LA FIGURE DANS LE DISCOURS GÉOMÉTRIQUE: LES FAÇONNAGES D'UN STYLE

Jean DHOMBRES*

Le thème original des figures de géométrie a l'avantage de favoriser la réflexion épistémologique comme la curiosité, voire l'invention mathématique, mais il peut aussi bien susciter l'envie de puiser dans le riche réservoir de l'histoire des mathématiques.

Sur le simple plan matériel, très rares sont pourtant les études permettant de juger la place tenue par les figures, tant dans les manuscrits que dans les livres imprimés: il y a là tout un pan de l'histoire du livre dont il reste encore à explorer les contours[1]. Il faut d'emblée constater qu'autant la fidélité au texte original fut une des règles de l'édition depuis les Humanistes, autant les figures sont considérées comme pouvant être adaptées à la typographie, au format, etc, modifiables à l'envi d'une édition à l'autre. Ce qui rend *a priori* difficile une étude historique de la figure en géométrie[2].

L'articulation entre un texte et ses figures n'a pas davantage fait l'objet de réflexions systématiques mais au moins tout mathématicien, par sa pratique de la lecture comme par sa pratique de l'écriture, a l'expérience des différentes formes possibles de cette articulation.

On comprendra aisément qu'il ne nous soit pas possible de proposer ici un panorama explicatif général sur la figure dans le discours géométrique -un tel panorama est-il même envisageable? Nous devrons nous contenter de quelques touches impressionnistes, émaillées d'allusions historiques. Nous nous proposons d'inventorier cinq rôles de la figure; il en existe d'autres et bien des variantes s'avèrent possibles.

La figure comme superposition

Avec les *Eléments* d'Euclide la figure est entrée dans la composition même d'un écrit mathématique: elle est devenue l'une des composantes de ce style. Les manuscrits les plus fiables -quoique postérieurs d'une dizaine de siècles à la rédaction des *Eléments*- montrent clairement l'insertion de figures, quelquefois leur incorporation à proprement parler puisque le texte les entoure dans les quatre directions planes[3]. On peut estimer que des six périodes constitutives selon Proclus de tout problème ou de tout théorème[4], l'exposition (εκθεσις) porte quasi nécessairement le tracé d'une figure, un tracé effectué en simultanéité avec le parcours énonciatif des données: il s'agit du dossier d'instance par lequel sont nommés les éléments de la proposition et ces noms sont dûment reportés sur la figure, comme un enregistrement. Enregistrement qui fixe la position dans l'espace

THEORIA - Segunda Época - Vol. VIII
1993, Nº 19, 51-88

et institue donc une particularisation. Voici, à titre d'exemple, l'exposition de la proposition 5 du livre I des *Eléments* relative au triangle isocèle:

"Soit un triangle isocèle ABC ayant le côté AB égal au côté AC, et que, les droites BD, CE soient les prolongements en ligne droite de AB, AC" [5].

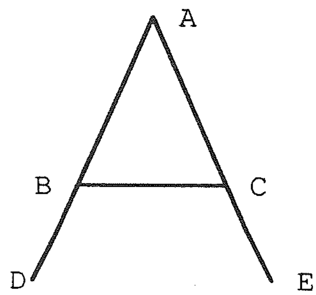


Figure 1

Symétriquement, la détermination (διορισμός) de ce qui est cherché est tout autant dite que lue sur la figure:

"Je dis que, d'une part l'angle sous ABC est égal à l'angle sous ACB, d'autre part, que celui sous CBD est égal à celui sous BCE".

Le rôle de la figure ne s'arrête pas à ces deux périodes du style adopté pour présenter une proposition puisqu'une troisième période, la construction (κατασκευη), prépare aussi bien des points, des lignes, etc.; rhétoriquement dit, cette période ajoute au donné ce qui manque pour obtenir le cherché. Le tracé sur la figure est donc suggestif, sinon heuristique.

"En effet qu'un point F soit pris au hasard sur BD, et que soit retranchée de la plus grande, AE, la droite AG, égale à la plus petite AF (Proposition 3), et que les droites FC, GB soient jointes (Demande 1)".

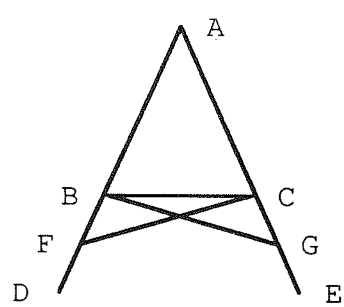


Figure 2

Singularité notable, si le texte ordonne exposition, détermination et construction en un alignement irréversible, la figure les superpose. De telle sorte qu'au final, seule la figure 2 apparaît "dans le texte", une figure qui est un calque de la figure 1 sur lequel serait venu se plaquer un second dessin (figure 3), composé quant à lui de deux droites:

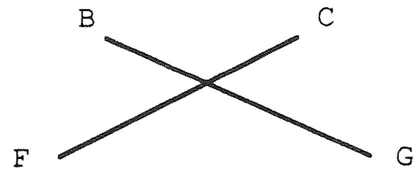


Figure 3

Un tel rôle de *superposition des données* dans une même figure est essentiel; s'il tient banalement au fait que joue la représentation spatiale, il n'en demeure pas moins que la figure infuse cette spatialité dans le texte lui-même, une contiguité par diffusion dont aussi bien se servent et se méfient les auteurs classiques. La figure n'est donc pas la simple prolongation en logique linéaire du texte écrit: elle totalise. Cet acte de superposition a dû être préparé. Le texte écrit n'est-il pas là, précisément, pour détacher la figure de sa spatialité, afin de ne pas la livrer brute[6]? On ne peut que le constater: l'économie de la figure dans la stylistique de l'Alexandrin ne relève pas du simple ajout.

