APUNTE SOBRE LA INDISTINGUIBILIDAD

Enric TRILLAS#*

"There is no entity without identity"
W.O. Quine

ABSTRACT

A través de una serie de ejemplos matemáticos elementales se llega a proponer una definición bastante general de Indistinguibilidad, por medio de operadores con valores en semigrupos conmutativos ordenados. Tal definición se aplica a casos provenientes de diversos campos, muchos de los cuales exhiben la propiedad de rotura de las cadenas de objetos relacionados a causa de un cierto parecido.

INDICE

 # A Concha, por cuanto sin ella aún distinguiría menos cosas.

THEORIA - Segunda Época - Vol. VIII
1993, Nº 19, 23-49

1. INTRODUCCION

1.1. Una equivalencia E en un conjunto X no es más que un subconjunto no vacío del producto cartesiano XxX, que tiene las tres propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. Con la función característica $\varphi_E: XxX \to [0, 1]$, definida por

$$\varphi_E(a, b) = \begin{cases} 1, \text{ si } (a, b) \in E \\ 0, \text{ si } (a, b) \notin E \end{cases},$$

aquellas tres propiedades se traducen como sigue:

–*Reflexiva*: $\varphi_E(a, a) = 1$ para cada a de E.

–*Simétrica*: Si $\varphi_E(a, b) = 1$, también $\varphi_E(b,a)=1$. O equivalentemente: $\varphi_E(a,b)=\varphi_E(b,a)$ para cada (a,b) de XxX.

–*Transitiva*: *Si* $\varphi_E(a, b)$ *y* $\varphi_E(b, c) = 1$, *entonces* $\varphi_E(a, c) = 1$. O equivalentemente:

$$\varphi_E(a, b) * \varphi_E(b, c) \leq \varphi_E(a, c),$$

para cada (a,b,c) de XxXxX, con cualquier operación $*$ en [0,1] que verifique $1 * 1 = 1$ y $0 * 1 = 1 * 0 = 0 * 0 = 0$.

En el enunciado anterior, el orden $\leq$ de [0,1] traduce el "Si ..., entonces..." y la operación $*$ traduce el "y". Nada tiene, por tanto, de raro que a $*$ se le exijan las propiedades típicas de la conectiva "y", de la conjunción lógica:

–*Asociatividad*, $p\&(q\& s) \equiv (p\& q)\& s$: $x * (y * z) = (x * y) * z$, para cualesquiera x, y, z de [0,1].

–*Conmutatividad*, $p\& q = q\& p$: $x * y = y * x$, para cualesquiera x, y, z de $[0, 1]$.

–*Neutralidad*, $p\& q \equiv p$, si q es verdadera: $x*1=x$, para todo x de [0,1].

–*Absorción*, $p\& q \equiv q$, si q es falsa: $x*0=0$ para todo x de [0,1].

–*Monotonía*, si $p \to q$, entonces $p\& s \to q\& s$ para toda proposición s: si $x \leq y$, entonces $x * z \leq y * z$ para todo z de [0,1].

Con ello, por la monotonía y la neutralidad, $x * y \leq 1 * y = y$, $x * y \leq x * 1 = x$; o sea $x * y \leq \mathrm{Min}(x, y)$. Es decir, la mayor de esas operaciones es la Min. Es evidente que la menor de todas ellas es la

$$Z(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ si } x < 1, y < 1 \\ 1, \text{ si } x = 1 \\ 1, \text{ si } y = 1. \end{cases}$$

Se trata de las operaciones que transforman el intervalo [0,1] en un semigrupo conmutativo y ordenado con el 1 como neutro y el 0 como absorbente. Son muy usadas, además de la Min, las $\mathrm{Prod}(x,y) = x.y$, $W(x, y) = \mathrm{Max}(0, x + y - 1)$ y $T_{0.5}(x, y) = (\mathrm{Max}(0, x^2 + y^2 - 1))^{1/2}$. Tales operaciones, que suelen representarse por la letra T, reciben el nombre de t-normas(1) y verifican $Z \leq T \leq \mathrm{Min}$, como se ha visto; en particular, $Z \leq W \leq \mathrm{Prod} \leq \mathrm{Min}$.

Nota. La menor equivalencia en X es la $J_X = \{(a, a); a \in X\}$, la identidad, que da una clasificación o cociente $X / J_X = \{\{a\}; a \in X\}$, con tantas clases como elementos tiene X. La mayor equivalencia es la XxX que da el cociente $X/ XxX = \{X\}$, con una sóla clase que contiene a todos los elementos de X. Por tanto, $J_X \subset E \subset XxX$.

1.2. Sucede, sin embargo, que en multitud de problemas empíricos lo que pasa no es que un $a \in X$ sea o no sea equivalente a otro $b \in X$, sino que sólo lo sea con cierto grado, que a veces se expresa numéricamente y a veces lingüísticamente, cualitativamente. El motivo suele ser que el conocimiento que se tiene de los objetos de X, a través de descripciones de los mismos, no es total; cuando las propiedades características que los describen no pueden ser, en una situación dada, completamente evaluadas o no lo pueden ser con precisión total.

Por ejemplo, si en el cuadrado unidad $X=[0,1]x[0,1]$ del plano euclídeo, sólo se pueden medir las distancias con una regla cuya precisión es $r \in (0, 1)$, es decir, que si la distancia entre dos puntos de X es menor o igual a r entonces no distinguiriamos ambos puntos, es que, de hecho, se está usando la relación: $a \equiv b$ ssi $d(a, b) \leq r$, siendo d la distancia euclídea. Esa relación es, obviamente, reflexiva y simétrica, pero no es transitiva a causa de la desigualdad triangular $d(a,c) \leq d(a,b)+d(b,c)$, para cualesquiera puntos a,b,c en X. Por ejemplo, los puntos $a(1/2,0), b(1/2+r,0)$ y $c(1/2,r)$ verifican $d(c,a)=r$, $d(a,b)=r$ y $d(c, b) = \sqrt{2} > r$; por tanto, $c \equiv a$ y $a \equiv b$, pero $c \not\equiv b$.

Las clases $[a] = \{x \in X; d(x, a) \leq r\}$ son los entornos circulares(13) $B_a(r)$, de centro a y radio r; al ser $X = \bigcup_{a \in X} B_a(r)$, tales entornos llenan el conjunto X, pero no son disjuntos dos a dos (así, en el ejemplo, $a \in B_c(r) \cap B_b(r)$). Las partes comunes a varias clases constan de puntos "mal clasificados".

Esa anomalía no se da en las relaciones de equivalencia, en virtud de la propiedad transitiva. El ejemplo anterior, de carácter común, pone de manifiesto la necesidad de considerar atentamente ese tipo de relaciones.

Si llamamos *grado de indistinguibilidad* a la función $I_d: XxX \rightarrow [0, 1]$ definida por $I_d(x, y) = 1 - d(x, y)$, se verifica:

1) $I_d(a, a) = 1$, para todo $a \in X$
2) $I_d(a, b) = I_d(b, a)$, para todo par a, b de X
3) Para toda terna a, b, c de X:
   $W(I_d(a,b), I_d(b,c)) = Max(0, 1\text{-}d(a,b)\text{-}d(b,c)) \leq Max(0, 1\text{-}d(a,c)) = I_d(a,c)$, a causa de la desigualdad triangular de d.

Con I_d cabe redefinir: $a \equiv b$ ssi $1 - r \leq I_d(a, b)$.

1.3. Por lo dicho, parecería razonable llamar *grado numérico de indistinguibilidad* a toda función $I: XxX \rightarrow [0, 1]$ tal que:

1) $I(a,a)=1$
2) $I(a,b) = I(b,a)$
3) $T(I(a,b), I(b,c)) \leq I(a,c)$

para toda terna a,b,c de X y una t–norma T previamente elegida en [0,1]. No obstante, antes de fijar una definición general conviene ver algunos ejemplos.

Ejemplo 1. Sea $I:[0, 1]x[0, 1] \to [0, 1]$, $I(x, y) = 1 - |x - y|$. Es $I(x, x) = 1$ y $I(x, y) = I(y, x)$, para cualesquiera x,y de [0,1]. En virtud de la desigualdad triangular $|x - z| \le |x - y| + |y - z|$, para cualesquiera x,y,z de [0,1] es:

$$W(1 - |x - y|, 1 - |y - z|) = \mathrm{Max}(0, 1 - |x - y| - |y - z|) \le 1 - |x - z| = I(x, z).$$

Es un ejemplo que encaja de lleno, como era de esperar, en la anterior definición con T=W.

Ejemplo 2. Si $I:(0, 1]x(0, 1] \to [0, 1]$ se define por $I(x,y)=\mathrm{Min}(x,y)/\ \mathrm{Max}(x,y)$, valen $I(x,x)=1$ e $I(x,y)=I(y,x)$. Además, es inmediato que:

$$I(x, y) . I(y, z) = (\mathrm{Min}(x, y) / \mathrm{Max}(x, y)).(\mathrm{Min}(y, z) / \mathrm{Max}(y, z)) \le$$
$$\mathrm{Min}(x, z) / \mathrm{Max}(x, z) = I(x, z),$$

para cualesquiera x,y,z en (0,1]. Es otro ejemplo que encaja en la anterior definición con T=Prod.

Nota. Si X es un conjunto cualquiera y se conoce una función $f: X \to [0, 1]$, entonces $I_f(x, y) = I(f(x), f(y)) = 1 - |f(x) - f(y)|$ es un grado numérico de indistinguibilidad para X respecto de la t–norma W. Análogamente, si se conoce una función $g: X \to (0, 1]$, $I_g(x, y) = I(g(x), g(y)) = \mathrm{Min}(g(x), g(y)) / \mathrm{Max}(g(x), g(y))$ es un grado numérico de indistinguibilidad para X respecto de la t–norma T=Prod.

Ejemplo 3. Si $I(x, y) = 1 - x - y + 2xy$ en X=[0,1], es $I(x,y)=I(y,x)$ para cualesquiera x,y de [0,1]. Además,

$$W(I(x, y), I(y, z)) = \mathrm{Max}(0, 1 - x - z - 2y + 2xy + 2yz) =$$
$$\mathrm{Max}(0, 1 - x - z + 2y(x + z - 1)) \le \mathrm{Max}(0, 1 - x - z + 2(x + z - 1)) \le$$
$$\mathrm{Max}(0, 1 - x - z + 2xz) = 1 - x - z + 2xz = I(x, z),$$

ya que $y \le 1$, $x + z - xz \le 1$.

Sin embargo, es $I(x, x) = 1 - 2x + 2x^2 = 1$ si y sólo si x=0 o x=1. El trinomio $2x^2 - 2x + 1$ tiene el mínimo en x=1/2, donde vale 1/2; por tanto, no vale la propiedad 1 de la definición, sino la: $I(x,x) \ge 1/2$, para todo $x \in [0, 1]$.

