumeración sea efectiva. De aquí resulta que la relación $x \in W_n$ también es r.e. Consecuencia del Teorema 1. de Matijasevic, existe un polinomio diofántico U tal que para todo x y todo n se tiene

$$(3) \quad x \in W_n \text{ ssi } \exists z U(x,n,z) = 0$$

con U polinomio fijo con coeficientes naturales, teniendo la ecuación $U=0$ soluciones en las incógnitas z . Si se cambia el valor del parámetro n , el polinomio U pasa a definir todo conjunto r.e. y de esta forma se convierte en un polinomio universal análogo a la máquina-Turing universal, por lo que puede estimarse $U=0$ como la ecuación diofántica universal.

En otras palabras, tiene que existir un conjunto universal U dado de la forma

$$U = \langle x \mid U(k,x,z)=0 \text{ resoluble en } z \rangle$$

para alguna constante k determinada por F .

Hasta aquí, por el problema de Hilbert, el enlace entre las ecuaciones diofánticas y la recursividad. Enlace que permite tanto la respuesta a dicho

problema como otra demostración de la indecidibilidad e incompletud de la Aritmética.

Vía gödelización, cabe establecer ahora el enlace entre un sistema formal sintáctico y la recursividad. Enlace que permite interpretar el problema de las ecuaciones diofánticas en los sistemas formales. Así, se puede afirmar que cualquier demostración matemática formalizada para una x de F se reduce a la ejecución de un número determinado de operaciones aritméticas —sumas y multiplicaciones— (Cfr. Jones 1978:338):

Por la gödelización, F se ha identificado con el conjunto r.e. de números de sus teoremas. Por r.e., este conjunto ha de ser uno de los W_n . De aquí que, dada una proposición de F con número gödeliano x , se tendrá

$$(4) \quad F \vdash x \text{ ssi } x \in W_n \text{ ssi } \exists z U(x,n,z) = 0$$

He indicado que es el Teorema 1. de Matijasevic el que asegura la existencia del polinomio universal U . Establecer, en la práctica, dicho polinomio, resulta difícil. Jones (1978) da uno con 36 ecuaciones de grado menor o igual a 38 con 67 incógnitas que, reducido a ecuación única, obliga a que ésta posea grado 76. Ecuación universal diofántica que Jones conseguirá reducir a una de 58 incógnitas y grado 4, según línea marcada por Matijasevic (Jones 1982).

Naturalmente, el problema de manejar este polinomio: la complejidad del mismo. Complejidad que va a constituir, precisamente, el dato de una cota superior de la complejidad de las demostraciones matemáticas en un sistema formal F por la relación (4).

Cómo caracterizar tal complejidad vuelve a ser problema de partida: se puede hacer atendiendo bien al número total de líneas impresas, bien al número total de caracteres impresos, al número total de incógnitas, al del grado total, al par incógnitas-grado... Jones que ha manejado como complejidad el par incógnita-grado, pasa a elegir el menor número total de operaciones necesarias para evaluar el polinomio. Número que consigue reducir, en 1982, a 100. De momento, es 100 el número de adiciones y multiplicaciones que bastan para determinar si se cumple o no que $x \in W_n$ en (3) y es la cota superior de la complejidad de una demostración en F por (4).

Como consecuencia: para cualquier F y cualquier proposición x de F , si hay una derivación de x en F , entonces hay una demostración que consta, como mucho, de cien adiciones y multiplicaciones de enteros.

El número de operaciones va asociado, en una ecuación diofántica, al número de símbolos que se requieren para escribir la ecuación. Sin embargo, desde cierto punto de vista de la Teoría de números, quizá importe más la complejidad en cuanto al grado, dado que las incógnitas pueden ser eliminadas por sustitución. Desde este enfoque, se obtiene que las ecuaciones diofánticas de grado 2 son decidibles, definen únicamente conjuntos recursivos. Las de grado 4 y mayor son indecidibles —son aquellas para las cuales Jones establece resultados como los anteriores, sabiendo que toda ecuación diofántica es

reducible a una de grado 4—. Queda abierto, como problema, la insolubilidad o no de las ecuaciones de grado 3.

Versión dramática: El principio de incertidumbre

He indicado que Chaitin acude a este enfoque dotándole de una interpretación propia, al igual que lo hiciera con el enlace indecidibilidad y caos. De la ecuación diofántica universal, y desde la Teoría de la Complejidad, afirmará:

$Q=Q'$ tiene soluciones finitas o infinitas dependiendo de si el n -ésimo bit del desarrollo decimal del problema de parada omega es cero o uno. $Q=Q'$ es una ecuación bastante notable, que muestra que hay un tipo de principio de incertidumbre aun en la matemática pura, de hecho, aun en la teoría total de números (1987:131).

Y al principio de incertidumbre, según el cual la ecuación universal diofántica tiene soluciones finitas o infinitas según el desarrollo decimal de omega —imposible, por indecidible— se agrega el caos. Tras la exposición de una ecuación diofántica exponencial que requiere, para su caracterización, de 900.000 caracteres y 17.000 variables, indicará que esa ecuación es absolutamente intratable. Agrega

Tales ecuaciones escapan al poder del razonamiento matemático. Esta es una región donde la verdad matemática no tiene estructura o modelo discernible y aparece como absolutamente aleatoria. Estas ecuaciones están más allá del poder del razonamiento humano. Los matemáticos no pueden traficar con ellas... (1987:160)

Lo que uno ve es que una ecuación de este tipo es, relativamente, intratable. Basta manejarla en su aspecto 'normal' —como hacen Jones o Matijasevic— para tratar de reducir tanto el número de incógnitas como el grado de la ecuación diofántica universal. Aspecto 'normal' o no que depende, en parte, del tipo de escritura. Recuerdo, aquí, la *boutade* de Poincaré —retomada, pero en serio, por Godement en su *Algebra*— de que los logicistas requieren de varios cientos de miles de signos o caracteres para mostrar el número uno; y ello hace, evidentemente, intratable radicalmente no ya la Aritmética sino el proceso de contar, aunque, evidentemente también, el niño puede llegar a contar a pesar de la 'matemática moderna'... Lo que cabe observar es que no parece lícito identificar la incapacidad de manejar un cálculo bajo una escritura determinada con la aleatoriedad o caos de tal

cálculo, y sacar como consecuencia la impotencia del razonamiento matemático...