Autre étape euclidienne, la démonstration (αποδειξις) tire *"scientifiquement des choses admises l'inférence proposée"* [7], tandis que la dernière étape, la conclusion (συμπερασμα), peut reprendre en coda l'énoncé initial de la proposition (πρότασις) car c'est elle qui libère des données fixées aussi bien en position spatiale (figure) que par le nom littéral: elle procède donc de l'universel.

"Donc les angles à la base des triangles isocèles sont égaux entre eux, et si les droites égales sont prolongées au-delà, les angles sous la base seront égaux entre eux".

De telle sorte que peut être affirmé, non sans triomphalisme: *"Ce qu'il fallait démontrer"*, οπερ εδει δειξαι.

Ce rôle privilégié de superposition que joue la figure -capitalisation spatiale du donné et de certaines des opérations de preuve- est tout aussi net dans les propositions que l'on pourrait qualifier d'"abstraites", celles du livre 5 des *Eléments* consacré aux proportions, figures dont la pauvreté même favorise notre analyse. Prenons à titre d'exemple l'énoncé de la proposition 2 de ce livre qui, en termes presque modernes, entend établir que pour des grandeurs a et b quelconques, et des entiers non moins quelconques n et m (positifs), na + ma est à a comme nb + mb est à b.

"Si la première (grandeur) *est le même multiple de la seconde que la troisième l'est de la quatrième, et si la cinquième est le même multiple de la seconde que la sixième l'est de la quatrième, la somme de la première et de la cinquième sera le même multiple de la seconde que la somme de la troisième et de la sixième l'est de la quatrième"* [8].

Voici l'exposition:

"Que la première AB soit le même multiple de la seconde Γ que la troisième ΔE l'est de la quatrième Z, et que la cinquième BH soit le même multiple de la seconde Γ que la sixième EΘ l'est de la quatrième Z".

La représentation de cette exposition par une figure exige évidemment une convention, celle par exemple de prendre un segment de droite comme l'image canonique d'une grandeur de genre quelconque. C'est une convention qui est loin d'être anodine! Dans la mesure où l'on peut interpréter l'objectif du livre 5 comme étant de "prouver" (à tort) que tous les rapports de grandeurs d'un même genre -les raisons- se réduisent aux seuls rapports de longueurs géométriques[9].

Cette convention admise, à proprement parler deux figures[10] devraient apparaître pour une telle exposition, une figure portant l'une sur les grandeurs 1, 2, 3 et 4 (figure 4) et une autre sur les grandeurs 5 et 6 (figure 5).

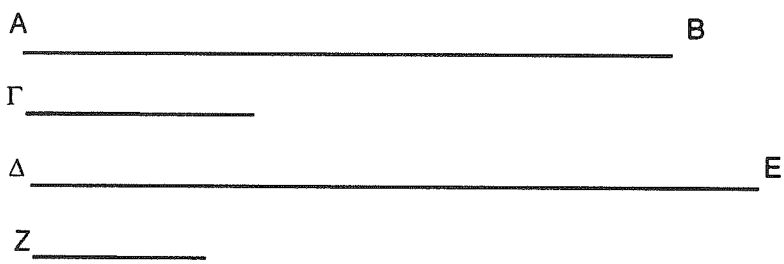


Figure 4

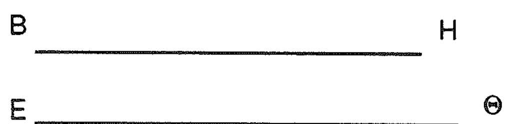


Figure 5

Toutefois, l'utilisation dans l'exposition de la même lettre B pour des points qui pourraient être distincts dans les figures 4 et 5, et surtout l'idée qu'il va y avoir au final une addition des grandeurs AB et BH, font qu'une seule figure est réalisée, alignant les trois points A, B et H (et de même alignant les trois points Δ, E et Θ). C'est la figure 6 qui apparaît ordinairement dans les éditions d'Euclide et, en jouant de l'alignement, elle synthétise la donnée de la proposition: *c'est bien une capitalisation, mais elle s'enrichit du spatial*[11]. Une façon de s'en convaincre est de vérifier que la figure n'est pas traçable au fur et à mesure que se lit l'exposition: il faut bien en attendre l'achèvement. De sorte que, pour le lecteur, la vision simultanée de la figure déjà tracée sur la page oriente indéniablement sa compréhension du texte écrit.

