Sobre los orígenes de la matemática abstracta: Richard Dedekind y Bernhard Riemann

por José Ferreirós Domínguez*

Abstract

Dedekind used to refer to Riemann as his main model concerning mathematical methodology, particularly regarding the use of abstract notions as a basis for mathematical theories. So, in passages written in 1876 and 1895 he compared his approach to ideal theory with Riemann's theory of complex functions. In this paper, I try to make sense of those declarations, showing the role of abstract notions in Riemann's function theory, its influence on Dedekind, and the importance of the methodological principle of avoiding 'forms of representation' in shaping ideal theory. In order to emphasize the abstract viewpoint of Riemann and Dedekind, I compare their work with that of their great german contemporaries, Weierstrass and Kronecker; so, an influential 'Göttingen group' is confronted with the 'Berlin school' of mathematics. Some light is also thrown on the relation between Riemann and Dedekind, particularly with respect to Dedekind's interest on Riemann's ideas ——in function theory, geometry and topology——, beginning in the 1850s and through later works. The abstract approach of the 'Göttingen group' was determinant for the turn to abstract mathematics in our century, and the direct influence of Riemann on Dedekind shows how this approach developed.

THEORIA - Segunda Época - Vol. VII
1992, Nº 16-17-18, tomo A, 473-498

> Mi esfuerzo en teoría de números se encamina a basar la investigación, no en formas de representación (o expresiones) accidentales, sino en nociones básicas simples, y con ello ——aunque esta comparación pueda sonar presuntuosa—— a lograr en este dominio algo similar a lo que Riemann en el dominio de la teoría de funciones. (Dedekind a Lipschitz, 10 de junio de 1876)[1]

El siglo XX ha supuesto el triunfo de la abstracción en matemáticas, en un movimiento cuya cabeza visible fue Nicolás Bourbaki.[2] Pero si bien la aceptación generalizada de los planteamientos abstractos se dio a partir de 1900, su imperio vino preparado de manera esencial por los desarrollos del siglo XIX. En este sentido, en los últimos años se han multiplicado los trabajos que analizan la figura de Richard Dedekind (1831-1916), sus planteamientos conceptuales y metodológicos, como precedente del 'álgebra moderna' desarrollada hacia la década de 1920, principalmente en Gotinga. Por lo demás, sin embargo, puede decirse que son todavía escasos los estudios del camino seguido hasta que se fraguó esa metodología abstracta.[3]

En esta comunicación pretendo hacer una pequeña aportación a ese estudio, analizando la interrelación entre los planteamientos de Bernhard Riemann (1826-1866) y Dedekind, dos autores básicos para entender la historia de ramas fundamentales de la matemática actual. Ambos coincidieron en Gotinga durante los años 1850, desarrollando una intensa amistad; al tiempo, los planteamientos de Riemann ejercieron una profunda influencia metodológica sobre Dedekind, que marcó sus preferencias al enfocar los problemas del álgebra.

1. Contexto: la situación en Gotinga hacia 1855.

Es bien sabido que en el siglo XIX tuvo lugar el despegue de los científicos alemanes en todos los campos de las ciencias naturales y la matemática, lo que les permitió rivalizar con los franceses e incluso superarles. El decano de este movimiento fue el genial Gauss, a la sazón astrónomo en Gotinga, pero la universidad que lideró esa renovación fue la de Berlín, bajo los auspicios de Humboldt. En el campo de la matemática, Berlín fue la primera universidad que ofreció un grupo de profesores de primera línea: en sus clases, Jacobi, Dirichlet y Steiner presentaban los últimos resultados de sus investigaciones. Entretanto, la Gotinga de Gauss seguía siendo una universidad dieciochesca, donde las clases de matemáticas no pasaban de niveles elementales.

Con esta situación se encontraron tanto Riemann como Dedekind, cuando acudieron

---

[1] En Lipschitz 1986, 59-60.

[2] Hay indicios de que hoy estamos en un momento de 'vuelta' con respecto a la euforia reinante a mediados de siglo, lo que significa una cierta desconfianza con respecto a la generalización 'excesiva' y una nueva preocupación por los problemas concretos.

[3] Esto da pie a diversos malentendidos, como cuando ——volviendo al terreno del álgebra—— se identifica ingenuamente el enfoque abstracto actual con los progresos metodológicos alcanzados por los algebristas simbólicos británicos (cf. Ferreirós 1990).

(en 1846 y 1850 respectivamente) a desarrollar sus estudios universitarios. Mientras Dedekind los completaba allí, Riemann decidió en 1847 trasladarse a Berlín, buscando mejorar su formación. Volvió a Gotinga en 1849, momento a partir del cual las circunstancias de esta universidad mejoraron palpablemente. En primer lugar, Wilhelm Weber se ocupó de la cátedra de física experimental, ajustando por vez primera el nivel de la enseñanza al de la investigación. Además, en 1855, a la muerte de Gauss, los profesores de Gotinga trataron de conservar el renombre que había dado a la universidad el 'príncipe de la matemática', y ofrecieron un puesto a Dirichlet. El nuevo sustituto de Gauss trasladó a Gotinga el estilo de enseñanza habitual en Berlín, inaugurando una nueva época.[4] Además, el panorama de la matemática de esta ciudad se vio sustancialmente completado gracias a que Dedekind y Riemann consiguieron en 1854 su habilitación como *Privatdozenten*, lo que les permitió dar clases ——sin sueldo fijo—— en la universidad.

Es a partir de entonces, debido a su condición común de *Privatdozent* y a la presencia de Dirichlet, cuando los dos matemáticos entablaron una relación más estrecha. Riemann era 4 años mayor, había disfrutado de una formación más completa, y sus ideas eran ya de una notable originalidad y madurez; por estos motivos, se convirtió en una especie de maestro para su joven amigo, que asistió asiduamente a sus clases.

El nivel alcanzado por Riemann queda claro si consideramos que en 1855, con solo 29 años, ya había realizado su contribución seminal a la teoría de funciones complejas (en la tesis doctoral leída en 1851), había dado su tratamiento de la noción de integral y de las series de Fourier (en la tesis de habilitación de 1854), y establecido su genial contribución a la geometría diferencial y la teoría del espacio (en la lección de habilitación del mismo año). Cualquiera de estas contribuciones, por separado, habría bastado para asegurarle un puesto en la historia de la matemática.[5]

Por contraste, Dedekind solo había asistido a los cursos de nivel relativamente bajo de Gotinga, y sus trabajos de doctorado y habilitación no mostraban ningún rasgo de genialidad, aunque sí una notable preocupación por el rigor. La asistencia a las clases de Riemann y Dirichlet, de 1855 a 1858, supuso un estímulo de la mayor importancia, y de hecho su único contacto directo ——esto es, no epistolar—— con un grupo de investigadores. No es casual que sus trabajos realmente originales comenzaran a producirse a partir de 1856. En un principio se dedicó a cuestiones algebraicas, elaborando de una manera muy moderna la teoría de Galois, pero inmediatamente pasó al problema de la teoría general de los números algebraicos, que le ocuparía centralmente durante toda su vida.[6]

---

[4] La figura de Dirichlet es importante en relación con el tema que vamos a estudiar: formado en París en contacto con Fourier, entre otros, Dirichlet se convirtió hacia 1847 en el principal maestro de Riemann, y luego, desde su llegada a Gotinga, de Dedekind.

[5] La fuente principal ——hasta el momento—— en lo que toca a la vida de Riemann es Dedekind 1876; puede encontrarse un buen resumen de su vida y una estimación de su obra en Gillispie 1981, y más ampliamente en Monastyrsky 1987; por lo demás, trabajos clásicos recomendables son Klein 1897 y Courant 1926.

[6] El trabajo más reciente y ambicioso sobre Dedekind es Dugac 1976, pero no puede considerarse definitivo; un importante complemento es Scharlau 1981, que aporta nuevos datos sobre su vida y obra; en castellano puede consultarse mi introducción a Dedekind 1992. Entre los trabajos más antiguos, Zincke 1916 aporta mucha información interesante sobre su

Con lo dicho hasta el momento basta para ver que los respectivos campos de trabajo de ambos matemáticos estaban considerablemente alejados. Si Riemann fue conocido en su momento como teórico de funciones, Dedekind llegó a ser considerado uno de los grandes teóricos de números del XIX. Además, los trabajos de Riemann son famosos por su admirable intuición, que le llevaba a proponer nuevos conceptos y resultados de una manera casi visionaria; frente a ello, la obra de Dedekind está marcada por la búsqueda de rigor, aspecto en el que solo es parangonable a la de su contemporáneo Weierstrass. Todo esto hace que en principio resulte muy poco probable la existencia de interrelaciones más fuertes entre los trabajos de ambos.

Sin embargo, diversas declaraciones realizadas por Dedekind indican lo contrario, y de aquí vino el estímulo para mi trabajo. La metodología de Dedekind tiene unos rasgos muy marcados, pero normalmente se advierte solo en los resultados a los que le llevó, esto es, en las teorías que propuso. Son escasos los párrafos en los que se pronuncia explícitamente sobre este tipo de cuestiones, pero en los casos más importantes aparece siempre un paralelismo entre sus investigaciones y el enfoque riemanniano de la teoría de funciones. En este sentido, el texto citado al comienzo puede ser el más llamativo y general de los que pueden encontrarse. Creo que una declaración como ésa, escrita por Dedekind en plena época creativa, justifican que se dedique atención a las similitudes entre ambas teorías a nivel metodológico.

2. La teoría de funciones de Riemann.

Bernhard Riemann (1826-1866) es recordado hoy por sus contribuciones a muy diversas ramas de la matemática: análisis complejo, teoría de series trigonométricas, integración, geometría diferencial, geometría algebraica, teoría de números e incluso física matemática.[7] Pero su fama se forjó ya a lo largo de su vida, y entonces se le consideró ante todo un teórico de funciones. Su tesis doctoral de 1851,[8] donde ponía los cimientos de su aproximación a la teoría de funciones complejas, y el artículo de 1857 'Teoría de las funciones abelianas',[9] fueron la base de esa fama. En el dominio de la teoría de funciones se encuentra precisamente, según las declaraciones de Dedekind, el modelo metodológico clave para su propia obra.[10]

---

personalidad, y Landau 1917 es todavía recomendable.