El resultado que Chaitin estima central, junto a la definición de su Ω , que las sucesiones aleatorias son definibles Σ_2 en la jerarquía aritmética —es la expresión (2)— puede obtenerse vía recursividad clásica y aleatoriedad en el sentido de Martin-Löf: es un resultado demostrado por van Lambalgen (1989:1396-7). Lo que indica, por otro lado, que el carácter aleatorio atribuido a las sucesiones de longitud x cuya complejidad es aproximadamente x , es más bien atípico y no hace más que reafirmar la convicción de que las mismas no son 'realmente' aleatorias, salvo en el nombre, porque no vienen apoyadas en criterios auténticamente estadísticos. Trivialidad y convicción que a van Lambalgen le llevan a escribir

Una aplicación de las ideas de la teoría de la información en este contexto podría conducir presumiblemente a la conclusión de que el contenido de la información de un teorema tiene que ser medido por su demostración más simple (id. 1397-8).

Y ya he indicado las reservas que, en este campo, hay que tener al señalar que el concepto de medida de la complejidad no es intrínseco sino dependiente de la formalización elegida. Sin aparente ironía, el mismo Chaitin reconoce:

omega tiene el muy serio problema de que lleva demasiado tiempo deducir teoremas de él... ¡Por ideal, el axioma matemático perfecto es de hecho inútil! (1982:307)

Como el enfoque algorítmico informacional no es constructivo, todo lo que se pretende es tratar de medir la potencia de F en términos de su tamaño en bits binarios del programa más pequeño cuyo programa de parada es indecidible, dentro del propio sistema formal axiomatizado, pero sin posibilidad de establecer alguna proposición que se muestre indecidible.

C. LO EXPERIMENTAL

Al no ser comprimibles las proposiciones matemáticas irreducibles a un sistema más breve que tales proposiciones, Chaitin propone una solución pragmática en línea de Gödel: agregar como nuevo axioma la proposición indecidible al sistema de partida. Y esta idea le lleva a sostener que el hacer matemático se identifica con el hacer experimental del científico:

Quizá la teoría de números pueda ser proseguida más abiertamente en el espíritu de la ciencia experimental (1982:301).

Lo que quizá pueda resumirse en la expresión: Para probar más se debe suponer, algunas veces, más.

Como conclusión, además de que la Matemática es incompleta y aleatoria o caótica e indeterminista, ahora hay que estimarla como experimental. Y ello porque habrá que ir aumentando el sistema de axiomas dado mediante nuevos axiomas elegidos con cuidado, con la condición pragmática de que sean fértiles aunque no posean, en algún momento, grado de evidencia alguno. Criterio de elección dictado por lo experimental en el sentido de sometimiento a prueba en una serie de casos (1988:49-50). Así, la potencia del sistema terminará guiándose por la fertilidad, por el cúmulo de teoremas que se consiga derivar. Y aquí exclama:

La cuestión real es ésta: ¿Es el teorema de Gödel un mandato para la revolución, la anarquía y el libertinaje? ¿Puede uno abandonar después de dos penosos meses intentando probar un teorema, y agregarlo como nuevo axioma? (id.: 308).

Chaitin adopta el criterio de someter a prueba unas proposiciones convirtiéndolas en nuevos axiomas y este sometimiento lo identifica con la idea de constituir un proceso de hipótesis y conjeturas al modo del científico experimental. Identificación por la cual la matemática se convierte en ciencia experimental.

El criterio de fertilidad no parece tener en cuenta el hecho de que cualquier sistema axiomático mínimamente potente permite derivar un conjunto de teoremas r.e. La fertilidad, en todos, del mismo cardinal, al menos. No es, seriamente, criterio formal o recursivo alguno. Salvo que se abandone el terreno sintáctico y se acuda al contenido conceptual de dichos teoremas. Lo cual conduce a la admisión, al menos implícita, de que todo el contenido, todo el estudio de la complejidad, si necesario, es insuficiente para dar cuenta de la 'complejidad matemática'. Inconsistencia en quien formula una versión 'dramática', al menos... La misma que se manifiesta en la idea de agregar una proposición indecidible al sistema de axiomas cuando, desde su interpretación, no puede mostrarse cuál.

El término experimental es un calificativo que, pretendiendo salirse del marco fundacional logificador sintáctico, viene apoyado por otros autores que pasan a hablar de tal carácter del hacer matemático como si el mismo hubiera sido 'probado' por las palabras de Chaitin. Así, por ejemplo, es lo sostenido por Tymoczko (1979, 1985), quien traslada los argumentos algorítmico-informacionales al manejo práctico de los computadores ahora no ya teóricos, sino materiales.

De esta manera, la indecidibilidad de unas proposiciones respecto a un sistema formal sintáctico puro se convierte en tesis de que la Matemática no

sólo es incompleta —respecto a la formalización sintáctica establecida— sino indeterminista o caótica y, finalmente, experimental.