Ejemplo 4. Si Y es un conjunto, sea X= P(Y) el conjunto de todos los subconjuntos de Y, que designaremos por letras minúsculas a,b,c,... Como es sabido, es:

$$a = b \quad \underline{\text{ssi}} \quad a + b = \emptyset \quad \underline{\text{ssi}} \quad (a + b)' = Y,$$

siendo $a + b = a \cup b - a \cap b$ la diferencia simétrica, y′ el complementario.

Así, un criterio para afirmar que los conjuntos a y b son tanto más iguales es "cuanto más grande sea el conjunto $(a + b)' = (a \cap b) \cup (a' \cap b')$". Es que el operador $I(a,b)=(a+b)'$ verifica:

1) $I(a, a) = Y$
2) $I(a, b) = I(b, a)$
3) $I(a, b) \cap I(b, c) = (a+b)' \cap (b+c)' = ((a+b) \cup (b+c))' \subset (a+c)' = I(a, c)$, ya que $a+c = a+(b+b)+c = (a+b)+(b+c) \subset (a+b) \cup (b+c)$, para cualesquiera a, b, c de P(Y).

P(Y) es, con la operación $\cap$ (intersección) y el orden parcial $\subset$, un semigrupo conmutativo y ordenado con neutro Y y absorbente Ø. *Para ese semigrupo* $(P(Y), \cap, \subset; Y)$ el operador $I: XxX \to P(Y)$ verifica unas propiedades análogas a las de la definición anterior.

Nota. Si a y b son subconjuntos de Y, la función φ_{a+b}, característica de la diferencia simétrica, puede escribirse indistintamente por:

$$\varphi_a(x) + \varphi_b(x) - 2\varphi_a(x)\varphi_b(x) = \varphi_{a+b}(x),$$

o por $|\varphi_a(x) - \varphi_b(x)| = \varphi_{a+b}(x)$. Con ello, la función característica de (a+b)' es, indistintamente,

$$1 - \varphi_a(x) - \varphi_b(x) + 2\varphi_a(x)\varphi_b(x),\ 1 - |\varphi_a(x) - \varphi_b(x)|,$$

para cada $x \in Y$.

1.4 Finalmente (2)(3),
Definición. Si $\mathcal{S} = (S, * \leq; s)$ es un semigrupo conmutativo y ordenado, con $s \in S$ un elemento distinguido, una función $I: XxX \to S$ es un *operador de indistinguibilidad de nivel* s *en un conjunto* X *respecto del* semigrupo $\mathcal{S}$, si:

1) $I(a, a) \geq s$
2) $I(a, b) = I(b, a)$
3) $I(a, b) * I(b, c) \leq I(a, c)$,

para cualesquiera a,b,c en X.

El presente artículo intenta mostrar que esta definición es una propuesta suficientemente general para abarcar casos de diversos campos, y se inscribe en la línea de pensamiento que va de Henri Poincaré(4)(5) a Karl Menger(6)(7). A la vez, se pretende ver que la relación entre indistinguibilidad y no-distinción (interpretada la distinción como la existencia de algún tipo de distancia) es una realidad desde el punto de vista matemático elemental; por lo menos, que la anterior definición permite que problemas de origen aparentemente muy distinto compartan una misma estructura matemática $(X, I, \mathcal{S})$.

En el caso S=[0,1], con T=Prod los operadores de indistinguibilidad fueron introducidos por Karl Menger(6) con el nombre de *relaciones probabilísticas* (Probabilistic Relations); con T=Min lo fueron por Lotfi A. Zadeh(15) con el nombre de *relaciones de semejanza* (Similarity Relations) y con T=W lo fueron por Enrique H. Ruspini(16) con el nombre de *relaciones de similitud* (Likeness Relations).

1.5 De hecho, en los procesos de adquisición de conocimientos se procede hacia niveles de distinguibilidad crecientes, o de indistinguibilidad decreciente, con mejores ordenaciones y clasificaciones que al fin, en muchos casos, imponen un tipo de lógica natural.

Por ejemplo, si $p: XxX \to [0, 1]$ verifica las propiedades:

- p(a,a)=1
- T(p(a,b), p(b,c))≤ p(a,c),

para a,b,c de X y una t–norma T (p es un T–preorden u operador de implicación[8][9]), entonces I(a,b)=T(p(a,b),p(b,a)) es un operador de indistinguibilibad para ([0,1],T,≤;1). Con ello, los operadores de indistinguibilidad I que admiten una tal descomposición determinan en X una lógica, la dada por p. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 5. Como

$$(a + b)' = ((a' \cap b) \cup (a \cap b'))' = (a' \cap b)' \cap (a \cap b')' = (a' \cup b) \cap (a \cup b'),$$

el implicador clásico $a \to b = a' \cup b$ proviene de la indistinguibilidad dada por (a+b)' y de la intersección $\cap$. El mismo argumento vale, *mutatis mutandis*, para un álgebra de Boole y, por tanto, para el cálculo proposicional clásico.

Ejemplo 6. Como $1 - |x - y| = W(\mathrm{Min}(1, 1 - x + y), \mathrm{Min}(1, 1 + x - y))$, el implicador de Łukasiewicz[10] $x \to y + \mathrm{Min}(1, 1 - x + y)$ proviene de la indistinguibilidad $1 - |x - y|$ y de la conjunción W.

Ejemplo 7. Como $1 - x - y + 2xy = W(1 - x + xy, 1 - y + yx)$, el implicador de Reichenbach[10] $x \to y = 1 - x + xy$ proviene de la indistinguibilidad $1 - x - y + 2xy$ y de la conjunción W. Está claro que $x \to x \geq 1/2$, para todo $x \in [0, 1]$.

Nota. No debe confundirse la lógica continua de Reichenbach con la discreta de Bočvar. Por ejemplo, aquí es $1/2 \to 1/2 = 1/4$ mientras que en la de Bočvar es $1/2 \to 1/2 = 1/2$.

Ejemplo 8. A partir del implicador de Gödel–Brouwer[10]

$$x \to y = \begin{cases} 1, \text{ si } x \leq y \\ y, \text{ si } x > y, \end{cases}$$

se obtiene:

$$I(x, y) = \mathrm{Min}(x \to y, y \to x) = \begin{cases} x, \text{ si } x < y \\ 1, \text{ si } x = y \\ y, \text{ si } x > y \end{cases},$$

que es un operador de indistinguibilidad para X=[0,1] respecto de ([0,1],Min,≤;1).

Ejemplo 9. A partir del implicador de Menger–Goguen[10] $x \to y = \mathrm{Min}(1, y / x)$ en X=(0,1], se obtiene el operador de indistinguibilidad $I(x, y) = (x \to y).(y \to x) = \mathrm{Min}(x, y) / \mathrm{Max}(x, y)$ para (0,1] respecto de ([0,1],Prod,≤;1), como ya sabíamos.

Queda así abierta la posibilidad de considerar algunas lógicas en un conjunto X a partir de definir: 1) un operador I que traduzca la indistinguibilidad menor posible entre los elementos de X; 2) una operación * y un orden ≤ que traduzcan, respectivamente, el "y" y el "si...,entonces..." en el campo de valores de I, y 3) un nivel s que dé la menor indistinguibilidad posible de cada elemento de X consigo mismo. En el fondo, tales lógicas resultan de agrupar los objetos del ámbito en cuestión por medio de la mejor distinción que pueda tenerse entre ellos[8].

1.6 Finalmente, veamos con un ejemplo muy simple que los operadores I ayudan a modelizar no sólo el caso de las clasificaciones perfectas o particiones (i.e., las relaciones de equivalencia), sino también el de las clasificaciones imperfectas o recubrimientos, es decir, aquellas en las que existen elementos en dos clases *distintas* y que, por lo tanto, provienen de relaciones no–transitivas.

Sean $X = \{a, b, c\}$ y la "clasificación" $\{\{a, b\}, \{b, c\}\}$ que, evidentemente, no es una partición de X a causa del elemento "mal clasificado" b. La función $I: XxX \to [0, 1]$ con valores:

$I(a,a) = I(b,b) = I(c,c) = 1$
$I(a,b) = I(b,a) = r \in (0,1)$
$I(b,c) = I(c,b) = s \in (0,1)$
$I(x,y) = 0$ para los demás pares de XxX,

indica la existencia de grados de indistinguibilidad r y s, de b con a y de a con c que, al no ser ninguno de ellos 1, hacen que b no sea completamente indistinguible de a y de c.

Para que I sea un operador de indistinguibilidad respecto de una t–norma T basta que sea $T(r,s)=T(I(a,b),I(b,c))\leq I(a,c)=0$; es decir, $T(r,s)=0$. Por consiguiente es $T\neq Prod$ y $T\neq Min$, y cabe considerar $T=W$. Con ella, $0=W(r,s)=Max(0, r+s-1)$, que equivale a $r+s\leq 1$. Por lo tanto, para cualquier par de valores r,s en (0,1) tales que $r+s\leq 1$, es I un operador de indistinguibilidad respecto del semigrupo $([0,1],W,\leq;1)$ para $X=\{a,b,c\}$. Por ejemplo, cabría tomar r y s como las frecuencias con que b aparece en cada clase, y sería $r=s=1/2$.

La relación: $x \equiv y(\varepsilon)$ <u>ssi</u> $1-\varepsilon \leq I(x,y)$, con $\varepsilon = 1-Min(r,s)$, consta exactamente de los pares (a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a),(b,c) y (c,b). Con ella, que es reflexiva y simétrica pero no transitiva, sucede

$$a \equiv b(\varepsilon) \text{ y } b \equiv c(\varepsilon) \text{ con } a \not\equiv c(\varepsilon).$$

Designando $[x]_I = \{y \in X; x \equiv y(\varepsilon)\}$, si $[x]_I \neq X$, para cada $x \in X$, se obtienen las clases $[a]_I=\{a,b\}$, $[c]_I=\{b,c\}$, ya que $[b]_I$ sería $\{a,b,c\}=X$; por tanto, la clasificación dada puede escribirse $\{[a]_I, [c]_I\}$.

2. EQUIVALENCIA EN DOS LOGICAS TRIVALUADAS

En el cálculo proposicional clásico cada proposición tiene uno de los dos valores de verdad (verdadero, falso), que son asignados por una *valoración* v que a cada proposición p le hace corresponder, respectivamente, los números 1,0; es decir,

v(p)= 1 <u>ssi</u> p es verdadera
v(p)= 0 <u>ssi</u> p es falsa.

Dos proposiciones p y q son *lógicamente equivalentes* $(p \equiv q)$ si y sólo si la proposición bicondicional $p \leftrightarrow q = (p \to q) \& (q \to p)$ es verdadera. Por tanto, con el operador $I_v(p, q) = 1 - |v(p) - c(q)|$, es $p \equiv q$ <u>ssi</u> $I_v(p, q) = 1$.