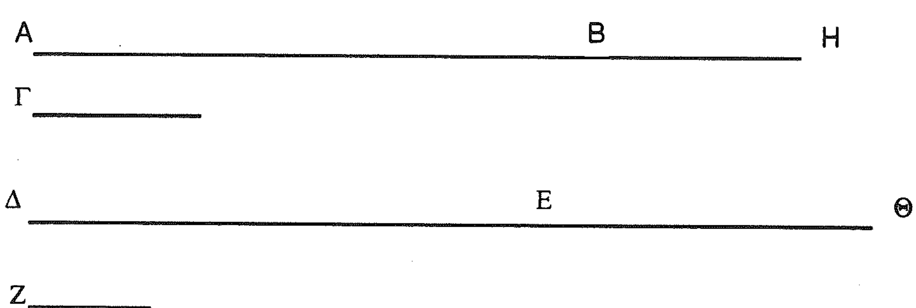


Figure 6

L'alignement une fois adopté, la phase de détermination de la proposition 2 du livre V ne requiert rien de plus quant à la figure: *"Je dis que la somme de la première et de la cinquième AH sera le même multiple de la seconde Γ que la somme de la troisième ΔΘ l'est de la quatrième Z".*

La construction elle-même pourrait cependant faire intervenir des points supplémentaires dans la mesure où l'on doit utiliser le fait que "*AB est le même multiple de Γ, que ΔE l'est de Z*", etc, et donc, pour bien marquer cette égale multiplicité, on pourrait placer des points intermédiaires entre A et B et entre Δ et E. De fait, aide visuelle ou rappel des données, la figure fournie dans certaines éditions des *Eléments* porte ces points, mais sous une forme quasiment muette (comme le texte euclidien lui-même qui omet d'énoncer les points intermédiaires), soit sous la forme de blancs[12] séparant les parties constitutives des segments AB, ΔE, etc, soit sous la forme de petits traits verticaux marquant cette décomposition, traits qui brisent l'alignement (figures 7 et 8). Ces traits ou ces blancs ne sont pas fréquemment utilisés par les éditeurs d'Euclide, sans doute parce qu'éléments extérieurs, ils introduisent dans le dessin une hétérogénéité que le texte écrit ne comporte pas. Sur cet exemple simple, la difficulté consiste néanmoins dans la représentation simultanée de deux concepts antithétiques, le continu d'une part et le discret d'autre part.

Figure 7

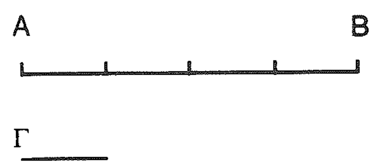


Figure 8

Essayons de formuler une description générale après ces quelques exemples pris dans les différents livres des *Eléments*. La figure, chez Euclide et partant chez de très nombreux successeurs, est un résumé spatial, une superposition des étapes de ce discours en plusieurs actes que représente une proposition[13]. La tentation est grande de dire tout simplement que la figure n'est que l'exhibition concrète des données et des constructions. Pertinent, ce jugement n'en est pas moins trop réducteur et de toute façon ne rend pas compte de l'articulation entre l'abstrait que serait le texte et le concret des lignes tracées. Car la figure dispose d'une certaine autonomie par rapport au texte écrit: elle n'en est pas la simple illustration, elle indique des choses non explicitement dites dans l'énoncé. Cette marge d'autonomie, chez Euclide, me paraît relever de la spatialité, et par conséquent elle opère dans un non-dit factuel, le lieu précisément dont parle la géométrie.

Pour mieux exprimer cette autonomie, et en mesurer tout autant les limites, nous prenons la proposition 39 du livre 11 qui nous fait adopter un cas où joue la géométrie dans l'espace pour laquelle précisément la rencontre de deux droites n'est pas toujours une évidence:

"Si l'on coupe en deux parties égales les côtés des plans opposés d'un parallélépipède, et si par leurs sections on mène des plans, la commune section de

ces plans et le diamètre du parallélépipède se couperont mutuellement en deux parties égales" [14].

Sans figure, la signification de ce texte n'est pas immédiate. Fournissons à la fois l'exposition et la détermination de la proposition pour lesquelles il convient d'emblée de souligner la convention de repérage d'un plan par deux lettres, convention utilisée aux dépens de l'homogénéité aussi bien pour un parallélogramme que pour un parallélépipède[15].

"Que les côtés des plans opposés ΓZ, AΘ du parallélépipède AZ soient coupés en deux parties égales aux points K, Λ, M, N, Ξ, Π, O, P, et par ces points menons les plans KN, ΞP; que la commune section de ces plan soit YΣ, et que le diamètre du parallélépipède AZ soit ΔH; je dis que YT est égal à TΣ et ΔT égal à TH".

Voici la figure usuellement associée à cet énoncé. Sur celle-ci, on constate -ce que l'énoncé ne porte pas- deux coupures de nature différente du parallélépipède, l'une réalisée par la diagonale ΔH et l'autre à partir de deux plans médians KΛNM et ΞOPΠ. Ces deux plans s'intersectent selon la droite YΣ, sorte de droite milieu. La figure appelle la comparaison de la diagonale ΔH et de cette droite milieu YΣ.