Recordando a Gödel

Es claro que la solución pragmática a la que llega Chaitin, apoyada en la ley de conservación de la información, no es original: se encuentra en Gödel, así como el teorema anterior e incluso la formulación de la nueva versión del teorema de indecidibilidad. Radicalmente explícito, pero con conclusiones radicalmente diferentes.

En 1936 Gödel demostró en *Sobre la longitud de las demostraciones* que hay proposiciones en F_i que son demostrables en F_{i+1} pero no en F_i , donde F_i es un sistema de lógica que contiene, junto a los axiomas lógicos apropiados, variables y cuantificadores para números naturales y clases del mismo tipo, pero no variables de tipo superior. Además, se verifica lo que, desde Blum, se ha venido llamando el *speed-up theorem*: hay proposiciones demostrables tanto en F_i como en F_{i+1} tales que la longitud de la demostración de dichas proposiciones en F_i es mayor que la demostración más corta de las mismas en F_{i+1} , entendiéndose por longitud el número de líneas que componen la demostración. Todo ello podría traducirse en el sentido de que para cualquier función parcial recursiva f en F_{i+1} habrá una configuración x y un número k tales que x puede ser demostrado en F_{i+1} en k líneas, pero no en F_i en $f(k)$ líneas. Temas de trabajo que permiten iniciar el de las jerarquías recursivas...

Lo significativo es que en 1964 Gödel pensaba que podían agregarse axiomas del infinito a la Teoría de conjuntos para decidir la Hipótesis del continuo. Los axiomas de la teoría de conjuntos

pueden ser suplementados sin arbitrariedad por nuevos axiomas que únicamente descifran el concepto de conjunto (1964:264).

Axiomas analíticos, en el sentido de que su papel es descifrar el sentido de los conceptos que ocurren en el sistema, con lo que Gödel parece volver a un concepto de analiticidad kantiano abandonando el sentido fregeano del mismo. Y tales axiomas se reconocen como correctos apelando a la intuición del matemático.

El proceso de incorporar nuevos axiomas posibilita, para Gödel 1972, el que «cuestiones matemáticas indecidibles sí o no para el espíritu humano» no tienen por qué existir en principio. Frente a la noción absoluta del concepto de computabilidad o recursividad la noción de indecidibilidad se muestra relativa. Por ello es una noción que puede terminar siendo resuelta, siempre con la aceptación de nuevos axiomas, más potentes, no entrevistados aún. Gödel se sitúa, así, en línea con la creencia de Hilbert de que para los matemáticos

no hay *Ignorabimus*, de que todo problema terminará siendo resuelto —bien por su demostración, bien por la demostración de su imposibilidad—.

Es lo que Gödel explicita en la Nota de 1972, en *otra versión del primer teorema de indecidibilidad* —y que retoma la idea de 1964—. En ella indica

para resolver todos los problemas del tipo de Goldbach con un cierto grado de complicación k se necesita un sistema de axiomas cuyo grado de complicación, salvo menor corrección, es $\geq k$. (1972:305).

El grado de complicación no es otro que la complejidad, aunque Gödel la defina como el número de signos básicos que ocurren en una fórmula de un lenguaje dado. Con ello, la *otra versión del primer teorema de indecidibilidad* no es más que el teorema de incompletud algorítmico-informacional que se ha establecido en (1). Y aunque Gödel, más preocupado por las cuestiones conceptuales, no se molestó en dar una demostración de esta versión, la misma se obtiene de modo inmediato siguiendo el esquema de la demostración del teorema de incompletud (Cfr. Feferman-Solovay, 1990).

En la misma nota Gödel pasa a manifestar que para resolver problemas que pueden ser formulados en pocas páginas

los pocos axiomas simples que se usan hoy tendrán que ser suplementados por un gran número de otros nuevos o por axiomas de gran complicación (id. 305).

§2. MÁS CONSIDERACIONES EN TORNO A LA INCOMPLETUD, ALEATORIEDAD Y EXPERIMENTALISMO MATEMÁTICO

En lectura *dramática* del Teorema de incompletud de Gödel, en alguna de sus distintas versiones —algorítmico-informacional, de parada, diofántica— Chaitin obtiene que el hacer matemático es incompleto, aleatorio o caótico y experimental. En este último punto ha venido a coincidir con autores que tratan de sostener, frente a lo que se estima enfoque sintáctico formalista, que la Matemática no tiene por qué distinguirse de las ciencias experimentales; aunque el término ‘experimental’ parece tener tantas significaciones como autores que lo manejan. Bastaría mencionar, junto a Chaitin, a Tymozcko, Goodmann, Steiner, Resnik, Crispin...

Brevemente voy a detenerme a comentar los tres rasgos mencionados, en el cuadro esbozado en este ensayo.

1. Afirmar que la Matemática es incompleta depende del sentido de los términos que se manejen. La noción de completud se centra en la Teoría de modelos. En este ámbito lo que el Teorema de Gödel muestra es que no existe sistema formal que de cuenta de su globalidad, muestra límites en el

establecimiento de un lenguaje formal referido a sí mismo y tal que permita caracterizar el concepto de satisfacibilidad en un modelo. Límites que, en cada caso, pueden irse ampliando mediante extensiones del sistema formal. Completud o no referida, por tanto, al ámbito específico de la formalización y de la Teoría de modelos.

Si de aquí se concluye que la matemática es incompleta se hace un cambio de significado en el término utilizado. Y lo que se dice no es más que una trivialidad o se está lamentando la no realizabilidad de alguna tesis asociada a una ideología subyacente.