En los textos, I_V suele darse por la tabla del operador $I(x, y) = 1 - |x - y|$, antes citado, para x,y en {0,1}:

I	0	1
0	1	0
1	0	1

En este caso, I es un operador de indistinguibilidad para T=Min y la equivalencia lógica es, desde luego, una relación de equivalencia en el ámbito de proposiciones en cuestión.

La situación cambia al pasar a una lógica con tres valores 0,1/2,1, de verdad para las proposiciones. Por ejemplo, en la lógica trivaluada de Łukasiewicz, I se da por la tabla

I	0	1/2	1
0	1	1/2	0
1/2	1/2	1	1/2
1	0	1/2	1

que obviamente amplía la clásica y que, de nuevo, viene definida por $I(x, y) = 1 - |x - y|$. Sin embargo, el conjunto de valores {0,1/2,1} no es un semigrupo para todas las t–normas; por ejemplo, no lo es para Prod al ser $1/2.\ 1/2 = 1/4 \notin \{0, 1/2, 1\}$. Sí se obtienen semigrupos con T=Min,W, y es fácil ver que para ambas t–normas I es un operador de indistinguibilidad del nivel 1. Por tanto, la indistinguibilidad I de la tabla anterior admite como conjunciones las dadas por Min y W en {0,1/2,1}, que no son coincidentes ya que $\mathrm{Min}(1/2, 1/2) = 1/2 \neq 0 = W(1/2, 1/2)$. Ambas lógicas comparten el mismo implicador; en efecto, como sabemos el de la segunda es $x \to y = \mathrm{Min}\,(1, 1 - x + y)$ y, en cuanto a la primera, es

$$1 - |x - y| = 1 - \mathrm{Max}(x - y, y - x) = \mathrm{Min}\,(1 - x + y, 1 - y + x)$$

que, como debe ser $x \to y \in \{0, 1/2, 1\}$, lleva de nuevo a $x \to y = \mathrm{Min}\,(1, 1 - x + y)$.

En la lógica trivaluada de Bočvar, la equivalencia se da por medio de la tabla

I	0	1/2	1
0	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	1/2
1	0	1/2	1

que también amplía a la clásica y corresponde a la función $I(x, y) = 1 - x - y + 2xy$. Sin embargo,como Prod(I(0,1/2),1/2), I(1/2,1)) = 1/4>0=I(0,1), I no es un operador de indistinguibilidad respecto del producto ni, *a fortiori*, respecto del Min; aunque sí lo es respecto de W, como sabemos. Sucede, no obstante, que el implicador que se obtiene es, como se ha visto, $x \to y = 1 - x + xy$, y con él $1/2 \to 1/2 = 3/4 \notin \{0, 1/2, 1\}$. Es que, en la lógica de Bočvar, el implicador viene dado por la tabla

!	0	1/2	1
0	1	1/2	1
1/2	1/2	1/2	1/2
1	0	1/2	1

y la conjunción por

&	0	1/2	1
0	0	1/2	0
1/2	1/2	1/2	1/2
1	0	1/2	1

Esta conjunción no puede corresponder a los valores de ninguna t–norma ya que dá valores menores que la menor t-norma; en efecto, Z(1,1/2) = 1>1/2 = 1&1/2.

Es decir, que la lógica trivaluada de Bočvar escapa parcialmente de nuestro modelo; parcialmente por cuanto obtenemos un operador de implicación respecto de una conjunción que no es la de Bočvar y aquel operador da un implicador que tampoco coincide con el de esa lógica.

3. SUCESOS ALEATORIOS INDISTINGUIBLES

Sea (X,B,p) un espacio de probabilidad; $B \subset P(X)$ es un algebra de Boole de sucesos y $p: B \to [0, 1]$ es una probabilidad, es decir, verifica las dos propiedades $p(X) = 1$ y $p(a \cup b) = p(a) + p(b)$, si $a \cap b = \varnothing$.

Los dos sucesos a y b serán tanto más indistinguibles cuanto menos elementos tenga su diferencia simétrica $a + b = (a' \cap b) \cup (a \cap b')$; es decir, cuanto menor sea el número de elementos de $a' \cap b$ y de $a \cap b'$.

En la teoría de la probabilidad se dice que dos sucesos a y b son "aleatoriamente indistinguibles" si *casi nunca* uno tiene parte común con el complementario del otro, es decir, si $p(a' \cap b) = p(a \cap b')$=0; lo que equivale a p(a+b)=O.

El operador $I: BxB \to [0, 1]$, $I(a, b) = 1 - p(a + b)$ verifica, obviamente, $I(a, a) = 1$ y $I(a, b) = I(b, a)$. Por otra parte, de la desigualdad antes citada $a + c \subset (a + b) \cup (b + c)$, sigue

$$p(a+c) \leq p((a+b) \cup (b+c)) \leq p(a+b) + p(b+c).$$

Como p(a+c) $\leq$ 1, se tiene p(a+c) $\leq$ Min(1, p(a+b)+p(b+c)). Por tanto,

$$1 - \text{Min}\,(1, p(a+b) + p(b+c)) = \text{Max}(0, 1 - p(a+b) + p(b+c)) \leq 1 - p(a+c)$$

es decir,

$$W(1 - p(a+b), 1 - p(b+c)) = W(I(a, b), I(b, c)) \leq 1 - p(a+c) = I(a, c).$$

Y el operador I es de indistinguibilidad al nivel 1 para B respecto del semigrupo $([0,1], W, \leq; 1)$.

Nota. En el caso particular de que a y b sean independientes en probabilidad, $p(a \cap b) = p(a).\ p(b)$, se tiene:

$$I(a, b) = 1 - p((a' \cap b) \cup (a \cap b')) = 1 - p(a' \cap b) - p(a \cap b) =$$
$$a - p(a)p(b') = 1 - p(a) - p(b) + 2p(a)p(b).$$

Si indicamos por a=b(p) que a y b son aleatoriamente indistinguibles, es $a = b(p)$ <u>ssi</u> $I(a, b) = 1$. Sin embargo, es usual, en los casos en que p se evalúa indirectamente, que sólo se sepa que p(a+b) es muy pequeño: es decir, que sólo puedan establecerse las relaciones aproximadas:

$$a = b(p; \varepsilon) \quad \underline{\text{ssi}} \quad p(a+b) \leq \varepsilon \quad \underline{\text{ssi}} \quad 1 - \varepsilon \leq I(a, b),$$

que son reflexivas y simétricas pero pueden no ser transitivas. En efecto, de $1 - \varepsilon \leq I(a, b)$ y $1 - \varepsilon \leq I(b, c)$ sólo se deduce

$$W(1-\varepsilon, 1-\varepsilon) = \text{Max}(0, 1-2\varepsilon) = 1 - \text{Min}\,(1, 2\varepsilon) \leq W(I(a, b), I(b, c)) \leq I(a, c)$$

con $\varepsilon \leq \text{Min}\,(1, 2\varepsilon)$ que implica $1 - \text{Min}\,(1, 2\varepsilon) \leq 1 - \varepsilon$: no es necesariamente $1 - \varepsilon \leq I(a, c)$. Así, puede darse la situación enunciada por Poincaré(4)(5) para el continuo físico: $a = b(p; \varepsilon)$ y $b = c(p; \varepsilon)$ pero $a \neq c(p: \varepsilon)$; la existencia de un objeto indistinguible de otros dos que son distinguibles.

Ejemplo. Sea la experiencia de lanzar un dado perfecto. Los sucesos elementales o átomos del álgebra B son los resultados 1,2,...,6 de que salga una de las caras del dado. Es p(i)=1/6.

Con los sucesos $a = \{1\} \cup \{2\}$, $b = \{2\} \cup \{3\}$ y $c = \{3\}$, es:

$$p(a+b) = p(\{1\} \cup \{3\}) =$$
$$1/3;\ p(b+c) = p(\{1\} \cup \{2\}) = 1/3;\ p(a+c) = p(\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}) = 1/2,$$

y, por tanto, $I(a,b)=2/3=I(b,c)$ y $I(a,c)=1/2$. Así, con $\varepsilon = 0.4$, es: a=b(p;0.4) y b=c(p;0.4), pero $a \neq c(p; 0.4)$, ya que $1 - 0.4 > 1/2$.

Nota. La relación a=b (p+) <u>ssi</u> $0<I(a,b)$, es reflexiva y simétrica, pero también puede no ser transitiva ya que si $0<I(a,b)$ y $0<I(b,c)$, es

$$0 \leq W(I(a, b), I(b, c)) = \text{Max}(0, I(a, b) + I(b, c) - 1) \leq I(a, c),$$

y basta que sea $I(a, b) + I(b, c) \leq 1$ para que no pueda asegurarse que sea $0 < I(a, c)$.

El operador I da un grado de indistinguibilidad $I(a,b)$, para cada par de sucesos aleatorios a y b, que el lenguaje probabilístico propio de la experiencia al azar en cuestión sobrepone al lenguaje de la teoría de conjuntos; los sucesos son lo que son y la experiencia aleatoria introduce el nuevo concepto de *casi nunca* que está fuera de la teoría de conjuntos, con la que se representan los sucesos.

4. UN EJEMPLO DE LA TEORIA DE LA MEDICION

Sean un conjunto de objetos X y una función $g: X \to (0, +\infty)$ que mide *la* característica numérica g(x) correspondiente a la propiedad típica G de los $x \in X$. Por ejemplo, X podría ser una población de hombres, que se desea clasificar por su altura (G) medida con una regla de la mayor precisión posible.

Una manera de comparar cuán parecidos son dos objetos x,y desde el punto de vista de G, es por medio del grado

$$I(x, y) = \mathrm{Min}\,(g(x), g(y)) / \mathrm{Max}(g(x), g(y)) \in [0, 1],$$

que es, como se vió,un operador de indistinguibilidad de nivel 1 respecto de ([0,1],Prod,≤,1). Con ello la relación

$$x \equiv y \text{ ssi } g(x) = g(y) \text{ ssi } I(x, y) = 1,$$

es la equivalencia inducida por g. Sin embargo, la regla tendrá una precisión $s \in (0, 1)$; por tanto, para cada uno de esos números la relación $a = b(g; s)$ ssi $1 - s \le I(x, y)$, será más realista que la ≡.

Tal relación es reflexiva y simétrica; además: Si a=b(g;s) y b=c(g;s), entonces a=c(g;s(2-s)), ya que $1 - s \le I(a, b)$ y $1 - s \le I(b, c)$ sólo implica $1 + s^2 - 2s \le I(a, c)$, y como es $1 - s(2 - s) \ge 1 - s$, puede ser $a \ne c(g; s)$.