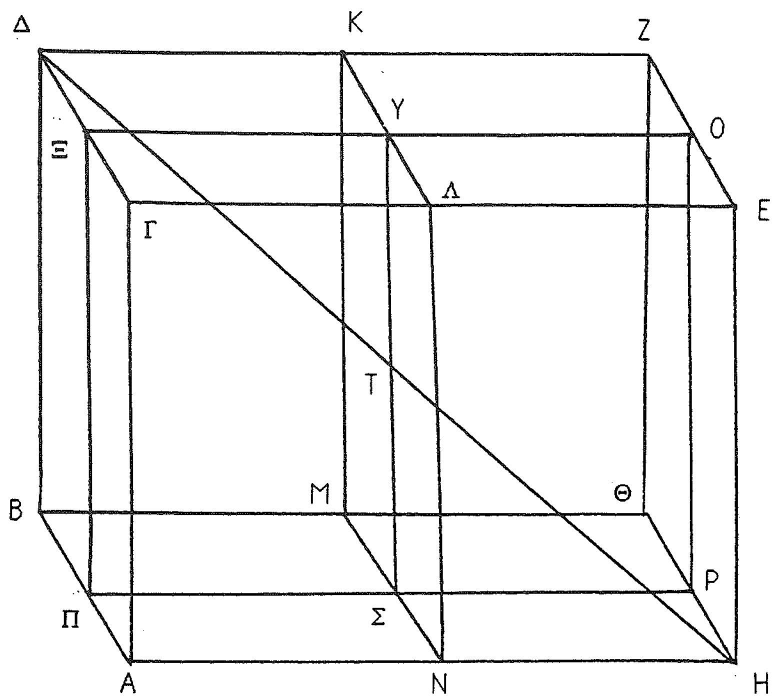


Figure 9

C'est au cours de la "construction" que sont effectivement menées les droites ΔY, YE, BΣ, ΣH; elles ne sont pourtant pas représentées dans la figure. C'est à ce niveau qu'intervient le point B, quant à lui non nommé dans l'exposition. D'ailleurs, économie possible des notations littérales, le huitième sommet E du parallélépipède pourrait ne pas être nommé[16], sommet du parallélogramme dont les trois autres sommets sont Δ, B et H. Si, richesse autonome du spatial, la figure montre l'essentiel avec la rencontre des droites ΔH et YΣ, ou si à tout le moins elle indique que cette rencontre requiert une preuve à partir de laquelle seulement peut se poser la question de la place du point de rencontre sur ces deux segments, pourtant n'est pas prise en compte l'aide visuelle que la figure apporterait par le tracé effectif des diagonales ΔE (ΔY et YE) et BH (BΣ et ΣH). Le tracé délimiterait en effet le plan ΔEHB, dont la rencontre avec le plan KΛNM détermine à son tour la droite YΣ qui exprime la rencontre des droites ΔH et YΣ. L'absence de ce tracé provient à n'en pas douter de la convention de désignation d'un plan comme ΔEHB par deux lettres seulement ΔH. De sorte que cette convention, qui n'intervient pas dans le déroulement logique de la preuve, n'est guère neutre quant à l'articulation texte-figure: elle la gère au point de gommer une partie du contenu spatial autonome que comporte le dessin. Source d'enrichissement, l'indéniable autonomie de la figure dans l'organisation de la démonstration comporte donc des limites.

En s'inscrivant dans le texte, la figure relève du style même de composition des *Eléments*, ce qui la contraint en plus d'un sens et contraint tout autant la lecture. Ainsi, prenons la démonstration de la célèbre proposition 47 du livre I, ce qu'il est convenu aujourd'hui d'appeler le théorème de Pythagore[17]:

"Dans les triangles rectangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle droit est égal aux carrés sur les côtés contenant l'angle droit"[18].

Si, en ce premier livre des *Eléments*, Euclide entend éviter tout usage de triangles semblables puisqu'il a placé la similitude au livre 6, après la théorie des proportions du livre 5, sa démonstration ne fait pas plus ressortir le "mouvement géométrique", la transformation systématique d'un point en un autre, et partant la figure tracée omet des droites qui visualiseraient naturellement ce mouvement. C'est en ce sens que la figure est contrainte de suivre l'économie de la preuve, au-delà du discours écrit. Voici, en effet, la figure usuellement fournie, munie ici de lettres latines; l'angle en A étant droit, les carrés ACKH et ABFG construits sur les côtés sont donc tels que sont alignés les points G, A et C comme aussi le sont les points B, A et H.