Trivialidad o ironía, por un lado, en el mismo sentido en el que puede decirse que, tras comprobar que $\sqrt{2}$ es inconmensurable, la Matemática es irracional... Que en el objetivo de formalizar una determinada teoría previa —y siempre en el cuadro específico como, en este caso, en Teoría de modelos— se encuentren limitaciones no constituye otra cosa que la manifestación de que el hacer matemático es un proceso y esa aparición se convierte en uno de los mejores motores de tal hacer. Como sector cognoscitivo que es la Matemática, por su misma esencia, es incompleta: no puede abarcar el total del conocimiento, como tampoco lo puede hacer ninguna otra ciencia. Las pretensiones globalizadoras, en el fondo meros reduccionismos, sólo caben en Ambitos como los de algunas metafísicas o de lo Simbólico, pero nunca en el dominio del saber científico.

Como ideología, por otro lado, el intento de completud globalizadora de un saber lo adoptó el ideal fundacional de la Matemática. Los Fundamentos constituyen una de las claves en trabajos como los de Frege, de Hilbert... Idea fundacional que no es más que el reflejo de una ideología, un trasvase de Ambitos simbólicos a lo conceptual. Constituye lo que en otro lugar (1991) he calificado como ‘utopías de la razón’ de alcanzar una *lingua characteristic* definitiva que permita la expresión ya acabada del pensamiento conceptual puro. Un pensamiento que ha de limitarse, para ello, y en el fondo, a calcular, no a pensar. Ideología que alcanza en el trabajo de Frege —y quizá a su pesar— una de sus mejores expresiones, y se transforma en la idea de caracterizar el razonamiento como mero proceso derivativo sintáctico formal, identificando conocer una proposición con demostración de la misma, eliminando con ello todo elemento intuitivo o conceptual en el proceso demostrativo, en el razonamiento matemático. Sólo desde este marco ideológico fundacional, donde el proceso derivativo se toma como clave, cabe mantener como proposición no trivial la afirmación de incompletud. Un mantenimiento que parte de un proceso fundacional y termina identificando el hacer matemático con un proceso derivativo formal...

2. En cuanto al concepto de caos y azar que conduce a la afirmación de que la Matemática es indeterminista, viene avalado por otro juego de palabras, por analogías, por la mostración de una ecuación diofántica intratable, por un elemento como Ω ...

Fuera de estas analogías retóricas, una de las claves se centra en la imposibilidad de generar, constructivamente, el elemento Ω y, con ello, las cuestiones de indecidibilidad. Es imposibilidad que se refleja, igualmente, en la ecuación diofántica, al aparecer ligada a conjuntos r.e. Algo que recoge, en principio, el Teorema de Rice, como indiqué.

Ahora bien, lo que en el fondo parece añorarse es la constitución de tales procesos generadores, la existencia de un algoritmo ya definitivo para la resolución de todos los problemas. Sólo la imposibilidad de esa generación, sólo la imposibilidad de manejar la ecuación diofántica universal algorítmicamente parece conducir al caos. Pero esta aspiración no hace otra cosa que reflejar la misma ideología subyacente antes indicada: la que pretende el establecimiento de un proceso universal por el que se alcance la solución definitiva de todos los problemas. Al no encontrarse este algoritmo generador único y ya definitivo, se llega a la conclusión de estar en el caos, en el indeterminismo.

Desde mi punto de vista está en juego no el hacer matemático, sino la ideología subyacente, la pretensión fundacional en su versión formal sintáctica. Pretensión que, en este caso, se une con la falacia de identificar unas propiedades con el conocimiento de los medios para alcanzar dichas propiedades. Falacia sustentada en el ejemplo de la ecuación diofántica universal.

Realmente, no había que ir a ejemplificaciones de una ecuación intratable de este tipo. Basta plantear cuestiones decidibles, pero prácticamente indecidibles. Y no me privo de mencionar aquí que Tarski demostró la indecidibilidad de la Teoría de primer orden de los reales con suma y producto. Una máquina-Turing acepta esta teoría, es decir, si se le da como input una proposición codificada de la teoría, la máquina se para siempre. Si se toma la longitud $|x|$ de una proposición x —longitud como número de ocurrencias de los símbolos de variables, cuantificadores...— resulta que existe una constante k tal que el tiempo y el espacio para los procesos de decisión son doblemente exponenciales en $|x|$, con cota superior $k^{|x|^2}$. Lo cual indica que, de hecho, incluso en cuestiones decidibles, hay algunas que van más allá de cualquier potencia de cálculo humano. No hay que recurrir, siquiera, a proposiciones indecidibles para llegar a esta conclusión.

Lo anterior no implica ninguna ley de indeterminación o incertidumbre, ningún caos en la Matemática. Lo que ocurre es que no hay algoritmo generador único de proposiciones y demostraciones, un 'resolver' de problemas... Cuando se demuestra que un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales no puede integrarse y, con ello, no puede darse solución con los métodos clásicos de la Mecánica a un problema como el de la estabilidad del Sistema solar, en lugar de indicar que ello implica el caos del Sistema solar y el caos matemático y lo intratable del sistema de ecuaciones diferenciales no lineales, algunos matemáticos buscan nuevos métodos para resolver el problema de tal estabilidad, nuevos métodos matemáticos para la Mecánica

celeste y pasan a la creación —no por proceso derivativo sintáctico alguno— de las ecuaciones diferenciales cualitativas y a establecer, con ello, nuevos campos de investigación matemática...