Ahora, en cambio, la relación: a = b(g+) ssi 0 < I(a,b), es de equivalencia. Pero al ser 0 < I(a,b) si y sólo si Min(g(x),g(y)) > 0, resulta que todos los pares a,b son equivalentes y que la relación no es útil.

Nota. Si los objetos de X tuviesen varias propiedades típicas $G_1,\dots,G_I$, cuantificables o medibles por funciones $g_i: X \to (0, +\infty)$, $1 \le i \le n$, el operador. $I(x,y) = \mathrm{Min}(I_1(x,y), \dots, I_n(x,y))$, con

$$I_i(x, y) = \mathrm{Min}\,(g_i(x), g_i(x, y)) / \mathrm{Max}(g_i(x, y), g_i(x, y)) \in (0, 1),\ 1 \le i \le n,$$

también es de indistinguibilidad al nivel 1 para ([0,1], Prod, ≤; 1) - vid. (11)-. Con él, $a \equiv b$ ssi $I(a, b) = 1$ ssi $g_i(a) = g_i(b)$, $1 \le i \le n$; es decir, si a y b son equivalentes respecto de todas las características G_i. Análogamente, $a = b(g_1, \dots, g_n; s)$ ssi $1 - s \le I(x, y)$, equivale a que sean, simultáneamente, $a = b(g_1; s), \dots, a = b(g_n; s)$.

En ambos casos, por tanto, las clases son intersección de todas las correspondientes a las g_i.

5. UN EJEMPLO DE LA TEORIA DEL CONTROL "FUZZY".

En las mismas condiciones del comienzo del apartado anterior, sea

$$t = \inf_{x \in X} g(x) > 0$$

El operador, $I(a,b)=Min(g(a),g(b))$, es simétrico y verifica $I(a,a)=g(a)\geq t$, para cada $a \in X$. Para cualquier t–norma T:

$$T(I(a,b),I(b,c)) \leq Min(Min(g(a),g(b)),Min(g(b),g(c)) = Min(g(a),g(b),g(c)) \leq Min(g(a),g(c)) = I(a,c);$$

por tanto, I *es un operador de indistinguibilidad al nivel* t *respecto* de cualquier semigrupo $([0,1],T,\leq;1)$.

I da, para cada par de objetos de X, el menor valor medido para la propiedad característica G y cuanto mayor sea ese valor mínimo tanto más indistinguibles serán ambos objetos, los cuales lo serán completamente si I sobrepasa el umbral t de distinguibilidad. Concretamente, la relación $a=b(t)$ ssi $t\leq I(a,b)$, es reflexiva y simétrica. Si $a=b(t)$ y $b=c(t)$, es $T(t,t)\leq T(I(a,b),I(b,c))\leq I(a,c)$; por tanto, como $T(t,t)\leq t$, sólo si T=Min puede asegurarse que es transitiva y, por consiguiente, una relación de equivalencia. Lo mismo cabe decir de las relaciones $a=b(s)$ ssi $1-s\leq I(a,b)$.

Nota. Si I es un operador de indistinguibilidad para una t–norma T, y T´ es otra t–norma tal que $T'\leq T$, entonces de $T'(I(a,b),I(b,c))\leq T(I(a,b),(b,c))\leq I(a,c)$, sigue que I también es un operador de indistinguibilidad para T´. En particular, si lo es respecto de la Min, lo es respecto de todas.

6. UN EXPERIMENTO IMAGINARIO EN EL INTERVALO UNIDAD.

Sea I un operador de indistinguibilidad al nivel $s \in (0,1]$ sobre $X=[0,1]$ y respecto de una t–norma T. Supongamos que *un observador infinitamente pequeño* puede ocupar un lugar cualquier x_0 de [0,1] y que, desde ese lugar, *no vé* los puntos y tales que $I(x_0,y)\geq s$(es decir, tales que $1-s\geq 1-I(x_0,y)$), y *vé* los y tales que $I(x_0,y)< s$(es decir, $1-s<1-I(x_0,y)$), y que los vé con un índice de distinción $1-I(x_0,y)$. Es decir, a los primeros los confunde con x_0 y a los segundos los distingue con un índice de distinción mayor que $1-s$.

1.6 Sean $I(x,y)=1-|x-y|$, y T=W. Es s=1 y $I(x_0,y)=1$ si sólo si $x_0=y$; es decir, el observador no confunde totalmente con x_0 a ningún otro punto.

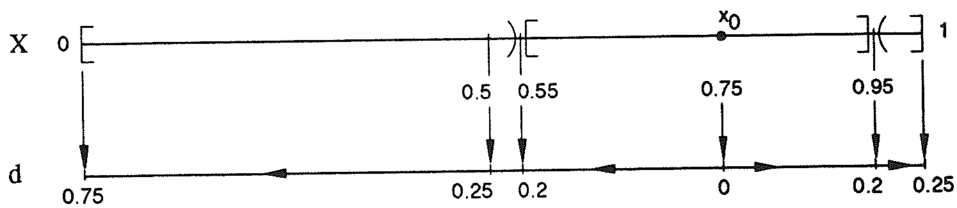
Sin embargo, si $r \in (0,1)$, es fácil probar que $I(x,y)\geq r$ ó $1-r\geq|x_0-t|$, equivale a $Max(0,x_0+r-1)\leq y \leq Min(1,x_0-r+1)$; es decir, que *el observador confunde* con x_0 $(I(x_0,y)\leq r)$ a los puntos del intervalo $[W(x_0,r),1-W(1-x_0,r)]$, y *no confunde* $(I(x_0,y)<r)$ a los de los intervalos $[0,W(x_0,r))$ y $(1-W(1-x_0,r)]$. El primer intervalo es todo el $[0,1]$ si $r=1-x_0$ y $r\leq x_0$, lo que implica que sea $1/2\leq x_0$.

Ejemplo. El observador ideal está en el punto $x_0=0.75$, y el índice de distinguibilidad fijado es r=0.8. Distingue los puntos del intervalo [0.55,0.95] con índice de distinguibilidad $1-I(x_0,y)\leq 1-0.8=0.2$, en tanto que los puntos de [0,0.55) y (0.95,1] los distingue con un índice > 0.2. En concreto, con $d(x_0,y)=1-I(x_0,y)$:

–Si $0 \leq y < 0.55$, es $0.25 < I(x_o, y) \leq 0.8$; es decir, $0.2 \leq d(x_o, y) < 3/4$. Como $d(0,0.75)=0.75$ y $d(0.55,0.75)=0.2$, el índice de distinguibilidad crece desde 0.2 en y=0.55 hasta 3/4 en y=0.

–Si $0.95 < y \leq 1$, es $0.75 \leq 1 - y + x_0 < 0.8$; o sea $0.2 < d(x_o, y) \leq 0.25$. Como $d(0.75,0.95)=0.2$ y $d(0.75,1)=0,25$, el índice de distinguibilidad crece desde 0.2 en y=0.95 hasta 0.25 en y=1.

Gráficamente:



2. Sean $I(x, y) = 1 - x - y + 2xy$, $T = W$. Es $I(x, x) \geq 1/2 = s$. Es $I(x_1, y) \geq 1/2$ si y sólo si $1/2 - x_0 \geq y(1 - 2x_0)$, con lo cual si $x_o \leq 1/2$ es $y \leq 1/2$, y si $x_o > 1/2$ es $y > 1/2$. Así,

–Si el observador ideal está en un $x_o \leq 1/2$ tiene un índice de distinción $d(x_0, y) = 1 - I(x_0, y) \leq 1/2$ para todos los puntos de [0,1/2].

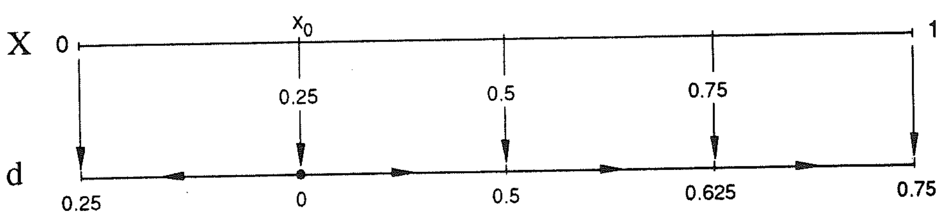
–Si está en un $x_o > 1/2$ tiene un índice de distinción $d(x_o, y) \leq 1/2$ para todos los puntos de (1/2,1].

En el primer caso, si $y \in (1/2]$ será $d(x_o, y) \geq 1/2$, y lo mismo sucederá en el segundo caso con $y \in [0, 1/2]$. Por ejemplo,

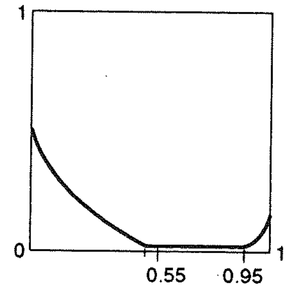
- Si $x_o=1/2$, $y=3/4$, es $d(x_o,y)=1/2$. Si $x_o=0.4$, $y=0.9$, es $d=0.58$.
- Si $x_o=3/4$, $y=1/4$, es $d=1/2$. Si $x_o=0.7$, $y=0.3$, es $d=0.58$.

Debe observarse que es $d(x_o,y)=1/2$ si y sólo si $2x_o(1-2y)=1-2y$; por tanto, si $y=1/2$ es $d(x_o,1/2)=1/2$ para cualquier x_o, y si $y \neq 1/2$ entonces eso sólo sucede para $x_o = 1/2$.

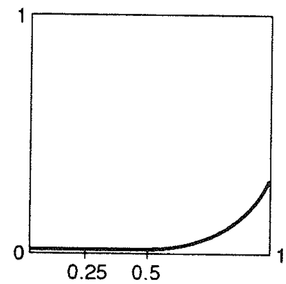
He aquí, gráficamente, el caso $x_o=0.25$:



Nota. Una manera de *imaginar* lo que vé el observador ideal desde x_o se obtiene deformando el segmento [0,1] en un arco de curva, dentro del cuadrado unidad, de forma que cuanto, al nivel que sea, no distingue esté en el intervalo [0,1], y lo que distingue esté en el arco de curva que asciende a medida que distingue más. Así, el primer gráfico se representaría por



y el segundo por



con la suposición, en ambos casos, de que el observador en x_0 mira los otros puntos según la línea que los une con x_0.

7. A MODO DE RESUMEN DE 1 a 6.

Sea X un conjunto de objetos a,b,c,... de los que sólo conocemos una propiedad G, medible por una función g, con valores g(a),g(b),g(c),... en (0,1]; es decir, sólo podemos distinguirlos a través del valor de la función g. Supongamos que el aparato usado para el análisis del sistema (X,g) sólo puede efectuar unas operaciones matemática determinadas; entonces:

1) Si sólo es posible comparar los valores de g por su ordenación en [0,1], los grados de indistinguibilidad pueden darse por I(a,)=Min(g(a),g(b)), que es un operador de indistinguibilidad al nivel Inf g(x) -si este ínfimo es positivo- respecto de T=Min. La indistinguibilidad de umbral s:

$$a = b(s) \quad \underline{\text{ssi}} \quad 1 - s \le (\mathrm{Ia}, b) \quad \underline{\text{ssi}} \quad 1 - s \le g(a) \quad \text{y} \quad 1 - s \le g(b)$$

es una relación de equivalencia que clasifica perfectamente a los elementos de X.