[7] Aunque hoy es habitual citar a Riemann como 'creador' del aparato matemático empleado por la relatividad general, sus ideas sobre espacios de curvatura variable fueron muy poco atendidas en su época. De hecho, solo se conocieron póstumamente, cuando Dedekind editó ——en 1868—— los trabajos de habilitación de su amigo, y aun entonces la recepción fue muy paulatina (cf. Nowak 1989).

[8] 'Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse' (Riemann 1851).

[9] 'Theorie der Abel'schen Functionen' (Riemann 1857).

[10] No quiero dejar de indicar que la concepción metodológica de Riemann presenta caracteres propios y muy innovadores también en el terreno de la física. Su planteamiento

Hay que indicar que ——aunque los matemáticos del siglo XVIII utilizaron con maestría las funciones complejas al estudiar problemas del análisis—— la teoría de funciones complejas solo se convirtió en una rama autónoma de las matemáticas, establecida sobre bases firmes, en el siglo XIX y de la mano de Cauchy, Riemann y Weierstrass.[11] La contribución de Riemann vino inmediatamente después de la de Cauchy, pero, frente al aspecto fragmentario de los trabajos de éste, se caracterizó por un enorme esfuerzo de síntesis. Riemann pretendía establecer unos fundamentos unitarios para toda la teoría de funciones complejas, y especialmente quería sentar una base adecuada para abordar el estudio de las funciones multiformes. Se trata de funciones que en cada punto presentan varios valores, y estos valores se transforman unos en otros al prolongar la función continuamente siguiendo curvas cerradas en torno a determinados puntos característicos de la función, los llamados 'puntos de ramificación'. Un ejemplo muy simple es el de la función $w^2=z$, con dos valores de w para cada valor de z salvo $z=0$, que es precisamente el punto de ramificación de la función; w varía continuamente con z, y las dos 'ramas' de la función pueden alcanzarse una desde otra haciendo que la variable z describa una curva cerrada en torno al origen.[12]

Tales funciones apenas habían sido consideradas por Cauchy, pero V. Puiseux había comenzado ya el estudio de los puntos de ramificación de las funciones algebraicas.[13] En su tesis doctoral, Riemann estudió ante todo el caso de las funciones algebraicas, ofreciendo un enfoque nuevo y extraordinariamente clarificador de sus propiedades. Pero sus pretensiones eran mucho más ambiciosas, ya que pretendía extender su enfoque para tratar nuevos tipos de funciones, sobre todo las elípticas y abelianas que estaban entonces en el centro de atención. De este tema se ocupó en su artículo de 1857, que causó una tremenda sensación en la comunidad matemática por la riqueza de nuevos resultados y puntos de vista que ofrecía. Es bien conocida la anécdota de que la publicación de este trabajo forzó al propio Weierstrass a interrumpir la publicación de sus estudios sobre el tema, hasta haberlos

de las relaciones entre matemática y 'filosofía natural' se refleja perfectamente en la genial lección 'Sobre las hipótesis en que se basa la geometría' (1854, publicada en 1868). Allí, Riemann presenta la noción general de variedad y generaliza la noción gaussiana de curvatura como medio de caracterizar la métrica de las variedades; con esto crea un marco matemático enormemente amplio ——el de las variedades n-dimensionales, susceptibles de recibir muy diversas métricas, con curvaturas tanto constantes como variables—— como referencia teórica en la que situar el estudio experimental del espacio físico. Esto muestra su visión de que la matemática debe realizar investigaciones teóricas que sirvan para liberar de limitaciones conceptuales y prejuicios transmitidos al conocimiento de las leyes naturales; sobre esta base, la física se basará en los hechos observados, juzgados a la luz de aquellas teorías generales, como medio para determinar las relaciones reales.

[11] Sobre la historia de la teoría de funciones complejas, cf. Kline 1973, Verley 1978 y Bottazzini 1986.

[12] La superficie de Riemann correspondiente (ver más adelante) es precisamente de dos hojas, con un punto de ramificación en el origen.

[13] Puiseux, 'Recherches sur les fonctions algébriques', *Journal de Mathématiques* **15** (1850), 365-480.

revisado completamente cotejándolos con el de Riemann.

El enfoque riemanniano es complicado y responde a la interacción de diversos factores,[14] pero pueden señalarse especialmente dos que nos van a ocupar aquí. Riemann pretendía caracterizar las funciones complejas de manera global, mediante un conjunto mínimo de datos suficientes para la determinación. Desde su punto de vista, este enfoque resultaba esencial para comprender el comportamiento de las funciones algebraicas, elípticas y abelianas; para investigar tales funciones "es necesario ante todo establecer un sistema de condiciones independientes, suficientes para su determinación" (Riemann 1857, 97). Veremos que en conexión con este objetivo formula el principio metodológico al que volverá Dedekind una y otra vez.

Por otro lado, el enfoque de Riemann ha sido caracterizado muy a menudo —de forma algo confundente— como 'geométrico'. Este aspecto está relacionado con el anterior, ya que los datos empleados por Riemann para caracterizar las funciones complejas eran en parte geométricos y en parte analíticos.[15] El recurso a consideraciones geométricas constituye lo más original del enfoque riemanniano, y no puede considerarse simplemente un resultado de su búsqueda de caracterizaciones globales mínimas. De hecho, Riemann sigue aquí, ante todo, sugerencias dispersas y asistemáticas que se encontraban en la obra de Gauss.[16] Es bien sabido que Gauss defendió en 1831/32 la representación geométrica de los números complejos, y que esta representación está en la base de sus demostraciones primera y cuarta del teorema fundamental del álgebra.[17] En estas demostraciones intervenían razonamientos de carácter topológico a propósito del comportamiento de curvas en el plano complejo, poniendo de manifiesto la importancia de un enfoque geométrico y topológico en la teoría de funciones complejas. Gauss llegó incluso a proponer la investigación de "un dominio superior de la teoría abstracta de magnitudes" en el que se reconoce la moderna

---

[14] Aparte de los aspectos que comentaré, Riemann empleaba el hecho de que las partes real e imaginaria de las funciones analíticas son funciones armónicas, utilizando una extensión de la fórmula de Green, y se apoyaba en las similitudes entre la teoría de funciones complejas y la teoría del potencial, como muestra su empleo del principio de Dirichlet.

[15] Entre los datos analíticos figuran ciertas condiciones de contorno sobre las partes real e imaginaria de la función, y la determinación del comportamiento en polos y singularidades logarítmicas. Tales datos solo determinaban la función en conexión con el famoso 'principio de Dirichlet', puesto en cuestión por Weierstrass en 1870 pero recuperado por Hilbert en 1901, tras trabajos de C. Neumann (1877) y Poincaré (1887). Sobre este tema, cf. Bottazzini 1986.

[16] Esta conexión fue indicada por Klein (1897, 74 nota), quien sin embargo parece haber pensado que se trataba de alguna especie de coincidencia más que de una influencia directa.

[17] Cf. Gauss 1863/1929, vol.2, 169-178, y vol.3, 71-102. La representación geométrica estaba también en la base de sus ideas sobre la integración compleja, que prefiguran las de Cauchy, expuestas en una carta de 1811 a Bessel (cf. Gauss 1863/1929, vol.8, 90-91; citado en Verley 1978, 140-141).

topología.[18] Riemann retomó la concepción topológica (como luego veremos) y el enfoque geométrico: partiendo de la representación geométrica de los complejos, consideró las funciones complejas como aplicaciones entre superficies.[19] Enseguida hablaré del último resultado de sus consideraciones geométricas, que le hizo ir mucho más allá de Gauss: la introducción de las llamadas *superficies de Riemann.*

El objetivo de caracterizar las funciones globalmente, mediante un mínimo de datos, llevó a Riemann a alejarse de sus predecesores en un punto clave: donde éstos se habían basado siempre en la consideración de una determinada expresión o fórmula que definía la función en todo el plano complejo, Riemann resaltaba una y otra vez que su objetivo era "considerar tales funciones independientemente de sus expresiones" o representaciones analíticas (Riemann 1851, 4).[20] Sus investigaciones le habían convencido de que al determinar una función mediante una fórmula introducimos información redundante. Para reducir los datos definitorios a lo estrictamente necesario le resultaron esenciales el punto de vista geométrico y el principio de Dirichlet. En sus propias palabras:

> Una teoría de estas funciones [algebraicas, circulares o exponenciales, elípticas y abelianas] sobre la base de los fundamentos establecidos aquí determinaría la configuración de la función (esto es, su valor para cada valor de su argumento) independientemente de la determinación de la misma mediante operaciones.[21] Para ello, a la noción general de función de variable compleja solo se le añadirían las características necesarias para la determinación de la función, y solo entonces se pasaría a las diferentes expresiones de que es susceptible la función. El carácter común de un género de funciones, que son expresables de forma similar mediante operaciones, se representaría entonces en la forma de las condiciones de frontera y de discontinuidad impuestas sobre ellas. (Riemann 1851, 38-39)

Resumiendo, el enfoque riemanniano se basa en una determinar las funciones mediante nociones generales y abstractas, y en considerar las expresiones analíticas como *resultados* y no medios de la teoría. Esta idea de privilegiar las nociones generales frente a las

---

[18] En su cuarta demostración del teorema fundamental del álgebra (1849), hablaba de "un dominio superior de la teoría abstracta de magnitudes, independiente de lo espacial, cuyo objeto son las combinaciones entre magnitudes ligadas según la continuidad, [...] y en el que tampoco podemos movernos sin un lenguaje tomado de las figuras geométricas" (Gauss 1863/1929, vol.3, 79).

[19] Las funciones analíticas, a las que Riemann restringe su estudio, resultan ser aplicaciones *conformes* del plano complejo en sí mismo, de manera que Riemann conectaba aquí explícitamente con un tratado escrito por Gauss en 1825 (Gauss 1863/1929, vol.4, 189-216; cf. Riemann 1851, 6 nota).