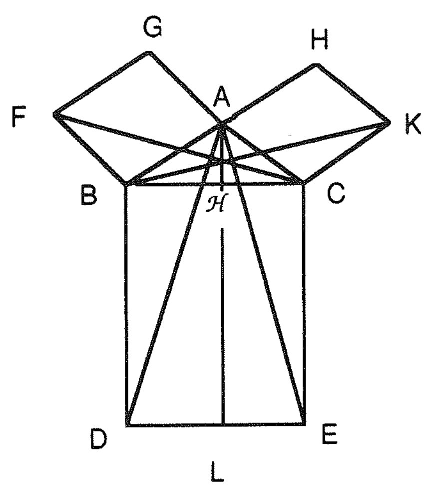


Figure 10

La droite AL, hauteur du triangle rectangle BAC, qui est encore une droite parallèle aux côtés BD et CE du carré sous l'hypoténuse, est la première droite construite dans la preuve euclidienne. Cette droite divise le carré BCED en deux rectangles BDL$\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}$LEC, qu'à son habitude Euclide désigne par deux sommets opposés seulement comme BL, ce qui lui évite en particulier l'intervention du pied $\mathcal{H}$ de la hauteur AL sur BC. Nous avons rajouté cette lettre sur la figure, l'écrivant volontairement $\mathcal{H}$ pour la distinguer des lettres "euclidiennes". En tout cas, le lecteur du texte comme l'observateur de la figure sont avertis: cette division en deux parties du grand carré doit avoir un sens et ce ne peut être qu'en correspondance avec les deux carrés construits sur les côtés adjacents de l'angle droit du triangle rectangle. L'aiguillon de cet avertissement n'a pas valeur de preuve, mais nous retrouvons le rôle heuristique de la figure, rôle trop préparé d'avance pour qu'à son sujet l'on puisse user du qualificatif d'intuitif.

L'ingrédient démonstratif qui fait fond sur le premier cas d'égalité des triangles dans les *Eléments* d'Euclide (Proposition 4), est l'égalité des triangles ABD et FBC, donc en particulier l'égalité de leurs aires. A partir de celle-ci, c'est une invariance d'aire (méthode dite des équivalences selon la terminologie beaucoup plus tardive de Legendre) qui joue et non pas une égalité de triangles, invariance qui peut provenir de la proposition 37 des *Eléments*, et que nous pouvons résumer par une figure:

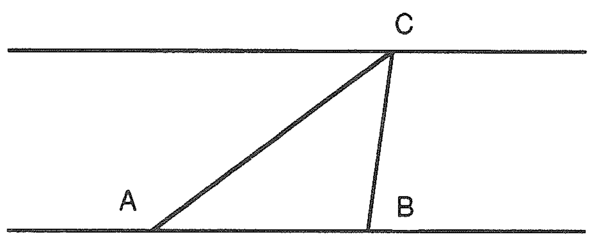


Figure 11

Si C se déplace sur une parallèle à AB, l'aire du triangle CAB reste inchangée. Porté par sa pratique des comparaisons deux à deux, qui forge le langage ultérieur des proportions, Euclide énonce plutôt: *"les triangles qui sont sur la même base et dans les mêmes parallèles sont égaux entre eux"* [19]. Appelons cela la propriété (I).

Par cette propriété (I), en se basant sur la figure 10, l'aire du triangle $\mathcal{H}$BD est égale à celle du triangle ABD, laquelle par démonstration est égale à celle du triangle CBF, aire qui, à nouveau par recours à la propriété (I), est égale à l'aire du triangle ABF. En doublant les deux aires, on a prouvé que l'aire du rectangle BDL$\mathcal{H}$ est égale à celle du rectangle ABFG: on a ainsi légitimé la construction de la droite AL et justifié la visualisation sur le carré BDEC de sa décomposition en deux autres aires ABFG et ACKH.

En effet, symétriquement, c'est-à-dire en échangeant les rôles de B et C, on dispose bien sûr de l'égalité des rectangles CEL$\mathcal{H}$ et ACKH. D'où la démonstration[20] de la proposition 47.

Or, ni sur la figure euclidienne habituellement donnée, ni dans le texte établi par Heiberg, la droite $\mathcal{H}$D ou la droite FA n'apparaissent, pas plus que les droites $\mathcal{H}$E et KA. Et leur présence n'est certes pas requise pour la preuve: du moins si l'on recourt à la notation réduite d'un rectangle par deux sommets opposés et si comme Euclide l'on procède à l'adaptation de la proposition 37 pour tenir compte du passage de l'aire d'un rectangle à celle d'un triangle (division par deux)[21]. Puisque cette notation, comme ce passage, ne nous paraissent pas aujourd'hui s'imposer alors que l'invariance de l'aire par déplacement du point est devenue usuelle (figure 11), nous venons bien de saisir en quoi peut consister une relation de dépendance de la figure par rapport au style adopté pour l'exposition, dépendance ressentie aussi bien par l'écriture.

Ne vaudrait-il pas mieux convenir qu'un discours géométrique euclidien existe dont le texte et la figure sont deux composantes en interaction? C'est un style au service de la mathématique, c'est-à-dire au service aussi bien des objets décrits que de leur insertion dans une architecture qui les expose. Contrairement à des générations et des générations de pédagogues, de logiciens et de mathématiciens, mon propos n'est certainement pas de réécrire les *Eléments*, en privilégiant ou bien le texte ou bien les figures, mais je voulais souligner à quel point la figure euclidienne est impliquée par le texte dans lequel elle s'imbrique; c'en est un élément constitutif qui est doté d'une richesse spatiale que les mots ne possèdent pas. Il serait alors vain d'opposer figure et texte, car il ne peut y avoir chez Euclide que complémentarité de l'un par rapport à l'autre[22]. Il n'est pas si banal de le dire après tant d'explications logicisantes. L'épistémologue pourrait notamment en conclure qu'Euclide n'est pas un pur tenant de l'axiomatique dans la mesure où il joue volontairement du spatial avant de l'avoir inventorié.