Hablar de determinismo o indeterminismo en la Matemática parece esconder otra metáfora: la identificación de la Matemática con un mundo de fenómenos —se supone que eidéticos— que se transforman aleatoriamente en el tiempo, como aquellos que el sentido común nos parece mostrar. Mostración de fenómenos por el sentido común indeterminista, como pretendía Popper. El mundo estático concebido por Gödel, por ejemplo, en el que se van descubriendo los conceptos y los principios mediante procesos intuitivos, donde no hay cuestiones del tipo sí/no indecibles salvo para nuestro conocimiento y para la relatividad que el mismo comporta en cuanto a nociones como las de demostrabilidad, definibilidad, indecidibilidad..., un mundo conformado de esta manera se transforma ahora en un mundo dinámico, atravesado por el tiempo, aleatorio, caótico pero en sí y no en nuestro modo de conocerlo.

Como metáfora retórica, aceptable, como casi todas las metáforas. Pero si se pretende que no es metáfora, sino tesis conceptual, se observa que se hace intervenir el tiempo no en el plano epistemológico, sino en el ontológico de un mundo eidético conceptual. Y ese mundo ontológico que se postula implícitamente se convierte en temporal en sí, no en cuanto a proceso constructivo y material que el matemático elabore. Un tiempo que es válido para procesos materiales, para la producción de máquinas ordenadoras de programas en P o en NP, para tiempo material de demostrar un teorema. Un tiempo que, desde lo fenoménico, se trasvasa a lo conceptual, para poder justificar la afirmación posterior de que ese tiempo implica la identificación de la Matemática con lo experimental. No se dan razones para la intromisión del tiempo en un mundo ontológico matemático ni, consecuentemente, del problema epistemológico de cómo es posible alcanzar dicho conocimiento.

Si términos como caos e indeterminismo se me muestran como simples metáforas ‘dramáticas’, a nivel puramente retórico, ello no implica estar de acuerdo con la concepción gödeliana, en particular con su concepción de que no existen problemas indecibles sí/no para el espíritu humano. Basta el ejemplo indicado de la indecidibilidad de los reales con suma y producto en el terreno práctico. Pero es que si se acepta la Teoría canónica de conjuntos como la acepta Gödel —teoría que comienza por ser una teoría de limitación del tamaño de los conjuntos o de los predicados que posean sentido y, de aquí, radicalmente incompleta al no querer ‘reflejar’ todo lo atribuible a los conjuntos ‘intuitivos’— el teorema de Cantor y el proceso de diagonalización manifiestan la existencia de una infinidad mayor de problemas que de algoritmos para resolverlos. El razonamiento, clásico, vía antinomia:

Si N es el conjunto de naturales basta tomar su conjunto potencia. Si hubiera enumeración de todos los elementos de este conjunto potencia, de

todos los X_1, X_2, \dots , el conjunto X definido por ' $n \in X$ ssi $\neg(n \in X_n)$ ' tendría un índice único k en dicha enumeración y se verificaría

$$k \in X_k \text{ ssi } k \in X \text{ ssi } \neg(k \in X_k)$$

Al no existir tal enumeración de los X_i , el conjunto potencia tiene cardinalidad superior a la de N . Si se identifica cada uno de los conjuntos de naturales X_i con los problemas —es lo que se hace, en el fondo, en el proceso de gödelización—, es claro que hay más problemas que números, que son los que ahora corresponden a los algoritmos.

Es la interpretación de Richards a su paradoja siguiendo a Poincaré. Y lo que la paradoja de Berry indica con mayor claridad si cabe: dado un número x considerar 'el menor número que no puede ser definido en menos de x caracteres'. Implica la formulación 'paradójica' de $|x| + c \leq x$ con c constante y $|x|$ longitud de x . Paradoja de Berry en estos términos que explota Chaitin, y muy ampliamente, en su interpretación de número aleatorio.

Todo lo anterior muestra, vía Teoría de conjuntos, la existencia de problemas indecibles en sentido absoluto y no respecto a alguna formalización determinada. Formalización que, por otro lado, manifestaría contra Gödel la misma conclusión vía enfoque sintáctico. No entraña que se tenga que aceptar, entonces, que el conjunto potencia, el conjunto de problemas, sea aleatorio o caótico salvo, insisto, mera formulación retórica.

3. Metáfora retórica que vuelve a plantearse con motivo de la solución que propone Gödel ante lo que estima relatividad conceptual de la noción de proposición indecible: agregar nuevos axiomas al sistema formal. Expediente adoptado por Chaitin con la reserva de reemplazar la captación intuitiva gödeliana por la concepción de fertilidad. Agregar axiomas es lo que viene a calificarse de proceso experimental. Aparte del pragmatismo más vulgar que este enfoque encierra —como ya señalara Skolem, agregar no ya puertas y ventanas sino hacer permanentes cambios a la base, sin que llegue a saberse nunca dónde termina el proceso fundacional y dónde se encuentra la roca firme prometida— y el olvido de que cambiar un axioma puede cambiar el sentido completo de todo el nuevo conjunto de axiomas, hay otras cuestiones implícitas.

Por lo pronto, y en cuanto a la posición de Gödel, la aparición de un cierto contrasentido, por no decir contradicción. Gödel contrapone la noción de computabilidad con la de decidibilidad considerando la primera absoluta y no la segunda. Y ello porque se suprime la indecidibilidad de una proposición sin más que ampliar el sistema formal en el que se encuentre la misma. Evidentemente la proposición deja de ser indecible, pero la reiteración del argumento gödeliano conduce a la aparición de nuevas proposiciones indecibles en el sistema formal ampliado. Y el concepto de indecidibilidad,

atribuible ciertamente a una proposición, se muestra ligado no a la misma sino al sistema formal en sí.