[20] A este respecto hay que recordar también cómo Dirichlet había introducido la noción de función arbitraria en análisis real, en conexión con la teoría de series de Fourier; hasta entonces se definían las funciones como ciertas expresiones analíticas. Esto debió constituir también un estímulo muy importante para la dirección abstracta de los trabajos de Riemann y Dedekind; de hecho, la tesis doctoral de Riemann empezaba en conexión directa con esos trabajos de Dirichlet.

[21] Riemann habla aquí de 'Grössenoperationen', 'operaciones entre magnitudes', indicando que se trata de la adición, sustracción, multiplicación y división, en número finito o infinito, y extendidas a magnitudes inconmensurables (esto es, a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$).

representaciones constituye precisamente el principio metodológico que fascinó a Dedekind y le guió continuamente en sus propias investigaciones.

Esa tendencia abstracta de Riemann confiere a su teoría características opuestas a las del enfoque de su gran contemporáneo, Karl Weierstrass (1815-1897). Como es bien sabido, la escuela de Berlín liderada por Weierstrass tuvo una importancia clave para la rigorización del análisis real. Pero el objetivo principal de Weierstrass era el estudio de las funciones elípticas y abelianas; para realizarlo de acuerdo con sus exigencias de rigor se vio obligado a revisar los fundamentos del análisis real y complejo. Ahora bien, la preocupación por el rigor no explica todos los rasgos del enfoque weierstrassiano; en mi opinión hay que hablar también de una cierta tendencia constructivista, compartida con su colega Kronecker, aunque desde luego más suave que la de éste. La contraposición entre el enfoque abstracto de Riemann y el constructivista de Weierstrass puede verse claramente en el modo cómo definieron ambos el objeto de sus teorías: las funciones analíticas.

El texto citado antes indica ya que la determinación abstracta y global de las funciones complejas, abordada por Riemann, dependía de una noción general de función de variable compleja. Naturalmente, esta noción no podía establecerse sobre la base de medios de representación analítica, ya que ello hubiera contradecido la intención del autor. Por fortuna, Riemann podía basarse en el hecho de que la diferenciabilidad en el sentido complejo es equivalente a la analiticidad de la función; de este modo, una función analítica es simplemente la que satisface las llamadas 'ecuaciones de Cauchy-Riemann':

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

donde u y v son las partes real y compleja de la función $f(x+iy)$. Aquí encontramos un ejemplo perfecto de cómo la base del planteamiento riemanniano es una noción simple, y no una forma de representación. Hay indicios de que se trata del ejemplo más antiguo, que pudo ser determinante para la evolución de sus ideas.[22]

Weierstrass, por el contrario, definía las funciones analíticas como aquellas que son representables localmente por medio de series enteras. Este punto de partida le permitía basar su teoría de funciones en nociones aritméticas claras, y así consiguió ofrecer la primera presentación rigurosa de la teoría. La clave de este enfoque está en el principio de prolongación analítica, que establece la posibilidad de 'reconstruir' la función, en todo su dominio, a partir de la representación local mediante una serie entera. De este modo se obtiene un conjunto de series que Weierstrass considera como los 'elementos analíticos' de la función. Pero a la vez que satisface las exigencias de rigor, el enfoque weierstrassiano está de acuerdo con un cierto constructivismo: se basa en la representabilidad de las funciones mediante una clase de series perfectamente especificable. Este aspecto de los planteamientos de Weierstrass sale a la luz en las críticas que realizó a la definición de Riemann. Reconociendo que se trataba de un planteamiento equivalente al suyo, le criticaba ——según Pincherle—— el remitirse a la clase de las funciones reales diferenciables: "en el presente

[22] Se cuenta (Dedekind 1876, 512) que Riemann había discutido el tema de cómo definir las funciones complejas ya hacia 1847 con su profesor Eisenstein, y entonces había defendido ya el enfoque abstracto, mediante las ecuaciones de Cauchy-Riemann, frente al punto de vista más tradicional del "cálculo formal", esto es, frente a la simple admisión de argumentos complejos en las fórmulas del análisis.

estado de conocimiento, las funciones de variable real sujetas a diferenciación no constituyen una clase que pueda ser precisamente delimitada" (Pincherle 1880, 317-318). Se advierte así que el objetivo de la teoría de funciones de Weierstrass era delimitar clases de funciones por medio de teoremas de representabilidad analítica, que empleasen solo funciones simples perfectamente conocidas.[23] De este modo, la visión weierstrassiana de la teoría de funciones es de carácter constructivo, por más que en conexión con los fundamentos del análisis aceptara ideas no constructivas.[24]

Por contra, puede apreciarse que, para Riemann, la diferenciabilidad y las ecuaciones de Cauchy-Riemann son condiciones perfectamente precisas, en un sentido abstracto. La superioridad de su punto de vista frente al de Weierstrass puede verse en la cuestión de las funciones multiformes. En la teoría de Weierstrass aparecen como funciones que presentan varios 'elementos analíticos' con el mismo centro, pero esto resulta una aproximación en cierto modo artificial y arbitraria, frente a la cual ha de preferirse el enfoque directo y global del carácter multiforme que permiten las superficies de Riemann. Precisamente, el tema de las superficies de Riemann es muy apropiado para concluir este apartado resaltando una vez más el carácter abstracto de su enfoque.

Con lo dicho hasta aquí, estará claro que Riemann introdujo sus superficies para entender el comportamiento de las funciones multiformes, y en particular para poder considerarlas ——pese a todo—— como aplicaciones conformes. El dominio de la función deja de ser (una parte de) el plano complejo, para convertirse en una superficie que lo recubre y que en general está integrada por varias hojas, unidas entre sí de manera continua. La función, multiforme sobre el plano complejo, resulta uniforme sobre la superficie de Riemann (puede verse un ejemplo más arriba). Con esto, una buena parte de la información sobre la función ——todo lo que atañe a la multiformidad y los puntos de ramificación—— queda capturada al determinar su superficie asociada.

Para analizar las integrales de funciones algebraicas, Riemann estudió dichas superficies desde un punto de vista topológico, mediante 'cortes transversales' que le permitían convertir la superficie en 'simplemente conexa', esto es, en algo topológicamente equivalente a un disco sin agujeros. De este modo, descubrió y caracterizó la noción de 'orden de conexión' de las superficies ——que equivale a lo que hoy se llama 'característica de Euler'——, mostrando su relevancia para el estudio de las funciones complejas. Los invariantes topológicos descubiertos por Riemann ——en particular, lo que Clebsch llamaría el 'género' de la superficie—— resultaban estar íntimamente ligados a las propiedades de las funciones; el resultado más avanzado que obtuvo en este sentido fue el famoso teorema de Riemann-Roch.

Con todo esto, Riemann estaba desarrollando en profundidad la tendencia 'geometrizante' implícita en algunos trabajos y declaraciones de Gauss. Pero el ejemplo de las superficies muestra cómo Riemann no se limitaba a introducir en el terreno de la teoría de funciones nociones geométricas conocidas. En realidad, puede decirse lo contrario: Riemann llega ——si queremos, en forma visionaria—— a considerar nuevos constructos geométricos

[23] En este sentido puede destacarse su teorema (1885) de aproximación de funciones continuas mediante polinomios.

[24] Como su definición de los números reales o su demostración del teorema de Bolzano-Weierstrass, rechazadas ambas por su colega Kronecker.

abstractos, ligados a ciertas propiedades conocidas de las funciones complejas.[25] Las superficies de Riemann no pueden construirse en el espacio euclídeo, sino que se trata de objetos de un tipo más abstracto, que planteaban un problema conceptual: ¿qué es realmente una superficie de Riemann? Además, el estudio topológico de las superficies no formaba parte de las disciplinas geométricas tradicionales, sino que exigía un nuevo marco. Ya hemos visto que la necesidad de esta nueva disciplina general había sido sugerida ya por Gauss en 1849, y Riemann recogió la idea en toda su generalidad cinco años después (Riemann 1854).

Por estos motivos, la siguiente generación de analistas se encontró con un panorama confuso: la noción de superficie debía ser aclarada, la topología estaba todavía por desarrollar, y el principio de Dirichlet no estaba bien fundamentado. Debido a esa dependencia de nociones abstractas insuficientemente aclaradas, los métodos de Riemann no obtuvieron aceptación inmediata. Los matemáticos trataron de recuperar los resultados de Riemann haciendo uso de otros planteamientos, principalmente los de Weierstrass, y la primera presentación completa y rigurosa de la teoría de funciones al estilo riemanniano hubo de esperar a 1913, cuando Hermann Weyl empleó la noción de variedad analítica para definir las superficies, y el concepto topológico de homología para estudiarlas. Weyl puso también de manifiesto el auténtico papel de las superficies de Riemann, que todavía era oscuro para éste:

> De tiempo en tiempo, encontramos todavía la idea de que la *superficie de Riemann* no es otra cosa que una «imagen», un medio (como dice la gente, «*muy* valioso, *muy* sugerente») de representar e ilustrar el carácter multivaluado de las funciones. Esta idea es fundamentalmente incorrecta. La superficie de Riemann es un componente indispensable, *material*, de la teoría; francamente, es su fundamento. Y tampoco es algo extraído *a posteriori*, y más o menos artificialmente, de las funciones analíticas, sino que debe considerarse siempre como lo *primero*, como la madre tierra en que las funciones pueden comenzar a crecer y florecer. (Weyl 1913, vi-vii; citado en Bottazzini 1986, 240)

Lo peculiar del caso es que ya el propio Riemann se había visto llevado, en su interés por aclarar sus nacientes concepciones geométricas, a introducir la noción de variedad y el programa de una topología general. De este modo, fue Riemann quien comenzó a dar los pasos necesarios para el desarrollo riguroso de su teoría, aunque fueran todavía pasos balbucientes. Tras la lectura de su tesis, estas cuestiones le condujeron a la noción de variedad, que suministraba el contexto adecuado para un desarrollo general de la topología o 'analysis situs', y que introdujo de manera general en su lección sobre geometría (Riemann 1854).[26] Entre los métodos topológicos desarrollados por Riemann se cuenta también una versión rudimentaria de la homología, empleada para la caracterización del 'orden de conexión'. En manuscritos que se publicaron en 1876, llegó incluso a presentar un desarrollo abstracto de nociones topológicas básicas.[27]

De este modo, la teoría de funciones condujo a Riemann a concebir el estudio general y abstracto de la topología, sobre la base de la idea de variedad continua n-dimensional. Quizá esto constituye su principal aportación *fundamental* ——y no técnica—— al desarrollo de las matemáticas. Por este camino descubrió la riqueza de las posibles relaciones entre una

---

[25] Así, Klein decía que prefería hablar de las "creaciones geométricas" de Riemann, más que de "construcciones geométricas" (1897, 75).