La figure vaine

L'illustration géométrique peut paraître inutile, notamment lorsqu'il s'agit de rendre compte de procédures algébriques, lorsqu'il faut seulement mettre en place une technique de calcul. Vaine et source d'erreurs! Un exemple nous est donné avec les règles du calcul des proportions, par exemple celle énoncée à la proposition 12 du livre V des *Eléments* d'Euclide: *"Si tant de grandeurs qu'on voudra sont proportionnelles, un des antécédents sera à un des conséquents, comme la somme des antécédents est à la somme des conséquents"* [23]. Au XVIIe siècle, un auteur tenta une figuration de cette propriété calculatoire à laquelle un nom était donné et que nous prendrons sous sa forme la plus simple[24]:

(1) $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}.$$

Voici les images choisies

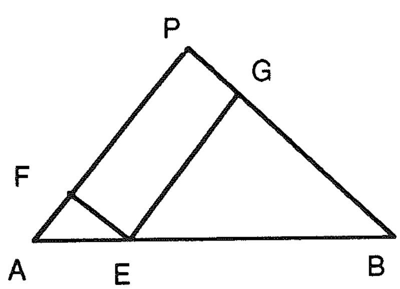


Figure 12

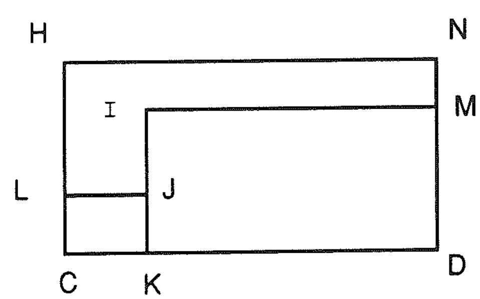


Figure 13

On part de deux segments AB et CD sur lesquels sont tracées deux figures, le triangle APB et le rectangle CDNH. Ces segments sont divisés par E et K respectivement, dans un même rapport $\frac{AE}{CK} = \frac{EB}{KD}$ et sur chacun des quatre segments ainsi générés, on construit deux par deux des figures semblables aux figures initiales. D'un côté les triangles AFE et EGB, et de l'autre les rectangles[25] CKJL et KDMI. La conclusion est que la somme des aires des figures AFE et EGB est à la somme des aires des figures CKJL et KDMI comme l'aire de la figure APB à celle de la figure CHND. Telle est la proposition 69 intervenant au livre 2 de l'*Opus geometricum*[26].

Pour que les figures illustrent la relation (1), il faut naturellement une propriété qui permette de passer des longueurs aux aires: les aires de deux figures rectilignes semblables sont dans le carré du rapport de deux longueurs homologues (Prop. 20 du livre 6 des *Eléments* d'Euclide). Dès lors, à partir de l'hypothèse de division et de (1),

$$\frac{AE}{CK} = \frac{EB}{KD} = \frac{AE + EB}{CK + KD} = \frac{AB}{CD}.$$

Soit par échange de termes moyens:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{CK10}{CD} \text{ et } \frac{EB}{AB} = \frac{KD}{CD}.$$

En passant au carré:

$$\left(\frac{AE}{AB}\right)^2 = \left(\frac{CK}{CD}\right)^2 \text{ et } \left(\frac{EB}{AB}\right)^2 = \left(\frac{KD}{CD}\right)^2.$$

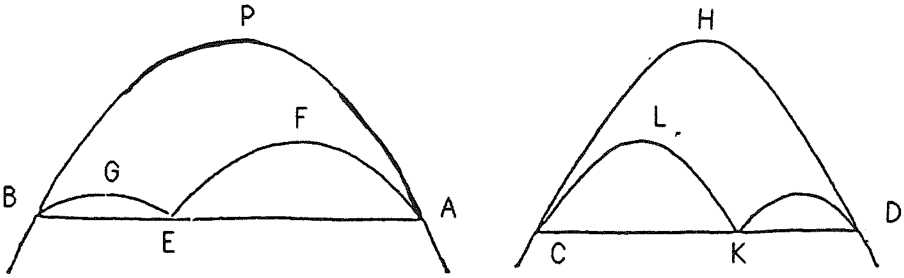
Donc

$$\frac{\text{Aire tr. AFE}}{\text{Aire tri. APB}} = \frac{\text{Aire rect. CKJL}}{\text{Aire rect. CDNH}};\ \frac{\text{Aire tri. EGB}}{\text{Aire tr. APB}} = \frac{\text{Aire rect. KDMI}}{\text{Aire rect. CDNH}}.$$

Et, grâce à (1), la conclusion annoncée[27]

$$(2) \qquad \frac{\text{Aire tr. AFE} + \text{Aire tr. EGB}}{\text{Aire rect. CKJL} + \text{Aire rect. KDMI}} = \frac{\text{Aire tr. APB}}{\text{Aire rect. CDNH}}.$$

Pour bien marquer l'universalité de (1), ce que la formulation algébrique dit facilement, Grégoire de Saint-Vincent fournit d'autres figures, où les triangles et les rectangles sont remplacés par d'autres courbes, par exemple par des cercles, ou encore d'une part des paraboles, d'autre part des hyperboles. Est à l'œuvre une véritable profusion baroque de lignes.