En cualquier caso, Gödel no parece tener en cuenta que si se acepta su criterio de separar las nociones de definibilidad respecto a un sistema formal de la computabilidad como independiente del lenguaje en el que se establece el sistema formal, entonces se tienen dos posibles consecuencias no queridas por él. El que otros conceptos y sistemas se mostrarían como conceptos absolutos: el Cálculo proposicional bivalente, por ejemplo, es funcionalmente completo y, por ello y en cierto sentido, independiente al formalismo elegido.

Por otro lado, el concepto de computabilidad, en el fondo, tampoco se mostraría tan absoluto: no depende del algoritmo elegido y, hasta ahora, todos los intentos de caracterizar la noción de algoritmo se han mostrado equivalentes. Es lo que ha propiciado la tesis Church-Turing. Si bien no interviene la noción de definibilidad respecto a un lenguaje formal, sí interviene el propio proceso de verificación. Verificación tanto de la derivabilidad en el interior del sistema formal como del proceso de aritmetización. De aquí que, aun permaneciendo en segundo plano, esta dependencia conlleva la relatividad del concepto de computabilidad. Y si hay un punto de relatividad, en la propia base, la complejidad mostraría su carácter relativo.

El contrasentido gödeliano se acentúa cuando acepta el relativismo más radical al dedicarse a la búsqueda de nuevos axiomas del infinito en la Teoría de conjuntos para establecer la completud de esa teoría como si fuera, en algún sentido, absoluta. Salvo que se pueda interpretar dicha búsqueda como mero enfoque pragmatista y no de auténtico análisis filosófico como parece pretender Gödel: si el axioma es útil para demostrar una proposición se le acepta aunque luego se le justifique apelando a evidencias intuitivas...

Es una solución el agregar axiomas que, en el caso gödeliano, se muestra relativo a un campo considerado como absoluto por ya dado, y a la vez *ad hoc*. Lo cual implica, por un lado, manejar conceptos como los de extensión de un sistema formal, con las preguntas de si la extensión es conservadora y por el papel que adoptan las restantes proposiciones —al pasar de PA en L_1 a L_2 un esquema como el de inducción completa con infinidad de realizaciones se convierte en proposición única...—.

Por otro lado, y más importante, si esa justificación se hace tan sólo desde el terreno pragmático —se pasa a una extensión de F para resolver una cuestión indecidible en F—, hay que observar que la misma no viene establecida por ningún elemento derivativo formal intrínseco, sino por una finalidad extrínseca al mismo. Y sería esta finalidad extrínseca la que habría que, en última instancia, justificar.

Por todo ello, incluso desde una extensión *ad hoc*, se vuelve a salir del marco derivativo formal.

En la metáfora del hacer experimental hay contradicción con las metáforas anteriores —si cabe hablar de contradicción entre metáforas—. Se

encuentra la aceptación acrítica de que todo está contenido en los axiomas y que las proposiciones son meras tautologías que se derivan de los mismos. Aceptación que choca con el concepto de aleatoriedad de la matemática sostenido por otro lado. No vale salvar esta contradicción indicando que en el interior de F el determinismo es absoluto y que es la elección de distintos sistemas y axiomas la aleatoria. Pretensión incompatible con la caracterización de la aleatoriedad que se está manejando y que exige que se de en el interior del sistema que, a su vez, se encuentra perfectamente determinado...

En cualquier caso, esta concepción del 'todo en los axiomas' supone la expresión de la diferencia ya clásica entre la sensación psicológica de novedad y la no existencia lógica de la misma. Aceptación que vuelve a manifestar la misma ideología fundacional. Establecidos los axiomas se ha establecido el total de sus teoremas. Aquí se presenta una ambigüedad en cuanto a lo que calificar definición implícita o axiomática y método axiomático como elemento fundacional. Una definición implícita caracteriza una estructura, pero no fundamenta dicha estructura. De aquí que se pueda sostener, por ejemplo, que la unicidad del límite de una sucesión de números reales se cumple cuando el espacio en el que ese límite se establece satisface, junto a los axiomas de cuerpo ordenado arquimediano, el axioma de separación de Hausdorff, y no se cumple en un espacio que no satisface este último axioma. O que los números reales poseen una propiedades si se acepta el axioma de elección y otras distintas si se acepta el Axioma de determinación. Se está en espacios diferentes, dados por estructuras caracterizadas por definición implícita.

Que ello suponga variar los axiomas y estudiar las propiedades de la estructura caracterizada por los mismos, es claro. Al igual que el método de agregar nuevas suposiciones con el riesgo de que las mismas sean, en algunos casos, incompatibles entre sí o conviertan los sistemas ampliados en incompatibles. Al agregar a la Teoría de conjuntos el Axioma de construibilidad, Gödel demostró CGH, pero este Axioma se muestra incompatible con otros axiomas más fuertes del infinito.

Ahora bien, lo dicho caracteriza, en parte, el trabajo matemático. Trabajo que no se centra en obtener meras derivaciones formales de unos u otros sistemas de axiomas o principios establecidos a priori. Que es la visión —la máquina de obtener chorizos a la que se refería Poincaré— surgida de la ideología fundacional logificadora y que muy poco tiene que ver con aquello que pretende fundamentar. Así, una Hipótesis como la de Riemann permitió demostrar el teorema de los números primos. Teorema posteriormente demostrado sin tener que recurrir a la hipótesis de Riemann y, por supuesto, sin hacer uso de otros axiomas distintos de la aritmética elemental —en el caso de Seldberg y Erdős— o a los de la Aritmética superior —en el de Hadamard y la Vallé Poussin—, aunque en ambos casos lo que se hace es manejar el hacer matemático. El mismo Gödel, en la demostración de la incompletud de PA, no se apoyó, precisamente, en proceso derivativo alguno neutral a partir

de unos axiomas puestos previamente. Su genialidad se centró, más que en la demostración del teorema, en el método empleado para llegar a él: el proceso aritmetizador y el de representación —que es lo que ha sido realmente fecundo—. Aprovechó la existencia de procesos como el cartesiano y el método sugerido por Hilbert para producir la gödelización. Aunque luego, en cuanto a la exposición de su teorema, la plasmación de su trabajo se hiciera en un auténtico lenguaje de programación, como señalara Davis.