[26] Cf. Scholz 1980 y 1982.

[27] 'Fragment aus der Analysis Situs', en Riemann 1892, 479-482.

misma base topológica y muy diversas métricas, surgiendo así las nociones de geometría diferencial que expuso en su lección de habilitación de 1854, y que alcanzarían enorme importancia tras la formulación de la relatividad general. En este sentido, hay que resaltar una vez más el carácter *abstracto* ——no meramente 'geométrico'—— de sus planteamientos, tanto en teoría de funciones como en otros dominios, y la manera impresionante en que señalaron el camino a las futuras generaciones de matemáticos.

3. Dedekind y la teoría riemanniana.

Ya he apuntado que Richard Dedekind (1831-1916) fue discípulo de Riemann a partir de 1855, un año después de que ambos fueran nombrados *Privatdozenten* y comenzaran a dar clases en Gotinga. En el semestre de invierno 1855/56, Riemann impartió por primera vez clases sobre teoría de funciones complejas, abordando el tema de las funciones abelianas, complementado en el verano de 1856 con lecciones sobre las funciones elípticas.[28] Dedekind asistió a estas lecciones, y "a partir de entonces nos hicimos amigos cada vez más íntimos" (carta de Dedekind a Klein, en Lorey 1916, 83). Diversos datos atestiguan su interés por los planteamientos de su maestro y amigo, tanto en esta época como muchos años después.

Un testimonio en este sentido se encuentra en la única carta de uno al otro que se conserva ——del 16.09.1856——, donde Dedekind aprovechaba para "volver a expresarle mi gratitud por las múltiples enseñanzas que desde hace un año le agradezco", y pedirle el manuscrito de la 'Teoría de funciones abelianas':

> Al final del semestre manifestó usted la intención de compendiar y redactar por fin su teoría de las funciones abelianas, y le pedí que me fuera enviando lo que tuviera listo; si en verdad ha dedicado las vacaciones a este trabajo, le reitero mi deseo, y ——puede usted estar seguro—— por interés *propio*; pues estoy deseoso de familiarizarme más aun con esta materia durante el resto de las vacaciones. Por tanto, le ruego que me envíe lo que tenga; lo recibiré y trataré con gran respeto. (Dugac 1976, 210)

Asimismo, de acuerdo con una carta del propio Riemann, fueron Dirichlet y Dedekind quienes arreglaron las cosas para que el trabajo de Riemann fuera publicado en el *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Dedekind 1876, 520). Como luego veremos, en sus declaraciones metodológicas más comprometidas, Dedekind remite siempre a la teoría de funciones riemanniana como modelo.

Además, Dedekind sacó partido de estos estudios en varias ocasiones, con diversas contribuciones propias: en 1877 publicó un trabajo sobre funciones elípticas modulares,[29] y en 1882 apareció su monumental 'Teoría de las funciones algebraicas de una variable', escrita en colaboración con Heinrich Weber.[30] Este último artículo es especialmente notable, ya que en él se sometía a un nuevo tratamiento una parte importante de las investigaciones

---

[28] Cf. Dedekind 1876, 519 y Lorey 1916, 83. Entre los manuscritos de Dedekind pueden encontrarse redacciones de los tres cursos impartidos por Riemann, sobre los mismos temas, entre 1856 y 1858 (manuscritos guardados en el Handschriftenabteilung de la Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek de Gotinga; cf. la signatura Cod. Ms. Dedekind I, 15 y 16).

[29] Dedekind 1930/32, vol.1, 174-201.

[30] Dedekind 1930/32, vol.1, 238-349.

riemannianas, rescatándola de la inseguridad que habían supuesto las críticas al principio de Dirichlet. Dedekind y Weber analizaban la teoría de funciones algebraicas de una variable con medios puramente algebraicos, a imitación de la teoría de ideales propuesta por Dedekind en 1871. Extendían las nociones de cuerpo e ideal a conjuntos de funciones, e introducían nuevos conceptos que permitían dar una definición de los puntos de las superficies riemannianas, consiguiendo así una nueva fundamentación del teorema de Riemann-Roch. Con ello, no solo se rescataba de manera rigurosa una parte de la teoría de funciones riemanniana, sino que se mostraba a la comunidad matemática, de manera insospechada, el interés de la teoría de ideales de Dedekind.

De todos modos, entre el modo de trabajar de Dedekind y el de Riemann hay diferencias notables, que se ponen de manifiesto en torno a la cuestión de las funciones algebraicas. Estas diferencias no atañen a la concepción abstracta de la matemática, principio metodológico básico que es común a ambos, sino ante todo al problema del rigor. Mientras Riemann era un matemático muy creativo que en muchas ocasiones introducía nuevos resultados sin una fundamentación adecuada, Dedekind se dedicó ante todo a desarrollar con todo rigor, a fundamentar y a generalizar teorías preexistentes. Esta divergencia en torno al rigor salió a colación en una carta de Dedekind a Weber escrita el 11.11.1874:

> [...] no soy el profundo conocedor de las obras de Riemann por el que usted me toma. Ciertamente conozco esas obras y *creo* en ellas, pero no las domino, y no las dominaré hasta haber superado a mi manera, y con el rigor habitual en la teoría de números, toda una serie de oscuridades.[31]

De ahí que al tratar la teoría de funciones algebraicas, Dedekind eligiera un camino esencialmente distinto al empleado por Riemann, si bien conservando análogos de las nociones abstractas introducidas por éste.

La implicación de Dedekind con las investigaciones de Riemann no terminó aquí. A la muerte de éste,[32] la custodia de sus manuscritos fue encargada a su gran amigo, que en 1868 editó los trabajos de habilitación, enormemente influyentes,[33] y luego colaboró con Heinrich Weber en la edición de las obras completas, que incluían un buen número de manuscritos transcritos por Dedekind. Durante el año 1867, Dedekind trabajó ante todo en el desarrollo de la parte analítica de las investigaciones geométricas de Riemann, culminando en un manuscrito recientemente publicado (cf. Sinaceur 1990).

Conectados con esto, y especialmente con la noción riemanniana de variedad y con sus investigaciones topológicas, están las contribuciones de Dedekind a la topología. Hacia 1863/66 concibió una serie de ideas básicas para fundamentar la topología independientemen-

---

[31] Carta inédita conservada en la Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek de Gotinga, bajo la signatura: Cod. Ms. Riemann I, 2, p. 14. Así pues, Riemann no fue el origen de la tendencia rigorizante de Dedekind; en este sentido, su principal maestro fue sin duda Dirichlet.

[32] Y respondiendo a su deseo, cf. Dedekind 1876, 525.

[33] La tesis de habilitación de Riemann ——'Sobre la representabilidad de una función por medio de una serie trigonométrica'—— constituyó una contribución esencial a la teoría de integración y al estudio de las series trigonométricas, mientras que su lección de habilitación ——'Sobre las hipótesis en que se basa la geometría'—— sentó las bases de la moderna geometría diferencial y de una nueva concepción del espacio físico.

te de nociones geométricas, elaboradas en términos de espacios métricos y sobre la base de la noción de abierto.[34] En 1872, su fundamentación de los números reales se centraba en el problema de definir en abstracto la noción de continuidad, para lo que empleó la noción de cortadura.[35] Tanto la topología general de Riemann como su geometría diferencial se basaban en la idea de variedad continua, pero Riemann no profundizó en la noción topológica de continuidad, sino que se limitó a dar definiciones verbales de lo que se trataba (cf. Riemann 1854, 255). La definición de continuidad propuesta por Dedekind establecía "un fundamento seguro, a la vez que simple, para el análisis infinitesimal y para la investigación de todos los dominios continuos", esto es, para la topología (Dedekind 1930/32, vol.2, 356). Aunque la definición de continuidad dedekindiana fue superada más adelante por la de Cantor, que estableció el modelo de tratamientos posteriores,[36] esto no debe empañar la importancia histórica de la primera *definición abstracta* de la continuidad.

Vemos así que, aunque los campos de trabajo principales de Dedekind y Riemann fueron muy divergentes, no escasean las contribuciones del primero a la fundamentación rigurosa de los resultados de su gran amigo y colega. Pero lo que aquí nos importa ante todo es la influencia de los principios metodológicos de Riemann para el enfoque con el que Dedekind abordó la teoría de enteros algebraicos y el álgebra en general. Trataré de constatarlo y analizarlo a continuación.

4. La teoría de números algebraicos de Dedekind.

Ya he indicado que, desde el punto de vista actual, Dedekind interesa ante todo como precursor del álgebra abstracta. Ya en Gotinga, hacia 1856/58, comenzó a estudiar la Teoría de Galois como análisis de las interrelaciones entre grupos de sustituciones y subcuerpos de **C**. Aunque aquí comenzó a acercarse a la conciencia moderna de las estructuras y los isomorfismos, nada de esto fue publicado.[37] Solo en 1871, cuando contaba 40 años de edad, publicó una investigación original importante, que es de hecho su obra maestra: la teoría de ideales.[38] Al tratar estas cuestiones de teoría de números algebraicos, Dedekind se vio llevado a plantearlas en términos de conjuntos con estructura. En la primera versión de la

[34] 'Allgemeine Sätze über Räume', en Dedekind 1930/32, vol.2, 353-355. Sobre este tema, cf. las declaraciones de Dedekind en una carta a Cantor de 1879, en Noether-Cavaillès 1937, 47-48.

[35] 'Stetigkeit und irrationale Zahlen', en Dedekind 1930/32, vol.3, 315-334. Me parece fundamental tener en cuenta que este trabajo conecta también con la obra riemanniana, cosa que no parece haber sido advertida por los historiadores.

[36] Cf. el §10 de los 'Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre' de Cantor, publicados en 1883 (Cantor 1932, 190-194).