2) Si además de comparar valores en la recta real se puede restar, al ser $|x - y| = \mathrm{Max}(x - y, y - x)$, los grados de indistinguibilidad pueden darse por $I(a,b)=1 - |g(a) - g(b)|$, que es un operador al nivel 1 respecto de T=W. Las indistinguibilidades de umbral s son relaciones reflexivas y simétricas que, en general, no son transitivas; por tanto, en general serán clasificaciones imperfectas en las cuales *podrán existir elementos mal clasificados.*

3) Si además de comparar valores reales se puede dividir, los grados de indistinguibilidad pueden darse por I(a,b)=Min(g(a),g(b))/Max(g(a),g(b)), que

es un operador de nivel 1 para T=Prod. Con él, y usando las indistinguibilidades de umbral s, también se obtendrán, en general, clasificaciones imperfectas con elementos mal clasificados.

Así, dada la característica numérica g, la indistinguibilidad puede depender de la capacidad de cálculo disponible y, a más capacidad de cálculo pueden aparecer efectos de indistinguibilidad que no se dan cuando la capacidad es menos sofisticada; por ejemplo, la anomalía de Poincaré tantas veces citada.

8. UNA INCURSION EN LA SINONIMIA.

1.8. Si $X=\{x_1,\dots,x_n\}$ es un universo de objetos y $T=\{t_1,t_n,\dots\}$ un conjunto de términos lingüísticos aplicables a los x_i, sea: $L \subset XxT$, la relación que asocia a cada x_i con uno ó varios términos lingüísticos. Con ello, el *significado extensional*(12) de cada término $t_j \in T$ puede definirse como el conjunto $E(t_j)=\{x_i \in X; (x_i, t_j) \in L\} \subset X$, de los objetos de X con el mismo nombre t_j. Con ello, puede darse la definición: *Dos términos* t_i y t_k *son sinónimos* $(t_j \sim t_k)$ si y sólo si $E(t_j)=E(t_k)$.

Está claro que $\sim$ es una relación de equivalencia. Como tal, tiene el serio inconveniente de no traducir el fenómeno frecuente de la rotura de las cadenas de sinonímia: $t_1 \sim t_2, t_2 \sim t_3, \dots, t_{n-1} \sim t_n$, pero $t_1 \not\sim t_n$.

Es que, al decir del Diccionario la Lengua Española, *dos expresiones son sinónimas cuando tienen una misma o muy parecida significación*, por lo que una definición realista de sinonímia ha de ser de carácter mas bien aproximado que no exacto.

¿Cómo acercarse a una tal definición? Es decir, ¿cómo expresar un "parecido" de significado; un "parecido" entre $E(t_j)$ y $E(t_k)$? Por lo dicho anteriormente, una forma tal vez ingenua es través de la diferencia simétrica

$$E(t_j)+E(t_k)=E(t_j)\cup E(t_k)-E(t_j)\cap E(t_k);$$

más concretamente, para tener una evaluación numérica, un grado, por medio de: $I(t_j,t_k)=1-\frac{1}{n}\left|E(t_j)+E(t_k)\right|$, donde $|A|$ indica el número de elementos del subconjunto $A\subset X$. Es evidente que $I(t_j,t_j)=1$ y que $I(t_j,t_k)=I(t_k,t_j)$, para cualesquiera términos t_j, t_k.

Es fácil ver, usando funciones características que:

$$\left|E(t_j)+E(t_k)\right|=\sum_{i=1}^{n}\left|\varphi_{E(t_j)}(x_i)-\varphi_{E(t_k)}(x_i)\right|;$$

por lo tanto,

$$I(t_j,t_k)=1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\varphi_{E(t_j)}(x_i)-\varphi_{E(t_k)}(x_i)\right|.$$

Con ello, es inmediato comprobar que $W(I(t_j,t_k),I(t_k,t_q))\le I(t_j,t_q)$, para cualesquiera términos t_j,t_k y t_q; y el grado de sinonímia I es un operador de indistinguibilidad al nivel 1, respecto de T=W. Por tanto, fijado un conveniente umbral de sinonimia $s\in(0,1)$, cabe definir la relación aproximada de sinonimia:

$t_j \approx t_k(s)$ ssi $1 - s \leq I(t_j, t_k)$ que, como es sabido, es reflexiva y simétrica pero no–transitiva, en general, y que permite considerar la rotura de las cadenas de sinonimia.

Ejemplo. Con $X=\{x_1,\ldots,x_7\}$ y $T=\{t_1,\ldots,t_4\}$, sea:

$$L=\{x_1,t_1),(x_2,t_1),(x_2,t_2),(x_3,t_2),(x_3,t_3),(x_4,t_2),\\ (x_4,t_3),(x_5,t_3),(x_5,t_4),(x_6,t_4),(x_7,t_4)\}.$$

Son:

$$E(t_1)=\{x_1,x_2\},\ E(t_2)=\{x_2,x_3,x_4\}\\ E(t_3)=\{x_3,x_4,x_5\},\ E(t_4)=\{x_5,x_6,x_7\}.$$

Con ello,

$$I(t_1, t_2) = 1 - 3/7,\ I(t_2, t_3) = 1 - 2/7,\ I(t_3, t_4) = 1 - 4/7,\ I(t_1, t_4) = 1 - 5/7$$

Si $s = 0.6 \in (4/7,5/7)$, está claro que es

$$t_1 \approx t_2\ (0.6),\ t_2 \approx t_3(0.6),\ t_3 \approx t_4(0.6),$$

y que, no obstante, $t_1 \not\approx t_4(0.6)$.

2.8 Tanto el índice o grado de sinonimia I, como el umbral s del ejemplo, se han tomado de manera artificial. En cada caso, las consideraciones sobre X,T y L pueden llevar a operadores I, y a umbrales s, más realistas.

Por otra parte, en un contexto aproximado las asociaciones (x_i,t_j) serán, ellas mismas, una materia de grado; es decir, que L podrá ser una relación "fuzzy" $L: XxT \rightarrow [0, 1]$, con: $L(x_i,t_j)$=grado entre 0 y 1 con el t_j se aplica a x_i. Con ello, los antiguos subconjuntos $E(t_j)$ serán subconjuntos borrosos de X, dados por sus funciones de pertenencia $E(t_j)(x_i)=L(x_i,t_j)$, y permitirán definir índices de sinonimia a partir de ellos.

Por ejemplo, con

$$g: T \rightarrow (0, 1],\ g(t_j) = \operatorname*{Max}_{x_i \in X} E(t_j)(x_i),$$

cabría definir $I_g(t_j, t_k) = \mathrm{Min}\,(g(t_j), g(t_k)) / \mathrm{Max}(g(t_j), g(t_k))$, que da un índice que sería un operador de indistinguibilidad al nivel 1, respecto de T=Prod. Análogamente, de tomar $I(t_j,t_k)=\mathrm{Min}(g(t_j),g(t_k))$, tendríamos un índice que sería un operador de nivel

$$\operatorname*{Min}_{1 \leq i \leq n} g(x_i),$$

respecto de T=Min.

9. UN EJEMPLO "FUZZY" SOBRE UN SEMIGRUPO DE FUNCIONES.

9.1 En la teoría de los subconjuntos borrosos de un referencial X, es usual decir que dos de ellos A y B son *iguales* cuando sus funciones de pertenencia μ_A y μ_B coinciden; es decir:

$$A=B \text{ ssi } \mu_A(x) = \mu_B(x) \text{ para todo } x \in X.$$

Sin embargo hay que tener en cuenta dos factores que, en la teoría, hacen esa definición poco realista. En primer lugar está el hecho de que siendo A y B las *extensiones*[22] en X de sendos predicados vagos, o términos lingüísticos, $\bar{A}$ y $\bar{B}$ (que les dan nombre), debe ser $A = B$ ssi $\bar{A}$ es lógicamente equivalente a $\bar{B}$ sobre X. Es decir, A=B ssi Para todo $x \in X$, la proposición "x es $\bar{A} \leftrightarrow \bar{B}$" es verdadera, para un adecuado bicondicional $\leftrightarrow$.

En segundo lugar está el hecho de que cada μ_A está definida como: $\mu_A(x) =$ grado en que $x \in X$ verifica $\bar{A}$, y que tal grado no siempre puede calcularse directamente, y mucho menos con precisión absoluta.

9.2 Con un operador $(\bar{A}, \bar{B}) \mapsto I(\bar{A}, \bar{B}) = (\bar{A} \to \bar{B}) \& (\bar{B} \to \bar{A})$, cabe escribir la equivalencia lógica entre $\bar{A}$ y $\bar{B}$ sobre X por medio de:

Para todo $x \in X$, "x es $I(\bar{A}, \bar{B})$" es verdadera.

No obstante, supuesto que la lógica subyacente a la teoría de los subconjuntos difusos de X es multivaluada, parece razonable asociar a cada par $(\bar{A}, \bar{B})$ de predicados sobre X un operador $I(\bar{A}, \bar{B}) \in [0, 1]^X$, y traducir ' "$x$ es $I(\bar{A}, \bar{B})$" es verdadera ' por $I(\bar{A}, \bar{B})(x) \geq s$, para un determinado nivel $s \in (0, 1]$.

Nota. cada t-norma T en [0,1] puede extenderse a $[0,1]^X$, por: $\tilde{T}(\mu_1, \mu_2)(x) = T(\mu_1(x), \mu_2(x))$, para cada par de funciones μ_1, μ_2 en $[0,1]^X$ y cada x en X. Evidentemente, $\tilde{T}$ hereda las propiedades asociativa y conmutativa de T. Si se definen:

- El orden (parcial) $\mu_1 \leq \mu_2$ ssi $\mu_1(x) \leq \mu_2(x)$
- Las funciones $\tilde{1}(x) = 1$ y $\tilde{0}(x) = 0$,

para todo $x \in X$, es:

- Si $\mu_1 \leq \mu_2$, entonces $\tilde{T}(\mu_1, \mu) \leq \tilde{T}(\mu_2, \mu)$
- $\tilde{T}(\tilde{1}, \mu) = \mu$, $\tilde{T}(\tilde{0}, \mu) = \tilde{0}$,

para cada $\mu \in [0, 1]^X$.

Por lo tanto, $\left([0, 1]^X, \tilde{T}, \leq; \tilde{1}\right)$ es un semigrupo conmutativo ordenado, con neutro $\tilde{1}$ y absorbente $\tilde{0}$.