. Eodem modo ſi curuilinea, cum diuerſæ ſpeciei curuilineis, tres nempe parabolæ ſimiles, cum tribus hyperbolis ſimilibus, conferantur, eadem his quoque demonſtrandi ratio conueniet : cùm tam parabolæ ſimiles, quàm hyperbolæ ſint in duplicata ratione ſubtenſarum. Conſtat igitur huius theorematis vniuerſalis veritas.

Figures 14 et 15

Si le dessin est plaisant, on ne peut manquer de trouver peu probante la figuration de (1) par les figures 12 et 13, ou plutôt on doit remarquer combien le discours est nécessaire en accompagnement. Quant à l'universalité, elle reste un leurre: chez Euclide en effet, la propriété de la similitude quant aux aires est d'abord restreinte aux seules figures rectilignes, et étendue ensuite aux cercles[28] (c'est la proposition 2 du livre XII des *Eléments*). Son extension aux paraboles et hyperboles, au 17e siècle du moins, n'était en rien prouvé... on peut avancer qu'elle est gravement fautive dans un ouvrage dont le but est, précisément, de déterminer les aires relatives à de telles courbes! Et c'est vraisemblablement pour éviter un tel questionnement sur la similitude que les figures 12 et 13 paraissent si peu explicites du point de vue de la construction.

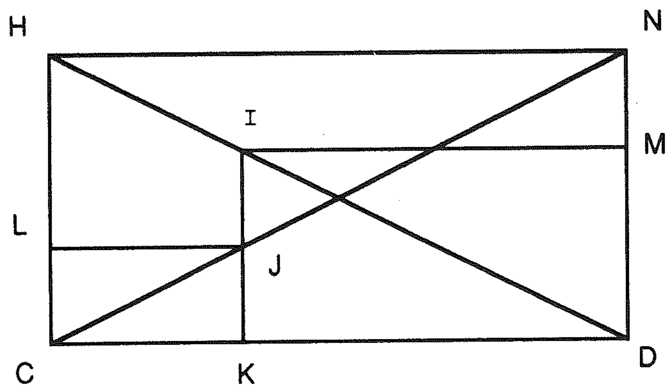


Figure 16

Or une construction des triangles semblables est des plus simples: il suffit de mener EF parallèle à BP et EG parallèle à AP. La construction des rectangles semblables n'est pas plus difficile, puisque J est situé sur la diagonale CN alors que I est sur la diagonale HD (figure 16). Ces diagonales sont pourtant absentes de la figure originale... qui n'en respecte pas moins les alignements. Voici donc un cas où la figure cache plus qu'elle ne montre.

La figure seule, la figure anodine et la figure surchargée

On pourrait gloser sur les considérations qui précèdent en rappelant la jugement selon lequel le mathématicien juge *in concreto* alors que le philosophe opère *in abstracto*. Ce concret du géomètre pourrait alors être manifesté par la figure à laquelle le texte n'apporterait qu'un commentaire discursif. Mais quel est le concret dans une proposition géométrique en dimension infinie, en géométrie p-adique, ou sur des groupes finis? Tous domaines où dans la pratique des mathématiciens jouent les figures! Les *Grundlagen der Geometrie* de D. Hilbert ne sont-ils que du concret? Ce concret ne serait-il pas un autre nom donné à l'abstrait, dès lors qu'un secteur aurait été approprié, pensé, structuré? Autrement dit, n'y aurait-il alors rien d'autre dans l'abstrait que la pure logique formelle? Ces questions ne font pas l'objet de la présente interrogation qui se contente de mettre en relief des effets de style.

On raconte qu'un mathématicien aurait un jour simplement tracé une figure et prononcé cette seule injonction: "Vois". J'ai souvent pensé qu'une telle anecdote -le paradigme de la figure seule- pouvait s'appliquer au théorème de Pythagore avec l'emploi d'un unique dessin dont on peut éventuellement ôter les lettres[29], l'angle en A étant droit[30].

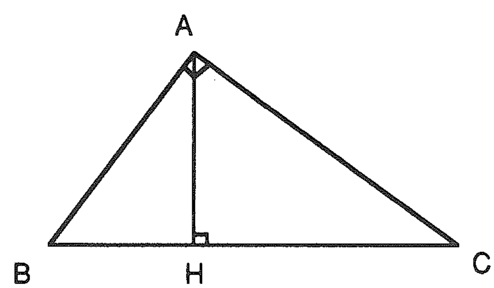


Figure 17

Les triangles rectangles ABH, CAH et CBA sont semblables et la somme des aires des deux premiers fournit -c'est là le rôle de la figure tracée- l'aire du troisième. Le résultat dit de Pythagore s'en déduit puisque le rapport de l'aire d'un des triangles au carré de son hypoténuse ne dépend pas du triangle concerné[31]. On reconnaîtra que la "vision" du résultat ne peut être provoquée que lorsque la similitude des triangles est appréhendée ou acquise[32], mais en ce cas la "figure" convenablement interprétée -c'est là le rôle du texte- est remarquablement efficace. Certes, mais ce n'est pas la figure seule! Peut-on d'ailleurs avoir une idée claire de la similitude et ignorer le théorème de Pythagore? Au mieux donc, la figure 17 serait un pense-bête, le rappel d'une structure.