[37] Su manuscrito más cuidado fue publicado hace unos años por Scharlau; cf. 'Eine Vorlesung über Algebra', en Scharlau 1981, 59-100.

[38] 'Über die Komposition der binären quadratischen Formen' (Dedekind 1871). Esta versión de la teoría, y partes de las dos siguientes, se encuentran en Dedekind 1930/32, vol.3; la cuarta versión completa en Dedekind 1893.

teoría (1871) presentaba las nociones de cuerpo, módulo e ideal, y consideraba anillos de enteros algebraicos; estas cuatro nociones se convertirían ——junto a las de grupo y espacio vectorial—— en núcleo del álgebra abstracta. En el contexto relativamente concreto de los números complejos, Dedekind manejaba dichas estructuras con una enorme maestría, y de hecho el desarrollo de esta línea de trabajo, en sus diversas ramificaciones, constituyó su ocupación principal en todo el resto de su vida.

Ese planteamiento de la cuestión resultaba muy novedoso, ya que hasta entonces el centro de atención había recaido en los números concretos, y no en los conjuntos de números ni mucho menos en sus estructuras. La novedad fue tal que los contemporáneos vieron el modo de proceder dedekindiano como un 'formalismo' excesivo, que introducía gran cantidad de conceptos nuevos en lugar de apoyarse sencillamente en nociones conocidas. Lo contrario sucedía, para muchos, en la obra de Leopold Kronecker (1823-1891), el genial 'rival' de Dedekind que consideró siempre la teoría de números como algo directamente relacionado con la de ecuaciones, más de acuerdo con el gusto de sus contemporáneos. En lo que sigue podremos ver cómo la preferencia de Dedekind por el planteamiento en términos de conjuntos con estructura estaba motivada por los rasgos de metodología abstracta que compartió con Riemann.[39]

Para analizar esta cuestión, utilizaré el ejemplo de Kronecker como punto de comparación. Cotejar sus enfoques resulta de gran interés, ya que la preferencia de cada uno de ellos por una determinada manera de proceder era solidaria de sus concepciones sobre cuál era la fundamentación adecuada del álgebra y del sistema numérico. Kronecker y Dedekind no fueron solo grandes matemáticos, sino también grandes pensadores en cuestiones de fundamentos, y los principios 'filosóficos' de cada uno estaban directamente implicados en su manera de proceder y en los medios que utilizaban para el desarrollo de sus teorías. Dedekind representaba el enfoque abstracto tan claramente como Riemann, si no más, y es natural que Kronecker se opusiera de plano a su modo de proceder. Dado que el enfoque de Kronecker era radicalmente constructivista y finitista, mientras que el de Dedekind era ——de modo igualmente radical—— abstracto, conjuntista e infinitista, las dificultades de comunicación entre ambos estaban aseguradas. Pero esto no hace más que aumentar el interés de una comparación entre sus puntos de vista.

Para Kronecker, los medios con los que cuenta el matemático riguroso son bastante limitados. Esto valía tanto para el álgebra como para el análisis, según se reflejaba en un trabajo de 1887 donde expuso su idea de una fundamentación rigurosa del análisis. Kronecker solo consideraba dados los números naturales, y se oponía por principio a la introducción de nuevos números por métodos que involucraran conjuntos infinitos.[40] Pretendía desarrollar

---

[39] Por supuesto, muchos rasgos de la metodología de Dedekind son originales y no derivados de Riemann. Este tema ha sido objeto de bastante atención en años recientes, cf. Mehrtens 1979 y 1982, Edwards 1980 y 1983, Edwards/Neumann/Purkert 1982, y en castellano Ferreirós 1992.

[40] Cf. 'Über den Zahlbegriff' (Kronecker 1887). De ahí su oposición a todas las construcciones de los números reales que salieron a la luz en 1872, tanto las de Dedekind y Cantor como la de Weierstrass. Aquí, y en su oposición al teorema de Bolzano-Weierstrass, comenzaron las divergencias que irían creciendo hasta llegar (hacia 1885) al choque frontal con su antiguo amigo Weierstrass. Del mismo origen proviene su oposición radical a la teoría de conjuntos cantoriana.

las teorías matemáticas mediante métodos estrictamente constructivos, esto es, algoritmos que permitieran la computación efectiva de los objetos matemáticos postulados por la teoría. El medio que permitía convertir la teoría de números naturales en un principio útil para la fundamentación del álgebra y el análisis no era, en opinión de Kronecker, otra cosa que el álgebra de polinomios o 'cálculo literal' [Buchstabenrechnung].[41] En lo que sigue veremos cómo estos principios básicos se reflejan a la perfección en su enfoque de los problemas de la teoría de enteros algebraicos.

Frente a ello, Dedekind no tenía nada que objetar al infinito actual, al contrario: los objetos básicos de sus teorías ——ya se trate de cortaduras, cuerpos o ideales—— son conjuntos infinitos, equiparados de forma radical a los objetos concretos de la matemática clásica. Su preocupación principal no estaba en la posibilidad de computar efectivamente los objetos de sus teorías, sino en lograr caracterizaciones invariantes y perfectamente generales de las nociones clave.[42] Por lo demás, su preocupación por el rigor y por la demostración detallada de todos los resultados no era menor ——sino en todo caso mayor—— que la de Kronecker.[43] Su esfuerzo se encaminó siempre a reformular las teorías de sus predecesores con el fin de encontrar nuevas definiciones básicas más adecuadas, y nuevos desarrollos deductivos basados directamente en éstas. Unidas a su clara tendencia abstracta, conjuntista y estructural, esas características fueron lo que le llevó a prefigurar el enfoque del álgebra que triunfó hacia los años 1920/30.

La contraposición entre los planteamientos de Dedekind y Kronecker puede ilustrarse en muy diversos terrenos, pero aquí me limitaré a mostrar las divergencias entre sus maneras de plantear las nociones básicas de la teoría de enteros algebraicos.[44] La primera noción clave es la de cuerpo, a la que ambos se vieron llevados a través del estudio de la teoría de Galois; digamos de paso que la familiaridad con la noción de cuerpo fue probablemente lo

[41] Kronecker tenía en mente el modelo de ciertos fragmentos de la teoría de funciones que podían tratarse mediante su enfoque de computación efectiva, en particular la teoría de funciones abelianas (cf. Edwards 1989, que presenta un buen análisis de las opiniones de Kronecker sobre los fundamentos de la matemática).

[42] Esto sale a relucir en sus comentarios sobre la obra de Kronecker, publicados en Edwards/Neumann/Purkert 1982; cf. las 'Bemerkungen' nº 24 y 42, donde enfatiza la cuestión de la invariancia, y nº 21 y 31, donde se resalta el carácter concreto de los ideales: "Un ideal no es un simple 'símbolo' [según sugería Kronecker], sino, como ya he señalado, una cosa totalmente concreta." (Edwards/Neumann/Purkert 1982, 61).

Las características metodológicas de la obra de Dedekind pueden observarse especialmente en la introducción a su artículo de 1877 'Sur la théorie des nombres entiers algébriques', que ofrece una presentación elemental de la teoría de ideales y una justificación del enfoque conjuntista-estructural.

[43] El propio Kronecker reconocía esto al hablar de "su [de Dedekind] forma de deducir sumamente cuidadosa e ingeniosa, que dadas las definiciones totalmente abstractas de sus conceptos resulta tan necesaria como admirable" (Kronecker 1882, 83).

[44] La contraposición puede retrotraerse a los años 1850, cuando ambos empezaron a publicar; en esta época, los dos se ocuparon de la teoría de Galois, y las diferencias entre sus enfoques pueden verse en Scholz 1990, 387-390.

que les permitió definir de modo correcto ——al contrario que sus predecesores—— lo que es un entero algebraico (cf. Edwards 1980). Pero aunque los dos definieron exactamente igual los enteros algebraicos, no puede decirse lo mismo con respecto a la noción de cuerpo.[45]

Dedekind fue el primero en presentarla públicamente: en 1871 definió un cuerpo como un conjunto de infinitos números, cerrado respecto a las operaciones algebraicas básicas:

Entenderemos por *cuerpo* todo sistema [conjunto] de infinitos números reales o complejos, que es tan completo y cerrado en sí, que la adición, sustracción, multiplicación y división de cada dos de esos números produce siempre un número del mismo sistema. (Dedekind 1871, 224).

En este momento, se ocupaba solo de extensiones finitas de **Q** ——lo que llamaba 'cuerpos finitos'——, que definió como cuerpos de números complejos que solo contienen una cantidad finita de subcuerpos. Enseguida volveremos a este tema.

En 1882, Kronecker presentó su propia noción de 'dominio de racionalidad', equivalente en muchos casos a la dedekindiana de cuerpo,[46] pero intencionalmente opuesta a ella. Kronecker definía el dominio de racionalidad ($R', R'', R''', \ldots$) como la totalidad de las 'magnitudes' representables racionalmente sobre N por medio de $R', R'', R''', \ldots$. Se trataba de presentar constructivamente aquello que Dedekind había definido de una manera abstracta. Donde Dedekind había hablado con libertad de números reales o complejos y de conjuntos infinitos, Kronecker conseguía presuponer solo números naturales, un conjunto finito de generadores y expresiones algebraicas, evitando claramente el infinito actual.[47] Sin embargo, de esta manera se oscurecían las propiedades características de los cuerpos como tales, propiedades generales e invariantes de cierre algebraico, que Dedekind convertía precisamente en núcleo de su definición. Esto, y no la constructividad, era para él lo fundamental.

Dedekind planteó sus objeciones al enfoque de Kronecker en diversos lugares,[48] pero ya una carta a Lipschitz de 1876 señala la linea de sus críticas y puede aplicarse al problema de la definición de cuerpo. El texto que voy a citar constituye una de las escasas declaraciones metodológicas de carácter general realizadas por Dedekind, y significativamente apunta a la conexión entre su planteamiento y los principios metodológicos de Riemann; más adelante veremos otro ejemplo. Se discutía la presentación de un artículo publicado en Francia, donde Dedekind ——para no complicar la exposición—— se había separado de su definición de 'cuerpo finito' dada en 1871. En este trabajo, un *cuerpo finito* de números ——es decir, una extensión finita de **Q**—— se definía diciendo que se trata del conjunto de

[45] El único estudio general de la evolución de la noción de cuerpo es Purkert 1973, pero puede consultarse también Scholz 1990.