9.3. Así, para cada par de conjuntos borrosos parece más realista que dar la *igualdad* punto a punto, dar un grado de indistinguibilidad, para un operador adecuado al contexto en que se manejen los predicados que les dan nombre. Operador que será de indistinguibilidad entre las funciones de pertenencia a través de las que operamos con los subconjuntos borrosos.

Ejemplo. Si la única imprecisión reside en el cálculo exacto de los valores $\mu_A(x)$, cabe considerar:

$$I(\mu_A, \mu_B) = 1 - |\mu_A - \mu_B|,$$

es decir,

$$I(\mu_A, \mu_B)(x) = 1 - |\mu_A(x) - \mu_B(x)|,$$

para cada $x \in X$.

Obviamente,

$$I(\mu_A, \mu_A) = \underset{\sim}{1} \text{ y } I(\mu_A, \mu_B) = I(\mu_B, \mu_A).$$

Además:

$$\underset{\sim}{W}(1 - |\mu_A - \mu_B|, 1 - |\mu_B - \mu_C|)(x) = W(1 - |\mu_A(x) - \mu_B(x)|, 1 - |\mu_B(x) - \mu_C(x)|)$$
$$\leq 1 - |\mu_A(x) - \mu_C(x)| = I(\mu_A, \mu_C)(x),$$

es decir,

$$\underset{\sim}{W}(I(\mu_A, \mu_B), I(\mu_B, \mu_C)) \leq I(\mu_A, \mu_C);$$

$I:[0,1]^X x[0,1]^X \to [0,1]^X$ es un operador de indistinguibilidad al nivel $\underset{\sim}{1}$ para $[0,1]^X$ respecto del semigrupo $\left([0,1]^X, \underset{\sim}{W}, \leq; \underset{\sim}{1}\right)$. Con él, a través de

$$A = B \quad \text{ssi} \quad I(\mu_A, \mu_B) = \underset{\sim}{1} \quad \text{ssi} \quad \mu_A = \mu_B,$$

se obtiene, como caso particular de indistinguibilidad con umbral $\underset{\sim}{1}$, la *igualdad* usual.

Si la precisión de cálculo, en cada punto $x \in X$, fuese menor o igual a un $s \in (0, 1)$, con la función $\underset{\sim}{s}(x) = s$, cabría considerar la igualdad aproximada

$$A = B(\underset{\sim}{s}) \text{ ssi } \underset{\sim}{1} - \underset{\sim}{s} \leq I(\mu_A, \mu B),$$

equivalente a $|\mu_A - \mu_B| \leq \underset{\sim}{s}$, o $|\mu_A(x) - \mu_B(x)| \leq s$, para $x \in X$. Entonces, para cada μ_A, serían indistinguibles de A aquellos subconjuntos borrosos B tales que su función de pertenencia verifique $\mu_A(x) - s \leq \mu_B(x) \leq \mu_A(x) + s$; con ello, realmente, desaparece la idea de que A está representado por una μ_A y aparece la idea de que A está representado por toda una familia de funciones en una determinada banda o entorno de una de ellas.

Obviamente, vuelve a darse la anomalía de Poincaré(21).

10. EQUIVALENCIA Y GEOMETRIA.

10.1. Si X es un conjunto y G un grupo de biyecciones $g: X \to X$, la relación $E_G \subset XxX$ definida por: $(a, b) \in E_G$ ssi Para alguna $g \in G$, es $b=g(a)$, es de equivalencia. En efecto, como $J_X(a)=a$ para todo $a \in X$ y $J_X \in G$, es $(a,a) \in E_G$; si $b=g(a)$, es $a=g^{-1}(b)$ con $g^{-1} \in G$, y la relación es simétrica. Finalmente, si $b=g_1(a)$ y $c=g_2(b)$, es $c=g_2 o g_1(a)$ con $g_2 o g_1 \in G$, y la relación es transitiva. Las clases de equivalencia módulo E_G constan de los objetos de X que son "indistinguibles" bajo las transformaciones de G:

$$[a] = \{b \in X; (a, b) \in E_G\} = \{b \in X; b = g(a), g \in G\},$$

y obviamente si $G = \{J_X\}$ es $[a] = \{a\}$ y $E_G = \{(a, a); a \in X\}$ es la llamada relación diagonal.

La *geometría definida en* X *por el grupo* de transformaciones o "movimientos" G *es*, después de Félix Klein(20), el conjunto cociente:

$$X / E_G = \{[a]; a \in X\} = \text{Geom}(X, G).$$

10.2 Veamos que, recíprocamente, toda equivalencia viene dada por un grupo de transformaciones, que todo cociente o partición es una geometría. Sea E una equivalencia en X y $X / E = \{[x]; x \in X\}$, con $[x] = \{y \in X; (x, y) \in E\}$.

Designemos por G(x) al grupo de todas las biyecciones de cada clase [x] sobre sí misma, e indiquemos por g_X a una cualquiera de ellas. Cada vez que tomemos una en cada clase, y usando el axioma de elección en el caso no–finito,podemos construir la biyección: $g(y)=g_X(y)$ para cada $y \in X, y \in [x]$. Sea $G = \prod_{[x] \in X/E} G(x)$, el conjunto de todas las biyecciones construídas de esa manera. G *es un grupo de transformaciones*: En efecto, cada g es biyectiva, $J_X \in G$, y si $g^1, g^2 \in G$ entonces $g^2 o g^1(x) = g^2_{g^1_X(x)}(g^1_X(x)) = g^2_X(g^1_X(x))$, ya que $g^1_X(x) \in [x]$; por tanto, $g^2 o g^1(x) = g^2_X o g^1_X(x)$, con $g^2_X o g^1_X \in G(x)$, de donde $g^2 o g^1 \in G$.

Sea E_G la equivalencia inducida por el grupo G:

$$(x, y) \in E_G \quad \underline{ssi} \quad y = g(x), \text{ para } g \in G.$$

Teorema. $E_G = E$.

Demostración. Si $(x, y) \in E_G$ es que para alguna $g \in G$ es g(x)=y, lo que significa $g_X(x)=y$, con $g_X \in G(x)$; por tanto, $y \in [x]$ ó $(x, y) \in E$. Recí-procamente, si (x,y) está en E ó $y \in [x]$, existe $\bar{g}_X \in G(x)$ tal que $y = \bar{g}_X(x)$; por tanto, basta tomar una cualquiera de las $g \in G$ tales que su "componente", correspondiente a la clase $[x]$, sea $\bar{g}_X$, para que y=g(x), o sea $(x,y) \in E_G$.

Así, X/E=Geom(X,G): no hay diferencia entre "clasificación perfecta" y "geometría".

Ejemplo. Si es X={a,b,c} y la equivalencia E da la participación X/E={{a}},{b,c}}, entonces el grupo G consta de las permutaciones J_X y $g = \begin{pmatrix} a & c & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$. Sin embargo, si se parte de una relación R que no es de equivalencia, no puede definirse G al no disponerse de una partición de X; así, con R={(a,a),(b,b),(c.c),(a,b),(b,a), (b,c),(c,b)} que no es transitiva, si llamamos $[x] = \{y \in X; (x, y) \in R\}$, se tiene $[a] = \{a, b\}, [b] = X, [c] = \{b, c\}$, conjuntos que dan una clasificación imperfecta pero no una partición.

No es difícil ver que si $E^1 \subset E^2$ son dos relaciones de equivalencia, entonces el grupo G^1 es un subgrupo del G^2.

10.3 Dada Geom(X,G) y una familia de subconjuntos no–vacíos de X ó "figuras",F,G,H,..., la geometría sobre X induce una geometría sobre esa familia, a través de: $F \approx H$ $\underline{ssi}$ $H = g(F) = \{x \in X; x = g(y), y \in F\}$, con $g \in G$. Obsérvese que si la familia de figuras consta de los "puntos" de X, de los singletones {x}, entonces $\{x\} \approx \{y\}$ si y sólo si $(x, y) \in E_G$: para obtener la equivalencia dada por el grupo G basta considerar todas las figuras que constan de un sólo punto.

Sea $d:[0, 1]x[0, 1] \to [0, 1]$, la llamada *distancia discreta* definida por:

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ si } x = y \\ 0, \text{ si } x \neq y. \end{cases}$$

Tal distancia coincide con la función característica de la relación diagonal de [0,1].

Consideremos las figuras F,G,H,... por medio de sus funciones características

$$\varphi_F(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } x \in F \\ 0, \text{ si } x \notin F. \end{cases}$$

Con ello, $F \approx H$ ssi $\varphi_H = \varphi_{g(F)}$, con $g \in G$.
El operador I_G definido para cada par de figuras por:

$$I_G(F, H) = \operatorname*{Sup}_{g \in G} \operatorname*{Inf}_{x \in X} d(\varphi_{g(F)}(x), \varphi_H(x)),$$

verifica, como es fácil comprobar:

0) $I_G(F, H) \in \{0, 1\}$
1) $I_G(F, F) = 1$
2) $I_G(F, H) = I_G(H, F)$
3) $\mathrm{Min}\,(I_G(F, H), I_G(H, K)) \le I_G(F, K)$,

para cualesquiera figuras F,H y K. Además:

$$I_G(F, H) = 1 \quad \text{ssi} \quad F \approx H;$$

es decir, *la congruencia de figuras en cualquier geometría puede describirse por medio de un operador de indistinguibilidad* definido a través de una distancia y respecto de la t–norma Min.

11. INDISTINGUIBILIDADES Y DISTANCIAS GENERALIZADAS.

11.1. Para cada t–norma T, es fácil ver que su operación dual $T^*(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y)$ da el semigrupo conmutativo ordenado $([0, 1], T^*, \le; 0)$, en el que el neutro es el 0 y el absorbente es el 1. Es $\mathrm{Min}^*(x,y)=\mathrm{Max}(x,y)$ con lo que, siempre, $\mathrm{Max} \le T^*$. Análogamente, $\mathrm{Prod}^*(x, y) = x + y - xy = (\mathrm{Sum} - \mathrm{Prod})(x, y)$, y $W^*(x,y) = \mathrm{Min}(1, x+y) = (\mathrm{Min}(1,\mathrm{Sum})(x,y)$; de $W \le \mathrm{Prod} \le \mathrm{Min}$, sigue $\mathrm{Max} \le \mathrm{Sum}-\mathrm{Prod} \le W^*$. Tales operaciones reciben el nombre de t-conormas(1).

11.2. Dados un conjunto X y un semigrupo ordenado $\mathcal{S} = (S, *, \le; e)$, conmutativo y con neutro e, una aplicación $d: X\mathrm{x}X \to S$ se llama una *distancia generalizada* si verifica(1)(13):

1) $d(a, a) = e$
2) $d(a, b) = d(b, a)$
3) $d(a, c) \le d(a, b) * d(b, c)$,

para cualesquiera a,b,c de X. La propiedad 3 recibe el nombre de desigualdad triangular y d se llama *separadora* si, además, verifica:

4) d(a,b)=e ssi a=b.