Que todo esto se denomine método experimental es aceptable para quienes permanentemente buscan etiquetas clasificadoras. Bien entendido que lo sería no porque se agregaran más axiomas a un sistema ya dado.

Lo que está en juego es una concepción epistemológica no sólo del hacer matemático sino del hacer científico —aunque hay tantas epistemologías científicas, actualmente, cuantos pensadores se dedican al tema—. Para Chaitin lo experimental parece venir dado por el criterio de falsación de las proposiciones mediante el experimento: es el que permite verificar o falsar una proposición empírica. Por analogía, los sistemas formales deben modificar sus proposiciones de partida para falsar una proposición; el papel de la experimentación lo parece tener, aquí, la demostración, que sigue como clave en el marco ideológico fundacional. Es visión epistemológica de la ciencia experimental, realmente, pobre. Tanto que sería la que permitiera la analogía con la Matemática haciéndola tan pobremente experimental como la primera. Se ha continuado, en este caso, con un juego de palabras apoyado en cierta pobreza conceptual.

§3. A MODO DE CONCLUSIÓN

En los tres casos, incompletud, caos, experimentalismo, encuentro subyacente un elemento común: el mito de lo fundacional axiomático logificador. El mito que enfoca a la Matemática como mero hacer derivativo a partir de un sistema de axiomas. Es mito en el que subyace la idea de que la Matemática no es más que una parte de la Lógica o puede reducirse a un marco sintáctico formal de la misma.

Son tres elementos que surgen alrededor del Teorema de incompletud gödeliano. Teorema ligado, íntimamente, al Programa de Hilbert y del cual constituye no ya la manifestación de su fracaso —como se ha venido reiterando— sino una de sus más grandes consecuencias. En este sentido cabe observar que, según Wang (1988), Gödel pensaba que su trabajo iba a repercutir hondamente en el interior de la Matemática; algo que, hasta ahora, no había ocurrido. Los trabajos gödelianos han repercutido en campos como los de la Computabilidad y, en el interior de éstos, han hecho surgir temas como, entre otros, el de Complejidad, así como en campos como los de Inteligencia Artificial e Informática. Campos ligados a aquellos donde el finitismo sintáctico hilbertiano pretendió fundamentar la matemática 'ideal', la que hacían todos los matemáticos cuando hacían matemática —la que hacía el

mismo Hilbert—. Desde el mismo, una distinción entre matemática ‘ideal’ y matemática recursiva a la que cabría reducir la primera pero sólo en cuanto a la demostración de consistencia. Reducción de carácter fundacional, no matemática. Y cuando se observan las repercusiones mencionadas del trabajo de Gödel, se observa que lo han sido en este último campo.

Es un mito el que todo hacer matemático se reduzca a un trabajo derivativo sintáctico lógico. Mito que ha conducido a los lógicos a enfocar fundacionalmente la Matemática. Visión de una Matemática creada por algunos lógicos para poder decir, de ella, lo que previamente han puesto en la misma; visión que nada tiene que ver con la práctica matemática. Algo parecido a lo que ya ocurriera con algunas pretensiones anteriores de ver en la Lógica aristotélica la base del razonar matemático, y de cualquier otro razonar... Y es en el interior de este cuadro desde el que se define la complejidad y la aleatoriedad y el experimentalismo. Cuadro de fondo que posibilita las expresiones metafóricas cuando aparecen límites que, al quedar en el interior del marco, impiden ver la manera de superarlos salvo mediante la metáfora. Límites que, para el matemático, son algo natural y no los considera, por ello, como representando hacer caótico alguno.

Lo que quizá importe, más que seguir por líneas como las anteriores, es volver a plantear alguno de los problemas, desde el principio. Problemas como la necesidad de distinguir entre el razonamiento lógico —si es que el mismo existe— y el razonamiento matemático, así como clarificar la distinta visión que de los mismos tienen lógicos y matemáticos. Lo cual implicaría desarrollar una epistemología del razonamiento matemático en línea, quizá, con la apuntada por Poincaré —tan denostado, y consecuentemente olvidado, por los logicistas, y últimamente muy recuperado—.

Desde esta línea, y como simple apunte, afirmar aquí que el razonamiento matemático no se reduce a mera manipulación signica, sin lagunas, sin intuiciones conceptuales; depende del contenido de los temas que en cada momento se están manejando así como del tipo de hacer —figural, global, computacional— que lo condiciona. Por depender del mismo, en la proposición matemática no cabe apelar por modo exclusivo a su verdad o falsedad, sino también al número de parámetros que en ella intervienen y, más fundamental, al enlace que los mismos muestran. Enlace que obliga, en cuanto a su captación, a un elemento experiencial permanente; subtendido, a la vez, por el carácter operacional de la razón conceptual que se manifiesta constructivamente en la Matemática.