[46] No en todos: el conjunto de todos los números algebraicos es "evidentemente" un cuerpo para Dedekind (o.c., 236), pero no es un dominio de racionalidad kroneckeriano, ya que requeriría infinitos generadores.

[47] Tanto en su aparición explícita, los conjuntos infinitos, como en la implícita que suponían para él los números irracionales.

[48] El manuscrito de 1882 publicado en Edwards/Neumann/Purkert 1982, y el artículo Dedekind 1895.

todos los números que, para un número algebraico θ dado, satisfacen una ecuación de la forma

$$\phi(\theta)=x_0+x_1\theta+x_2\theta^2+\ldots+x_{n-1}\theta^{n-1},$$

donde el grado n es finito y $x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}$ son números racionales. En esta presentación se encuentra ya una "deformación" de la teoría:

> Mi esfuerzo en teoría de números se encamina a basar la investigación, no en formas de representación (o expresiones) accidentales, sino en nociones básicas simples, y con ello ——aunque esta comparación pueda sonar presuntuosa—— a lograr en este dominio algo similar a lo que Riemann en el dominio de la teoría de funciones. De paso, no puedo reprimir el comentario de que en mi opinión la mayoría de los escritores, incluyendo por ejemplo las más recientes obras sobre teoría de funciones elípticas, no aplican los principios riemannianos de forma consecuente; casi siempre se deforma la teoría simple por la inmiscusión innecesaria de formas de representación, que propiamente deberían ser solo el resultado y no los medios de la teoría. De forma similar, en la introducción deformo la noción de cuerpo finito al dar una forma de representación en la que están contenidos todos los números del cuerpo, y que podría ser reemplazada con igual derecho por otras infinitas formas de representación, si en lugar del número θ que allí aparece se tomaran como medios de expresión otros números del mismo cuerpo. Claramente, se requiere ya alguna reflexión, o incluso un teorema ——aunque sea sencillo——, para ver que ello no modifica en absoluto el contenido numérico del cuerpo.[49] Por tanto, en principio es preferible, con mucho, la definición dada en la *Zahlentheorie* § 159: "un cuerpo finito es aquel que solo posee una cantidad finita de divisores [subcuerpos]", o también la definición equivalente: "un cuerpo finito es aquel que solo contiene una cantidad finita de números [linealmente] independientes entre sí". Pero he hecho esta concesión para suponer lo menos posible de la teoría general de cuerpos, y conectar con cosas generalmente conocidas. (Lipschitz 1986, 59-60)

Los reproches que aquí se hacen pueden aplicarse sin más al enfoque elegido por Kronecker, seis años después, para presentar la noción general de cuerpo. También Kronecker se basaba en "formas de representación accidentales", reemplazables por infinitas otras; en efecto, las magnitudes $(R', R'', \ldots)$ de Kronecker pueden sustituirse siempre por otras, con lo que cambia la "forma de representación". La definición de Kronecker no permite ver de antemano lo que hay de invariante y general en el cuerpo definido. Frente a ello, Dedekind considera preferible seguir el ejemplo de Riemann: relegar las representaciones a resultados de la teoría, y usar como base nociones simples, generales e invariantes, y por tanto abstractas.

De todos modos, para la teoría de enteros algebraicos, las dos definiciones de cuerpo y dominio de racionalidad resultan equivalentes. Encontramos diferencias más significativas si pasamos a las herramientas centrales utilizadas por Dedekind y Kronecker para resolver el problema clave de la factorización de los enteros algebraicos. Este problema fue descubierto por Kummer en los años 1840: se trataba de generalizar la teoría de números habitual a los enteros algebraicos en general, siguiendo el ejemplo de Gauss, que en 1832 había estudiado la teoría de los números $a+bi$, con a,b en $\mathbf{Z}$. Pero las leyes de la divisibilidad se perdían en el caso general, ya que en la mayoría de los casos se encontraban *varias* descomposiciones ——esencialmente diferentes—— de los enteros algebraicos en factores primos. Para recuperar la similaridad con la teoría de números elemental, Kummer introdujo ——en un contexto particular—— factores ideales, por simple postulación. Dedekind y Kronecker abordaron la cuestión de generalizar totalmente la teoría, y presentarla de manera rigurosa, para lo que les pareció necesario evitar la postulación arbitraria estilo

[49] Esta crítica puede trasladarse sin más a la notación, habitual hoy en día, en la que las extensiones finitas de $\mathbf{Q}$ se designan como $\mathbf{Q}(\alpha)$. Lo que Dedekind critica es propiamente que esto se tome como una definición de partida, ya que se estaría presuponiendo el teorema del elemento primitivo.

Kummer. Lo lograron introduciendo, respectivamente, las nociones de *ideal* y *divisor*.[50]

La gran novedad del planteamiento de Dedekind es que en lugar de buscar objetos concretos que realizaran el papel de factores ideales de los enteros algebraicos ——al modo de Kummer——, reformuló toda la cuestión en términos de conjuntos con estructura. En 1871 definió un ideal **A** como un conjunto de enteros algebraicos, pertenecientes a un cierto cuerpo **K**, dotado de las dos propiedades siguientes:

> 1. las sumas y diferencias de números cualesquiera del ideal **A** pertenecen también a **A**;
> 2. los productos de números de **A** por enteros del cuerpo **K** son números de **A** (Dedekind 1871, 251).

De nuevo se trata de una definición perfectamente general, que deja ver desde un principio lo que hay de invariante en el ideal. A continuación, Dedekind pasaba a estudiar la interrelación entre la división y el producto de ideales, convenientemente definidos. Por este camino, se recuperaba el teorema fundamental de la teoría de números, en la forma que dice que todo ideal ——de enteros de un cuerpo cualquiera de números algebraicos—— es descomponible de manera única en un producto de ideales primos.[51]

En cuanto a Kronecker, en su teoría el lugar de los ideales viene ocupado por lo que llamó 'divisores'. Los divisores no aparecían definidos directamente, sino asociados a determinadas 'formas'; lo que esto quiere decir se verá enseguida. Para estudiar la factorización de los enteros del cuerpo **K**, Kronecker consideraba el anillo de polinomios **K[u,u',u",...]**, polinomios con coeficientes en **K** y (potencialmente) infinitas variables.[52] Este rodeo responde al llamado "artificio metódico de los coeficientes indeterminados": las variables *u,u',...* se tratan solo de manera formal, y lo que interesa primariamente son los coeficientes. Lo importante es que las *formas* ——los polinomios en *u,u',...*—— permiten elaborar un método de *construcción explícita* de los divisores, satisfaciendo el requisito clave desde el punto de vista de Kronecker.[53]

Como era de esperar, esta manera de proceder no satisfizo a Dedekind: Kronecker

---

[50] Sobre este tema se debe consultar Edwards 1980; una buena introducción elemental se encuentra en Dedekind 1877. Aquí no me interesa detenerme en los detalles de la teoría de enteros algebraicos, sino observar aspectos metodológicos que, según creo, pueden entenderse sin conocer aquellos detalles.

[51] El desarrollo riguroso de esta cuestión, conforme a sus preferencias, le costó todavía mucho; en 1877/79 aparece una segunda versión de la teoría, y una tercera en 1893. El motivo de las revisiones era su deseo de utilizar de la manera más directa posible las definiciones conjuntistas de producto y divisibilidad de ideales, sin otros medios auxiliares. Usando un término predilecto de Dedekind, el problema era presentar la teoría en forma "pura", sin mezclar elementos extraños.

[52] Por supuesto, los polinomios considerados en cada caso concreto contienen solo *finitas* variables, pero es importante disponer de la posibilidad de añadir otras nuevas. De nuevo se trata de un infinito potencial que satisface los requisitos de Kronecker.

[53] Sobre los detalles de la teoría de Kronecker, cf. Edwards 1980.

emplea un artilugio formal para desarrollar su teoría, y por ejemplo se ve obligado a emplear distintas representaciones para un mismo divisor.[54] Pero Dedekind tenía otras objeciones, que salieron a la luz en un artículo publicado en 1895, muy interesante para conocer los principios metodológicos clave de este autor.

El artículo en cuestión discutía una fundamentación de la teoría de ideales que acababa de proponer Adolf Hurwitz, y que seguía en buena medida el modo de proceder 'formal' de Kronecker. Allí escribía Dedekind que este modo de proceder "no responde en absoluto a mis deseos", porque "el empleo de funciones de variables me parece siempre un medio auxiliar ajeno al asunto": "al inmiscuirse las funciones de variables se enturbia, en mi opinión, la pureza de la teoría" (Dedekind 1895, 53 y 55). Para Dedekind, el problema de la factorización de enteros algebraicos es una cuestión de teoría de números 'pura', que no tiene nada que ver con la teoría de polinomios, y debe mantenerse al margen de artificios como el método de coeficientes indeterminados. Si un método como este ofrece buenos resultados, debe existir una razón profunda formulable en los términos, completamente independientes, de la 'pura' teoría de números.[55]

En este artículo de 1895 se encuentra un pasaje en el que, para justificar sus preferencias metodológicas, Dedekind aprovecha la oportunidad "para abrir por una vez mi corazón matemático, esto es, expresar mi preferencia por ciertas máximas".[56] A estas alturas, no puede extrañar que de nuevo aparezca Riemann como modelo:

En primer lugar, recordaré un bello pasaje de las *Disquisitiones Arithmeticae*, que ya en mi juventud me causó la más profunda impresión. En el art. 76 relata Gauss que el teorema de Wilson fue anunciado primero por Waring, y prosigue: Sed neuter demonstrari potuit, et cel. Waring fatetur demonstrationem eo difficiliorem videri, quod nulla *notatio* fingi possit, quae numerum primum exprimat.—— At nostro quidem judicio hujusmodi veritates ex notionibus quam ex notationibus hauriri debebant.[57]—— En estas últimas palabras, tomadas en el sentido más general, se encuentra la expresión de un gran pensamiento científico, la decisión por lo interno en contraposición a lo externo. Esta contraposición se repite también en casi todos los dominios de la matemática; basta pensar en la teoría de funciones, en la definición riemanniana de las funciones por medio de propiedades internas características, de las que surgen con necesidad las formas de representación externas. Pero también el el dominio, mucho más

---

[54] Así, tiene que definir lo que llama 'equivalencia absoluta' de divisores, que viene a ser un criterio para saber cuándo dos representaciones ——por medio de 'formas' distintas—— representan el mismo divisor (Dedekind lo critica en Edwards/Neumann/Purkert 1982, 60).