Los espacios métricos generalizados (X, $\mathcal{S}$, d) han sido extensamente estudiados (vid. referencias en (13)); en ellos, los entornos circulares de un punto $a \in X$, o bolas de centro a, son los subconjuntos $B_a(r) = \{x \in X; d(a, x) \le r\}$, con

$e < r \in S$, y son los subconjuntos fundamentales para el estudio de las diversas topologías que pueden definirse en tales espacios.

Está claro que las distancias ordinarias son las distancias generalizadas respecto del semigrupo $(R^+, +, \leq; 0)$.

11.3. Si I es un operador de indistinguibilidad de nivel 1 respecto de una t–norma T para X, entonces la aplicación dual $d_I: XxX \to [0, 1]$, definida por $d_I(a, b) = 1 - I(a, b)$, verifica:

1) $d_I(a, a) = 1 - I(a, a) = 0$

2) $d_I(a, b) = 1 - I(a, b) = 1 - I(b, a) = d_I(b, a)$

3) $d_I(a, c) = 1 - I(a, c) \leq 1 - T(I(a, b), I(b, c)) =$
$T^*(1 - I(a, b), 1 - I(b, c)) = T^*(d_I(a, b), d_I(b, c))$,

para cualesquiera a,b,c de X; es decir, d_I es una distancia generalizada en X respecto del semigrupo $([0, 1], T^*, \leq; 0)$.

Recíprocamente, dada una distancia generalizada d en X respecto de una t–conorma T^*, la misma demostración anterior enseña que el operador $I_d: XxX \to [0, 1]$ definido por $I_d:(a, b) = 1 - d(a, b)$, es un operador de indistinguibilidad respecto del semigrupo $([0, 1], T, \leq; 1)$.

Está claro que si I fuese de nivel s, entonces d_I verificaría también las propiedades 2 y 3, pero en lugar de 1 valdría $d_I(a, a) \leq 1 - s$. Por ejemplo, dado $I(x, y) = 1 - x - y + 2xy$, la función $d_I(x, y) = x + y - 2xy$ verifica la desigualdad triangular y la propiedad de simetría, pero $d_I(a, a) \leq 1/2$, para cada $a \in X$.

Nota. Si I es un operador de indistinguibilidad respecto de T=Min, es $d_I(a, c) \leq Max(d_I(a, b), d_I(b, c)) \leq d_I(a, b) + d_I(b, c)$. Las distancias generalizadas respecto de T*=Max reciben el nombre de ultramétricas y son, *a fortiori*, distancias ordinarias.

Por todo lo dicho, las relaciones a=b(s) ssi $1\text{-}s \leq I(a,b)$ ssi $d_I(a,b) \leq s$, tienen por "clases" $[a] = \{y \in X; 1 - s \leq I(a, y)\} = \{y \in X; d_I(a, y) \leq s\} = B_a(s)$, las bolas de centro el representante de la clase. Cuando =(s) sea una equivalencia, entonces el correspondiente cociente es una partición que consta de entornos.

11.4 Dada una estructura de indistinguibilidad (X,T,I), en la correspondiente estructura métrica (X,T*,d_I) cabe considerar su *geometría métrica*, esto es, la dada por el *grupo de isometrías* o aplicaciones biyectivas $i: X \to X$ tales que $d_I(a,b)=d_I(i(a),i(b))$, para cualesquiera a,b de X. El correspondiente grupo G_I consta, por tanto, de esas i:

$$G_I = \{i: X \to X;\ i \text{ biyectiva},\ I(a, b) = I(i(b)), \forall (a, b) \in XxX\}.$$

Sin estudiar el caso general, veamos qué sucede cuando $I=\varphi_E$ es la función característica de una relación de equivalencia, en cuyo caso es T=Min e $I(a, b)=\varphi_E(a, b) \in \{0, 1\}$ para todo par a,b de X.

Teorema. Si I es la función característica de una equivalencia E, el grupo G tal que X/ E= Geom(X, G) está contenido en el G_I.

Demostración. Si $g \in G$, para todo $a \in X$ es $(a, g(a)) \in E$, es decir, $I(a, g(a)) = 1$, ó $d_I(a,g(a))=0$. Sean a,b dos elementos cualesquiera de X. Si $I(a,b)=1$ ó $d_I(a,b)=0$, de $d_I(b,g(b))=0$ sigue $d_I(g(a),g(b)) \leq Max(d_I(g(a),a), d_I(a,g(b))) = d_I(a,g(b)) \leq Max(d_I(a,b), d_I(b,g(b))=0$, por lo que $d_I(g(a), g(b))=0$ ó $I(g(a),g(b))=1$. Si fuese $I(a,b)=0$, sería $d_I(a,b)=1 \leq Max(d_I(a,g(a)), d_I(g(a),b)) = d_I(g(a),b)$, o sea $1 = d_I(g(a),b) \leq Max(d_I(g(a),g(b)), d_I(g(b),b))$, ó $d_I(g(a),g(b))=1$, e $I(g(a), g(b))=0$. En todos los casos es $I(a,b) = I(g(a), g(b))$, lo que significa que $G \subset G_I$.

Por consiguiente, podemos comparar la equivalencia dada E con la E_{G_I} dada por el grupo G_I. Si $(x,y) \in E$, es que $y=g(x)$ para $g \in G$; al ser $G \subset G_I$, es $g \in G_I$ y, por tanto:

$$(x,y) \in E_{G_I} : E \subset E_{G_I},$$

la nueva equivalencia tiene más pares que la inicial y el cociente X/E_{G_I} tiene menos clases que el X/E, al resultar sus clases de reunir clases módulo E.

Ejemplo. Sea X={a,b,c,d} y X/ E={{a,b},{c,d}}. Es fácil ver que G consta de las permutaciones:

$$J_X,\quad g_1 = \begin{pmatrix} b & a & d & c \\ a & d & c & d \end{pmatrix},\quad g_2 = \begin{pmatrix} a & b & d & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \quad y \quad g_3 = \begin{pmatrix} b & a & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}.$$

También es fácil ver que $g_4 = \begin{pmatrix} c & d & a & b \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \in G_I$ y que, no obstante, $g_4 \notin G$. Es $X/E_{G_I} = \{X\}$ y, a la vez, queda probado que en general G y G_I no coinciden.

12. INDISTINGUIBILIDAD Y FAMILIAS DE EQUIVALENCIAS.

12.1 Dada la función $f: X \to [0, 1]$, los conjuntos $(f)_r = \{x \in X; r \leq (x)\}$ para cada $r \in [0, 1]$, se llaman los *niveles de nitidez* de f. Está claro que $(f)_0=X$, y que si $r_1 \leq r_2$ entonces

$$(f)_{r_2} \subset (f)_{r_1}$$

En el caso de que $f = \varphi_A$ sea la función característica de un subconjunto A de X, los únicos niveles de nitidez son $(f)_0=X$ y $(f)_1=A$.

Ejemplo. Si

$$X = \{x_1, \dots, x_8\} \text{ y } f(x_1) = 1, f(x_2) = 0, f(x_3) = 0.7, f(x_4) = 0.3, f(x_5) = 1, f(x_6) = 0.7, f(x_7) = 0, f(x_8) = 0$$

los únicos valores significativos de r son los 1>0.7>0.3. Con ello, los niveles de nitidez f son:

$$(f)_1 = \{x_1, x_5\} \subset \{x_1, x_3, x_5, x_6\} = (f)_{0.7} \subset (f)_{0.3} = \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_6\}$$

No es difícil ver[14] que, para cada $x \in X$, es:

$$f(x) = \operatorname*{Max}_{r \in (0,1]} \operatorname{Min}(r, f_r(x)),$$

indicando por f_r a la función característica del subconjunto $(f)_r$. Este resultado se conoce como la resolución de f en su niveles de nitidez. Está claro que f=g ssi $(f)_r=(g)_r$ para cada $r \in (0, 1]$. También es:

$$f \leq g \quad \underline{\text{ssi}} \quad (f)_r \subset (g)_r$$

para cada $r \in (0, 1]$, siendo $f \leq g$ el orden puntual usual $f(x) \leq g(x)$, para $x \in X$.

La función del ejemplo 0lve:

$$f(x) = \operatorname{Max}(\operatorname{Min}(1, f_1(x)), \operatorname{Min}(0.7, f_{0.7}(x)), \operatorname{Min}(0.3, f_{0.3}(x))), \text{ para cada } x \in X.$$

12.2 De la misma forma, si $I: XxX \rightarrow [0, 1]$ se tiene la resolución: $I(x, y) = \operatorname*{Max}_{r \in (0,1]} \operatorname{Min}(r, I_r(x, y))$, siendo I_r la función característica del nivel de nitidez $(I)_r = \{(x, y) \in XxX; r \leq I(x, y)\}$, que es una relación clásica entre los elementos de X. En virtud de todo lo dicho, es equivalente dar I a dar la familia $\{r, (I)_r\}$de relaciones indexadas.

Teorema. Es $I(x,x)=1$, para todo $x \in X$, si y sólo si todos los niveles de nitidez $(I)_r$, para $r \in [0, 1]$, son relaciones reflexivas.
Demostración. Si $I(x,x) = 1$, es $r \leq I(x,x)$ siempre, por tanto $(x, x) \in (I)_r$ para todo r. Recíprocamente, si todas las relaciones $(I)_r$ son reflexivas, lo es la $(I)_1$, lo que implica $1=I(x,x)$ para todo $x \in X$.

Teorema. Es $I(x,y)=I(y,x)$ para todo par x,y de X si y sólo si todos los niveles de nitidez $(I)_r$, $r \in [0, 1]$, son relaciones simétricas.
Demostración. Si $(x, y) \in (I)_r$, sigue $r \leq I(x, y) = I(y, x)$, o $(y, x) \in (I)_r$. Recíprocamente, si todos los niveles son relaciones simétricas, es:

$$I(x, y) = \operatorname*{Max}_{r \in (0,1]} \operatorname{Min}(r, I_r(x, y)) = \operatorname*{Max}_{r \in (0,1]} \operatorname{Min}(r, I_r(y, x)) = I(y, x).$$

Teorema. Para toda terna x,y,z de X es $\operatorname{Min}(I(x,y),I(y,z)) \leq I(x,z)$, si y sólo todos los niveles de nitidez $(I)_r$, $r \in [0, 1]$, son relaciones transitivas.
Demostración. Si vale la propiedad y $r \leq I(x,y)$, $r \leq I(y,z)$, es

$$r = \operatorname{Min}(r, r) \leq \operatorname{Min}(I(x,y), I(x,z)) \leq I(x,z);$$

luego $(I)_r$ es transitiva. Recíprocamente, en todos los casos:

$$\operatorname{Min}(I(x,y), I(y,z)) \leq I(x,y), \operatorname{Min}(I(x,y), I(y,z)) \leq I(y,z);$$

por tanto, dados x,y,z en X, sea $r=\operatorname{Min}(I(x,y),I(y,z))$. Es $r \leq I(x,y)$, $r \leq I(y,z)$, lo que equivale a $1=I_r(x,y)$, $1=I_r(y,z)$; como $(I)_r$ es una relación transitiva, es $I_r(x,z)=1$ ó $r \leq I(x,z)$. Finalmente, $\operatorname{Min}(I(x,y),I(y,z)) \leq I(x,z)$, argumento que vale para cada terna x,y,z en X.