Quiero decir, en la proposición matemática intervienen elementos como su contenido, verdad, derivabilidad, enlaces entre sus parámetros componentes... Y todo ello requiere de una experiencia sobre tales elementos. El aporte matemático en un momento dado condiciona el futuro y el razonamiento que se haga dependerá, en cada instante, de los aportes sucesivos. En cada momento, el matemático asimila conceptos y métodos de un hacer y de un

campo dentro de este hacer. Conceptos y métodos que si pudieron considerarse difíciles y prácticamente inaccesibles en un instante, acaban adoptándose como nuevos instrumentos casi elementales para la resolución de otros problemas —y basta observar una obra como la de Bourbaki, en la colección de ejercicios y problemas, para captar lo que digo—. Conceptos y proposiciones que pueden no estar demostrados en un momento pero que son los que arrojan ‘luz’ sobre nuevos e incluso viejos problemas. Y he citado la hipótesis de Riemann...

Son elementos que desde lo sintáctico no pueden ser justificados ni explicados porque las reglas, en él, vienen dadas de una vez para siempre y han de poder aplicarse a todo tipo de contenido por lo que éste, en el fondo, ha de quedar marginado del proceso demostrativo. De aquí que el razonamiento matemático, en cuanto hacer derivativo lógico, tenga que poseer el mismo carácter que las reglas sintácticas, es decir, ha de ser neutral, según el enfoque que de dicho razonamiento hace el lógico.

Distintas concepciones que muestran diferencias radicales en cuanto al enfoque epistemológico del lógico y del matemático. Este se apoya esencialmente en el contenido de su trabajo, en los temas que maneja y va guiado, en su razonamiento, por el tipo de hacer y tema del mismo. El lógico pretende apoyarse meramente en reglas inferenciales que considera neutrales y, por ello, aplicables a cualquier dominio. Desde el hacer matemático no son los axiomas el punto de partida de su trabajo; no son los axiomas la clave del proceso cognoscitivo sino los conceptos-nucleares del marco de su trabajo y, en él, en ocasiones, conjeturas o hipótesis —y reitero la hipótesis de Riemann—. Visión que supone rechazar, de entrada, el carácter derivativo sintáctico o neutral como punto de partida.

Sólo tras un desarrollo de la epistemología subyacente al razonamiento matemático —pero tal como es, no como se pretende que sea desde la visión derivativa sintáctica— tendría sentido discutir si dicho hacer es experimental o no. Porque sólo ese desarrollo permitiría precisar un término como *experimental*, así como el papel que pueda tener la Lógica en el hacer matemático —si es que tiene alguno—. Más aún, permitiría aclarar el propio concepto de Lógica que se está manejando porque es término que se emplea en acepciones muy diversas incluso en el interior del marco logificador fundacional. Es un trabajo, ciertamente, a realizar.

REFERENCIAS

- Börger, E., 1989: *Computability, Complexity, Logic*. Studies in Logic. North-Holland.
- Chaitin, G.J., 1974: «Information-theoretic computational complexity». *I.E.E. Transactions on Information Theory* IT 20: 10-15. En Tymoczko (ed.): 289-299.
- Chaitin, G.J., 1982: «Gödel's theorem and Information». *Internal. Journal of Theoretical Physics* 21: 941-954. En Tymoczko (ed.): 300-311.
- Chaitin, G.J., 1987: *Algorithmic Information Theory*. Cambridge Tracts in Computer Science 1. Cambridge Univ. Press.
- Chaitin, G.J., 1988: «Aritmética y azar». *Investigación y Ciencia*. Set.:44-50
- de Lorenzo, J., 1991: «Leibniz-Frege, ¿utopías de la razón conceptual?». *Theoría* 14-15: 97-114.
- Feferman-Solovay, 1990: *Note a 1972a*. En Gödel CW-2:287-292.
- Gardner, M., 1980: «El número irracional omega parece albergar todos los misterios insondables del Universo». *Inv. y Cia*. En:106-112.
- Gödel, K., 1936: *On the length of proofs*. CW-1: 397-9.
- Gödel, K., 1964: *Cantor's continuum problem*. CW-2: 254-270.
- Gödel, K., 1972: *Some remarks on the undecidability*. CW-2: 305-306.
- Gödel, K., 1986: *Collected Works I*. Publications 1929-1936. Oxford Univ. Press.
- Gödel, K., 1990: *Collected Works II*. Publications 1938-1974. Oxford Univ. Press.
- Goodman, N.D., 1990: «Mathematics as Natural Science». *JSL*-55,1: 182-193.
- Jones, J.P., 1978: «Three Universal Representations of r.e. sets.» *JSL* 43-2:335-351.
- Jones, J.P., 1982: «Universal Diophantine equation». *JSL* 47-3:549-571.
- Jones - Matijasevic, 1984: «Register machine proof of the theorem on exponential diophantine representation of enumerable sets». *JSL* 49:818-829.
- Margenstern, M., 1989: *Langage Pascal el Logique du premiere ordre*. 2 vols. Masson. P.
- Odifreddi, P., 1989: *Classical Recursion Theory*. Studies in Logic. North-Holland.
- Parikh, R., 1986: *Introductory Note to 1936*. En Gödel CW-1: 394-397.
- Tymoczko, Th., 1979: «The Four-Color Problem and Its Philosophical Significance». *The Journal of Philosophy* 76-2: 57-83. En Tymoczko (ed.): 245-266.
- Tymoczko, Th. (ed.), 1985: *New Directions in the Philosophy of Mathematics*. Birkhäuser.

- Van Lambalgen, M., 1989: «Algorithmic Information Theory». *JSL* 54: 1389-1400.
- Wang, H., 1988: *Reflections on K. Gödel*. The MIT Press. Cambridge, Massachusetts.

*Universidad de Valladolid