[55] Así, en el artículo en cuestión, Dedekind mostraba cómo su enfoque de la teoría de ideales propuesto en 1894 respondía a una tal reformulación de la teoría de Hurwitz, en términos de la noción de módulo. Incidentalmente, es muy notable que, mientras el recurso a polinomios le parecía totalmente artificial, la reformulación del problema en términos conjuntistas le pareció perfectamente natural. Pero explicar en detalle por qué fue así nos llevaría demasiado lejos; baste decir que para él la teoría de conjuntos era una simple rama de la lógica, de la cual surge la propia aritmética (cf. Dedekind 1992; un análisis detallado aparecerá en Ferreirós 1992).

[56] Según le comunicaba a Frobenius en una carta del 8.02.1895, publicada en Dugac 1976, 283.

[57] [...completar...].—— Pero a nuestro juicio, tales verdades deberían extraerse de nociones más bien que de notaciones.

limitado y simple, de la teoría de ideales se hacen valer ambas direcciones, y en diversos lugares de [...Dedekind 1877] he expresado tan detalladamente los requisitos que, entonces como ahora, me imponía en la construcción de la teoría, que no necesito volver más a ello. (Dedekind 1895, 54-55)

Una vez más, y en otro de los escasos textos donde aborda directamente cuestiones de metodología, Dedekind remite al enfoque riemanniano de la teoría de funciones. En este caso apunta también al precedente de Gauss, si bien no está claro en absoluto que las palabras citadas puedan utilizarse en contra de las teorías de Hurwitz o Kronecker.[58]

En favor del enfoque de Kronecker hay que decir que el planteamiento de Dedekind no tiene carácter constructivo, y en este respecto resulta inferior. Esto se refleja en el hecho de que su teoría general no dispensa de la necesidad de estudiar, para cada tipo particular de cuerpos numéricos, la teoría de números especial que les caracteriza. Sin embargo, como escribió Dedekind ya en 1877, la teoría general no tiene "solamente un interés estético o puramente teórico, sin también un interés práctico [...] pues la certeza de que estas leyes generales existen realmente facilita en el máximo grado la demostración y el descubrimiento de los fenómenos especiales que se presentan en un cuerpo determinado".[59] Con estas palabras, Dedekind se adelantaba a posibles reproches de origen constructivista en la linea de Kronecker.

5. Conclusiones.

Los textos citados en el apartado anterior muestran la importancia que Dedekind adjudicaba al enfoque riemanniano de la teoría de funciones, y el análisis conjunto de las teorías de ambos matemáticos confirma esas similitudes. En suma, teniendo en cuenta la comparación que hemos realizado, puede establecerse la siguiente linea de desarrollo.

El enfoque riemanniano de la teoría de funciones fue innovador por diversas razones, resaltando especialmente dos. Por un lado, su búsqueda de descripciones globales de las funciones complejas, mediante un conjunto mínimo de datos, le llevó a alejarse del planteamiento de sus predecesores y contemporáneos, que se basaban en representaciones explícitas de las funciones. Riemann pretendía ofrecer una caracterización más 'conceptual' de las funciones complejas, esto es, disponer de un conjunto de rasgos definitorios que caracterizasen de forma general, invariante y minimal clases completas de funciones. Tales rasgos habrían de situarse en el origen mismo de la teoría, y no ser un resultado del estudio; inversamente, las formas de representación no deberían estar en el punto de partida, sino ser una consecuencia de la teoría general. Es en este punto donde aparece el principio metodológico de privilegiar las nociones sobre las notaciones, o los conceptos generales y abstractos sobre las formas de representación, principio que cautivó a Dedekind y modeló sus propias teorías.

Pero el enfoque global y abstracto, característico de Riemann, no hubiera sido posible sin su visión de las posibilidades que conllevaba un tratamiento 'geométrico' de las funciones complejas. Esto último ——un rasgo donde Riemann sigue sugerencias de Gauss—— no puede considerarse simplemente como una consecuencia de la búsqueda de descripciones globales, o del mencionado principio metodológico. Pero el resultado de ambos rasgos fue

[58] Cf. la carta de Hurwitz a Landau en Dugac 1976, 266.

[59] Dedekind 1877, ed. orig., 231; cit. por Dugac (1976, 71).

sin duda una clara tendencia *abstracta* en el estudio de la teoría de funciones. Riemann señaló así el camino que seguiría la teoría de funciones complejas en nuestro siglo, pero además la introducción de las superficies de Riemann, y su estudio topológico, le llevó a nuevas nociones abstractas básicas para la matemática: la noción de variedad, y el programa de estudiar topológicamente las variedades. La aceptación del planteamiento abstracto le permitió desarrollar puntos de vista que han resultado ser enormemente fructíferos, y han tenido amplia aceptación en nuestro siglo.

El modelo riemanniano para haber estado siempre presente ante Dedekind, y haber marcado la metodología con que desarrolló su trabajo posterior en un campo muy alejado, el de la teoría de números algebraicos. Dedekind se esforzó por lograr caracterizaciones generales e invariantes de las nociones básicas de la teoría que estudiaba, y trató de convertirlas en definiciones que dieran el punto de partida para una nueva estructuración del material. Es en este punto donde retoma el principio de privilegiar las nociones sobre las notaciones, ya que el requisito de invariancia exige que se abandone toda forma de representación que conlleve algún grado de arbitrariedad. Tales planteamientos abstractos fueron los que llevaron a Dedekind a plantear los problemas algebraicos y de teoría de números en términos de conjuntos con estructura, prefigurando así el enfoque del álgebra abstracta.

Naturalmente, como en el caso de Riemann, la metodología no es todo ni mucho menos, y hay aspectos de contenido que son centrales para los logros de Dedekind. En este caso, el fuerte parentesco entre el álgebra y la teoría de números algebraicos explica que Dedekind tuviera éxito al basarse en nociones que involucran propiedades de cierre algebraico, como las de cuerpo e ideal. Y por lo demás, el papel fundamental de la noción de conjunto en matemáticas fue algo que Dedekind supo ver más allá de sus concepciones metodológicas. Estas actuaron, por su parte, permitiéndole aceptar esta noción y el enfoque abstracto estructural, y haciéndole ver las ventajas de semejante planteamiento. Lo contrario sucedía en su época con Kronecker, cuya estricta posición metodológica le llevó a oponerse al conjuntismo.

De este modo, lo que pueden explicar las preferencias metodológicas es la *tendencia* de un autor a considerar cierta teoría desde un nuevo punto de vista, o a buscar cierto tipo de nociones básicas, cierto tipo de desarrollo de las demostraciones, etc. El caso de Riemann y Dedekind nos muestra cómo una tendencia hacia nociones básicas claras y transparentes, esto es, conceptos que se apliquen de manera general e invariante, puede convertirse en un motor del desarrollo de la matemática en un sentido abstracto. Los mismos principios y preferencias que llevaron a Riemann a introducir las variedades ——analizadas desde el punto de vista topológico—— parecen haber estado implicados en el camino de Dedekind hacia las nociones de cuerpo e ideal ——consideradas desde un punto de vista conjuntista-estructural——. En un caso como en otro, se trataba de lograr una clara definición 'conceptual' de los objetos básicos, relegando las formas de representación y las propiedades especiales a meras consecuencias de la teoría general.

Hay que matizar que, pese a los puntos de contacto y la influencia, la metodología de Dedekind aporta novedades esenciales con respecto a la de Riemann. A este respecto hay que recordar el énfasis de Dedekind en el rigor, aspecto en el que no hay que considerarle continuador de Riemann, sino ante todo de Dirichlet. Sobre los rasgos clave de la metodología de Dedekind existe una abundante bibliografía reciente.[60]

A un nivel más general, las cuestiones estudiadas aquí han servido también para poner de relieve cómo en la Alemania de 1850 existió, junto a la incipiente 'escuela de Berlín', algo así como un 'grupo de Gotinga' que dejó una clara huella en la posteridad. El grupo de Gotinga no llegó a formar una escuela, de manera que la difusión de sus enfoques tuvo que seguir caminos más tortuosos que en el caso berlinés. Pero, pese a todo, los escritos de Riemann y Dedekind fueron un estímulo suficiente para dirigir la investigación y las preferencias de otros individuos más jóvenes. Las diferencias metodológicas entre la escuela de Berlín y el grupo de Gotinga marcan con bastante claridad el rumbo seguido por la matemática, en el cambio de siglo, hacia la abstracción.

Finalmente, este estudio muestra cómo al estudiar los desarrollos matemáticos ——y por extensión, científicos—— en épocas pasadas, no siempre es posible limitar las cuestiones siguiendo a rajatabla los criterios disciplinares actuales. En nuestro caso, hemos visto que no es posible estudiar el desarrollo de la teoría de números algebraicos completamente al margen de los progresos en teoría de funciones. En la segunda mitad del siglo XIX, la formación de un matemático era mucho más generalista que en el presente, y esto explica la posibilidad de trasvases fructíferos de información ——ya sea a nivel metodológico o a nivel de contenido—— entre ramas de la disciplina aparentemente alejadas.

Bibliografía

BIERMANN, K.R. 1966 —— 'Karl Weierstrass. Ausgewählte Aspekte seiner Biographie', *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **223**, 191-220.

1966a —— 'Richard Dedekind im Urteil der Berliner Akademie', *Forschungen und Fortschritte* **40**, 301-302.

BOTTAZZINI, U. 1986 —— *The* Higher Calculus*: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass* (New York: Springer).

BOURBAKI, N. 1976 —— *Eléments d'histoire des mathématiques* (Paris: Hermann, 1969). Citas y referencias a la traducción española en Madrid: Alianza, 1976.

CANTOR, G. 1932 —— *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts* (Berlin; reimpreso en Hildesheim: G. Olms, 1966).