Nota. Si todas las relaciones $(I)_r$ son transitivas, como para cualquier t–norma T es $T \leq \operatorname{Min}$, se tiene $T(I(x,y),I(y,z)) \leq \operatorname{Min}(I(x,y),I(y,z)) \leq I(x,z)$. Sin embargo la primera parte del teorema anterior depende fuertemente de que sea r=T(r,r) para todo $r \in [0, 1]$, lo que implica T=Min, ya que de Min(x,y)= T(Min(x,y), Min(x,y))≤T(x,y) seguiría Min≤T≤Min.

Corolario. a) Dada $I: XxX \rightarrow [0, 1]$, la condición necesaria y suficiente para que sea un operador de indistinguibilidad respecto de T=Min es que todas las relaciones $(I)_r$, $r \in [0, 1]$, sean de equivalencia. b) Dada $I: XxX \rightarrow [0, 1]$ tal que todos los niveles de nitidez son relaciones de equivalencia, entonces I es un operador de indistinguibilidad respecto de cualquier t–norma T.

Ejemplo. Sean X={a,b,c} y las particiones X/ E_1={{a},{b},{c}}, X/ E_2= {{a},{b,c}} y X/ E_3={{a,b,c}}. Es evidente que las equivalencias son, respectivamente,

E_1= {(a,a),(b,b),(c,c)}
E_2= {(a,a),(b,c),(c,b),(b,b),(c,c)}
E_3 = XxX,

de manera que $E_1 \subset E_2 \subset E_3$. Por tanto, tomando tres números $0<r_3<r_2<r_1$, y haciendo $(I)_{r_i} = E_i (1 \leq i \leq 3)$, la función $I: XxX \rightarrow [0, 1]$ resuelta en:

$$I(x,y) = Max(Min(r_1, I_{r_1}(x)), Min(r_2, I_{r_2}(x)), Min(r_3, I_{r_3}(x)),$$

será un operador de indistinguibilidad para cualquier t–norma T. Así, con $r_1=1$, $r_2=0.7$ y $r_3=0.2$, se obtiene el operador dado por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 1 & 0.7 \\ 0.2 & 0.7 & 1 \end{pmatrix}$$

Nada más fácil que obtener, a partir de esa matriz, las tres equivalencias que son los niveles de nitidez y sus valores de nitidez.

Nota. Cada equivalencia $(I)_{r_i}$ viene definida por un grupo G_{r_i} de transformaciones en X; tales grupos verifican $G_1 \subset G_{0.7} \subset G_{0.2}$, es decir, cuanto menor es el nivel de nitidez más transformaciones definen las equivalencias.

13. EL CONCEPTO DE DIFFUSUM

Łukasiewicz definió[17], en un cálculo con una equivalencia lógica ≡, los conceptos de:

Verum de una proposición p, como la proposición $p \equiv p$
Falsum de una proposición p, como $p \equiv 0$ (siendo 0 la proposición falsa).

Por analogía, cabe definir el concepto[2][3][18] de:

Diffusum de p, como $p \equiv (p \equiv 0)$.

Para un operador de indistinguibilidad I sobre $X = [0, 1]$, respecto de una t–norma T, se puede definir, para cada $X \in [0, 1]$:

Verum V(x)=I(x,x)
Falsum F(x)=I(x,0)
Diffusum D(x)=I(x,F(x)),

para cada $x \in [0, 1]$, que son tres funciones $[0, 1] \to [0, 1]$.

He aquí algunos casos:

- Si $I(x, y) = 1 - |x - y|$, con $T = W$,
  son $V(x) = 1$, $F(x) = 1 - x$, $D(x) = 1 - 2|x - 1/2|$
- Si $I(x, y) = 1 - x - y + 2xy$, con $T = W$,
  son $V(x) = 2x^2 - 2x + 1$, $F(x) = 1 - x$, $D(x) = 2x(1 - x)$
- Si $I(x, y) = (1 - (x - y)^2)^{1/2}$, con $T = T_{0.5}$,
  son $V(x) = 1$, $F(x)(1 - x^2)^{1/2}$, $D(x) = (2x(1 - x^2)^{1/2})^{1/2}$

Obsérvese que, en los tres casos, el *Diffusum* es una función $D:[0, 1] \to R^+$ tal que:

1) $D(0) = D(1) = 0$
2) D toma el valor máximo en el punto z=F(z),

por lo que D es creciente en el intervalo [0,z] y decreciente en el [z,1]. En los tres ejemplos anteriores es, respectivamente, $z = 1/2$, $1/2$, $\sqrt{2}/2$, y los correspondientes valores máximos son $D(1/2) = 1$, $D(1/2) = 1/2$ y $D(\sqrt{2}/2) = 0.84$.

En esos casos, dado un conjunto X, para cada subconjunto borroso A de función de pertenencia μ_A, o para cada función de pertenencia de A, *la función* $D(\mu_A(x)) = (D o \mu_A)(x)$ *es una* entropía "fuzzy" o *medida de la borrosidad* de μ_A (2)(3)(18).

14. CONSIDERACIONES FINALES.

A partir de la definición unificadora de operador de indistinguibilidad en un conjunto y respecto de un semigrupo ordenado y conmutativo, se ha hecho un recorrido a través de una larga serie de ejemplos, tanto matemáticos como de otros diversos campos.

Vistas las equivalencias, o las particiones, desde el punto de vista geométrico de las transformaciones que las determinan, hay que recalcar que esos "movimientos" no son, en cada caso, arbitrarios, sino que se eligen para preservar determinadas propiedades de interés. Se clasifica, lo mejor posible, para agrupar los objetos en estudio según ciertas propiedades relevantes(20).

Las equivalencias clásicas, que dan clasificaciones perfectas, corresponden al caso de propiedades de superposición global, en tanto que en el caso general de las indistinguibilidades sólo puede hacerse referencia a superposiciones graduadas, evaluadas numérica o cualtativamente, y que sólo serán totales en casos límite.

En este sentido, los operadores de indistinguibilidad abren una ventana a comprender mejor el problema de Poincaré-Menger: Dada una clase de objetos no completamente individuados por el conocimiento que se tiene de ellos, encontrar un modelo matemático que, resumiendo lo conocido, permita establecer una relación de "parecido" suficientemente fuerte, entre los pares que tales objetos, de tal forma que refleje la frecuente anomalía de que algunos objetos no son parecidos a otros que lo son entre sí.

El presente artículo no pretende otra cosa que trazar algunos esbozos o apuntes de lo que tales estudios pueden dar de sí, aun utilizando muy elementales recurso matemáticos.

* Departamento de Inteligencia Artificial
(Universidad Politécnica de Madrid),
e Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial

15. REFERENCIAS

1. B. Schweizer y A. Sklar, 1983, PROBABILISTIC METRIC SPACES, North-Holland.
2. E. Trillas, 1982, "Assaig sobre les relacions de indistingibilitat", ACTES DEL PRIMER CONGRÉS CATALÀ DE LÒGICA, 51–59.
3. E. Trillas y L. Valverde, 1984, "An Inquiry into Indistinguishability Operators", ASPECTS OF VAGUENESS (Eds.H.J.Skala, S.Termini y E. Trillas), 231–256, Reidel Pubs.
4. H. Poincaré, 1946, EL VALOR DE LA CIENCIA, Espasa–Calpe.
5. H. Poincaré, 1946, ULTIMOS PENSAMIENTOS, Espasa–Calpe.
6. K. Menger, 1951, "Probabilistic theory of Relations", PROC. NAT. ACAD. SCI. USA, 37, 178–180.
7. K. Menger, 1979, "Geometry and Positivism. A. Probabilistic Microgeometry", SELECTED PAPERS IN LOGIG AND FOUNDATIONS, DIDACTICS, ECONOMICS, 225–234, Reidel Pubs.
8. C. Alsina y E. Trillas, 1992, "Synthesizing Implications", INT. JOURNAL OF INTELLIGENT SYSTEMS, 7,705–713.
9. E. Trillas y C. Alsina, 1992, "Some Remarks on Approximate Entailment", INTER.JOUR.OF APPROXIMATE REASONING, 6,525–533.
10. E. Trillas, 1992, "On Exact and Inexact Conditionals", PROC.IPMU'92, 649–655.
11. S. Ovchinnikov, 1984, "Representations of Transitive Fuzzy Relations", ASPECTS OF VAGUENESS (Eds. H.J.Skala, S.Termini y E. Trillas), 105–118, Reidel Pubs.
12. L. A. Zadeh, 1971, "Quantitative Fuzzy Semantics", INF. SCIENCES, 3,159–176.
13. E. Trillas y C. Alsina, 1979, INTRODUCCION A LOS ESPACIOS METRICOS GENERALIZADOS, Serie Universitaria 49, Fund.Juan March.
14. L. A. Zadeh, 1965, "Fuzzy Sets", INF.AND CONTROL, 8,338–353.

15. L. A. Zadeh, 1971, "Similarity Relations and Fuzzy Orderings", INF. SCIENCES, 3,177–200.

16. E. H. Ruspini, 1982, "Recent Development in Fuzzy Clustering", FUZZY SET AND POSSIBILITY THEORY (Ed.R.Yager), 153–147, Pergamon Press.

17. J. Łukasiewicz, 1937, "Der Äquivalenzkalkül", COLL.LOGICA, 1,145–169.

18. E. Trillas,1983, "An Approach to Fuzziness in the Setting of Łukasiewicz Logic", PROC. ISMVL' 83,222–226.

19. E. Trillas, 1983, "Sobre la *igualdad* de conjuntos borrosos", REV.REAL ACAD.CIENCIAS, LXXVI/4,895–899.

20. L. M. Blumenthal y K. Menger, 1970, STUDIES IN GEOMETRY, W.H. Freeman and company.

21. S. E. Rodabaugh, E.P. Klement y U. Höhle (Eds), 1992, APPLICATIONS OF CATEGORY THEORY TO FUZZY SUBSETS, Kluwer Ac. Pubs.

22. J. M. Terricabras y E. Trillas, 1988, "Some Remarks on Vague Predicates", THEORIA, 10,1–12.