COURANT, R. 1926 —— 'Bernhard Riemann und die Mathematik der letzten hundert Jahre', en *Naturwissenschaften* **14**, 813-818, 1265-1277.

DEDEKIND, R. 1871 —— 'Über die Komposition der binären quadratischen Formen', en Dedekind 1930/32, vol.3, 223-261.

[60] Mehrtens 1979 y 1982, Edwards 1980 y 1983, Edwards/Neumann/Purkert 1982, Ferreirós 1992.

1876 —— 'Bernhard Riemann's Lebenslauf', en Riemann 1876, 507-526. Reimpreso en Riemann 1892, 541-558. Citas y referencias a la ed. original.

1877 —— 'Sur la théorie des nombres entiers algébriques', *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, ser.1, **11** (1876), ser.2, **1** (1877). Editado separadamente en Paris: Gauthier-Villars, 1977. Citas y referencias a la reimpresión parcial en Dedekind 1930/32, vol.3, 262-296.

1893 —— 'Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen', suplemento XI a Dirichlet, Dedekind, *Vorlesungen über Zahlentheorie* (4ª ed., Braunschweig: Vieweg, 1893; reimpreso en New York: Chelsea, 1968), 434-657.

1895 —— 'Über die Begründung der Idealtheorie', en Dedekind 1930/32, vol.2, 50-58.

1930/32 —— *Gesammelte mathematische Werke* (Braunschweig, 3 vols.: 1930, 1931, 1932). Editado por R. Fricke, E. Noether y Ö. Ore. Reimpreso en 2 vols. (manteniendo la paginación original) en New York: Chelsea, 1969.

1992 —— *Escritos sobre los fundamentos de la matemática* (Madrid: Servicio de Publicaciones de la U.A.M.).

DIEUDONNÉ, J. (ed.) 1978 —— *Abrégé d'histoire des mathématiques, 1700-1900* (2 vols., Paris: Hermann).

DUGAC, P. 1973 —— 'Elèments d'analyse de Karl Weierstrass', *Archive for History of Exact Sciences* **10**, 41-176.

1976 —— *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques (avec de nombreux textes inédits)* (Paris: Vrin).

EDWARDS, H.M. 1980 —— 'The Genesis of Ideal Theory', *Archive for History of Exact Sciences* **23**, 321-378.

1981 —— 'Kronecker's place in history', en J. Dauben (ed.) *Mathematical Prespectives* (New York: Academic Press, 1981), 139-144.

1983 —— 'Dedekind's invention of ideals', *Bulletin of the London Mathematical Society* **15**, 8-17; reimpreso en Phillips 1987, 8-20.

1989 —— 'Kronecker's Views on the Foundations of Mathematics', en D. Rowe, J. McCleary (eds.) *The History of Modern Mathematics*, vol.1 (Boston/London: Academic Press, 1989), 67-77.

EDWARDS, H.M., NEUMANN, O., PURKERT, W. 1982 —— 'Dedekind's «Bunte Bemerkungen» zu Kroneckers «Grundzüge»', *Archive for History of Exact Sciences* **27**, 49-85.

FERREIROS, J. 1990 —— '¿Por qué el álgebra simbólica británica no fue un álgebra estructural?', en *Structures in Mathematical Theories* (San Sebastián: Servicio Editorial de la U.P.V., 1990), 241-244.

1992 —— *El nacimiento de la teoría de conjuntos. Alemania, 1854-1908* (Madrid: Servicio de Publicaciones de la U.A.M., en preparación).

FROBENIUS, G. 1893 —— 'Gedächtnisrede auf Leopold Kronecker', en *Gesammelte Abhandlungen* vol.3 (Berlin: Springer, 1968), 705-724.

GAUSS, C.F. 1801 —— *Disquisitiones arithmeticae* (Leipzig: Fleischer). Versión inglesa en New Haven, 1966.

1863/1929 —— *Werke* (12 vols., Göttingen: Dieterich, 1863-1929; reimpreso en Hildesheim/New York: G. Olms, 1973).

GILLISPIE, C.C. 1981 —— *Dictionary of scientific biography* (16 vols. en 8, New York: Scribner's sons).

HAUBRICH, R. 1988 —— *Zur Entstehung der Idealtheorie Dedekinds* (Diplomarbeit, Göttingen).

HAWKINS, T.W. 1981 —— 'The Berlin School of Mathematics', en H. Bos, H. Mehrtens, I. Schneider (eds.) *Social history of nineteenth century mathematics* (Boston: Birkhäuser, 1981), 233-245.

HILBERT, D. 1897 —— 'Die Theorie der algebraischen Zahlkörper', *Jahresbericht der DMV* 4, 175-546. Reimpreso en *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, vol.1 (Berlin: Springer, 1932), 63-363.

KLEIN, F. 1897 —— 'Riemann und seine Bedeutung für die Entwicklung der modernen Mathematik', en *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **4**, 71-87.

KLINE, M. 1973 —— *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (New York: Oxford University Press).

KRONECKER, L. 1882 —— *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen* (Berlin: Reimer), también en *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **92**, 1-122. Reimpreso en Kronecker 1895/1930, vol.2, 239-387.

1887 —— 'Über den Zahlbegriff', en Kronecker 1895/1930, vol. 3/1, 249-274.

1895/1930 —— *Werke* (5 vols., Leipzig: Teubner). Reimpreso en New York: Chelsea, 1968.

LANDAU, E. 1917 —— 'Richard Dedekind —— Gedächtnisrede', *Nachrichten der Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 50-70.

LIPSCHITZ, R. 1986 —— *Briefwechsel mit Cantor, Dedekind, Helmholtz, Kronecker, Weierstrass und anderen* (Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg).

LOREY, W. 1916 —— *Das Studium der Mathematik an den Deutschen Universitäten seit Anfang des 19. Jahrhunderts* (Leipzig/Berlin: Teubner).

MANNING, K.R. 1975 —— 'The emergence of the Weierstrassian approach to complex analysis', *Archive for History of Exact Sciences* **14**, 297-383.

MEHRTENS, H. 1979 —— 'Das Skelett der modernen Algebra. Zur Bildung mathematischer Begriffe bei Richard Dedekind', en *Disciplinae Novae* (Göttingen: Vandenhoeck &

Ruprecht), 25-43.

1982 —— 'Richard Dedekind —— Der Mensch und die Zahlen', *Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft* **33**, 19-33.

MITTAG-LEFFLER, G. 1884 —— 'Sur la représentation analytique des fonctions d'une variable indépendante', *Acta Mathematica* **4**, 1-79.

1923 —— 'Weierstrass et Sonja Kowalewsky', *Acta Mathematica* **39**, 133-198.

MONASTYRSKY, M. 1987 —— *Riemann, topology, and physics* (Boston/Basel/Stuttgart: Birkhäuser).

NEUMANN, O. 1980 —— 'Zur Genesis der algebraischen Zahlentheorie', *NTM-Schriftenreihe* **17**, (1) 32-48, (2) 38-58.

1981 —— 'Über die Anstösse zu Kummers Schöpfung der «Idealen Complexen Zahlen»', en J. Dauben, *Mathematical Perspectives* (New York: Academic Press, 1981), 179-199.

NOETHER, E. CAVAILLES, J. 1937 —— *Cantor-Dedekind Briefwechsel* (Paris: Hermann). Traducción francesa en Cavaillès, *Philosophie mathématique* (Paris: Hermann, 1962), 187-249. Referencias a la ed. original.

NOVY, L. 1973 —— *Origins of modern algebra* (Leyden: Noordhoff).

NOWAK, G. 1989 —— 'Riemann's *Habilitationsvortrag* and the Synthetic *A Priori* Status of Geometry', en D. Rowe, J. McCleary (eds.) *The History of Modern Mathematics*, vol.1 (Boston/London: Academic Press, 1989), 17-46.

PINCHERLE, S. 1880 —— 'Saggio di una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche secondo i principii del prof. C. Weierstrass', *Giornale di Mathematiche* **18**, 178-254, 314-357.

PURKERT, W. 1973 —— 'Zur Genesis des abstrakten Körperbegriffs', *NTM-Schriftenreihe* **10**, (1) 23-37, (2) 8-20.

RIEMANN, B. 1851 —— 'Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse', en Riemann 1892, 3-45.

1854 —— 'Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen', en Riemann 1892, 272-287.

1857 —— 'Theorie der Abel'schen Functionen', en Riemann 1892, 88-142.

1892 —— *Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass* (Leipzig: Teubner; editado por Heinrich Weber en colaboración con Richard Dedekind, en 1876, y reeditado con nueva paginación). Reimpreso junto con los *Nachträge* (ed. por Max Noether y W. Wirtinger en 1902) en New York: Dover, 1953.

SCHARLAU, W. (ed.) 1981 —— *Richard Dedekind 1831/1981. Eine Würdigung zu seinem 150. Geburtstag* (Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg).

SCHOLZ, E. 1980 —— *Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs vom Riemann bis Poincaré* (Stuttgart: Birkhäuser).

1982 —— 'Riemanns frühe Notizen zum Mannigfaltigkeitsbegriff und zu den Grundlagen der Geometrie', *Archive for History of Exact Sciences* **27**, 213-232.

(ed.) 1990 —— *Geschichte der Algebra. Eine Einführung* (Mannheim/Wien/Zürich: BI-Wissenschaftsverlag).

SINACEUR, M.A. 1990 —— 'Dedekind et le programme de Riemann', *Revue d'histoire des sciences* **11**, 221-296.

ULLRICH, P. 1989 —— 'Weierstrass' Vorlesung zur «Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen»', *Archive for History of Exact Sciences* **40**, 143-172.

VERLEY, J.L. 1978 —— 'Les fonctions analytiques', en Dieudonné 1978, cap.4.

WEBER, H. 1893 —— 'Leopold Kronecker', *Mathematische Annalen* **43**, 430-436.

WEIERSTRASS, K. 1894/27 —— *Mathematische Werke* (7 vols., Berlin: Mayer & Müller, 1894-1927).

ZINCKE, H. 1916 —— 'Erinnerungen an Richard Dedekind', *Braunschweigisches Magazin* **22**, 73-81.

*Universidad Complutense de Madrid