Il arrive effectivement qu'au profit d'un calcul la manifestation de la similitude perde presque tout lien avec la géométrie. Un exemple nous est donné dans le *Cours de Mathématiques à l'usage des Gardes du pavillon et de la marine* de E. Bézout, à l'occasion de son traitement du théorème de Pythagore:

"Si sur les trois côtés AB, BC, AC, d'un triangle rectangle ABC (figure) on construit trois quarrés BEFA, BGHC, AILC, celui qui occupera l'hypothénuse (sic), *vaut toujours la somme des deux autres"* [33]. Voici le dessin fourni (n°102, planche IV).

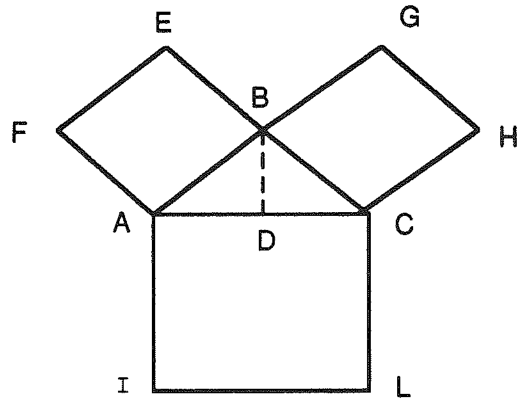


Figure 18

Ce dessin est ambigu: si la figure n'a pas la simplicité de la figure 17 qui, comme nous allons le voir, est pourtant la seule en jeu dans la démonstration, les lignes intermédiaires d'Euclide sont dûment omises. De sorte que la figure de Bézout n'apparaît au fond que comme un support de désignation des lettres: elle pourrait à la limite ne pas exister. Comme on peut le constater, la démonstration est une glose de calcul:

"Abaissons, de l'angle droit B, sur l'hypothénuse AC, la perpendiculaire BD; les deux triangles BDA, BDC seront chacun semblable au triangle ABC (112), et par conséquent les surfaces de ces trois triangles, seront entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues; on a donc cette suite de rapports égaux[34] *ABD: AB*^{2} *:: BDC : BC*^{2} *:: ABC : AC*^{2} *ou ABD : ABEF :: BDC : BGHC :: ABC : AILC; donc (Arith. 186) ABD + BDC : ABEF + BGHC :: ABC : AILC. Or il est évident que ABC vaut les deux parties ABD + BDC; donc AILC vaut ABEF + BGHC, ce qu'on peut encore exprimer en cette manière AC*^{2} *vaut AB*^{2} *+ BC*^{2}*"*.

La dernière assertion est claire: le théorème de Pythagore lui-même est réduit par Bézout à une égalité algébrique portant sur des carrés de longueurs. La spatialité est gommée; dans la figure aussi bien que dans le texte. Le rôle anodin de la figure chez Bézout n'est donc pas le fruit du hasard.

A cette figure de caractère anodin, ne faut-il pas associer une des rares figures dessinée par N. Bourbaki dans les *Eléments de Mathématiques*, par exemple au livre 5 intitulé *Espaces vectoriels topologiques*, au chapitre V qualifié *Espaces hilbertiens (Théorie élémentaire)* [35].

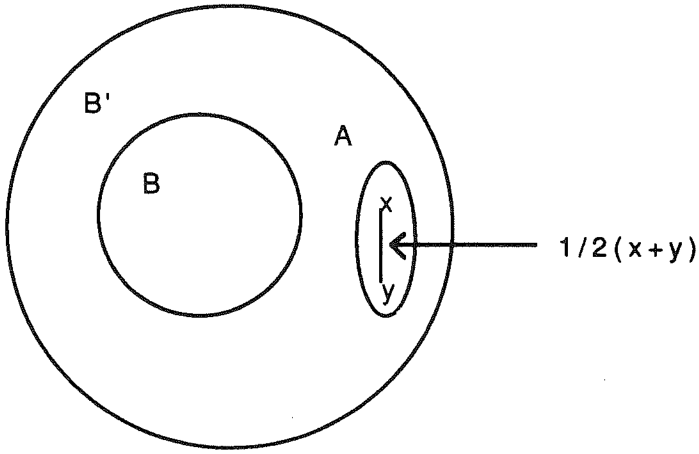


Figure 19

Et comment juger de la figure suivante, la seconde et dernière dans le livre mentionné de Bourbaki? Le contexte écrit l'éclaire en un certain sens, mais dans ces conditions, quel est son rôle que l'écrit ne porterait pas? Or ces figures sont pourtant naturelles dans la théorie des espaces hilbertiens dans la mesure où ces espaces furent conçus pour généraliser à une dimension infinie certaines des propriétés de la géométrie euclidienne usuelle.

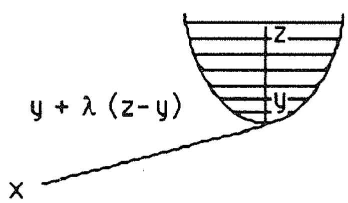
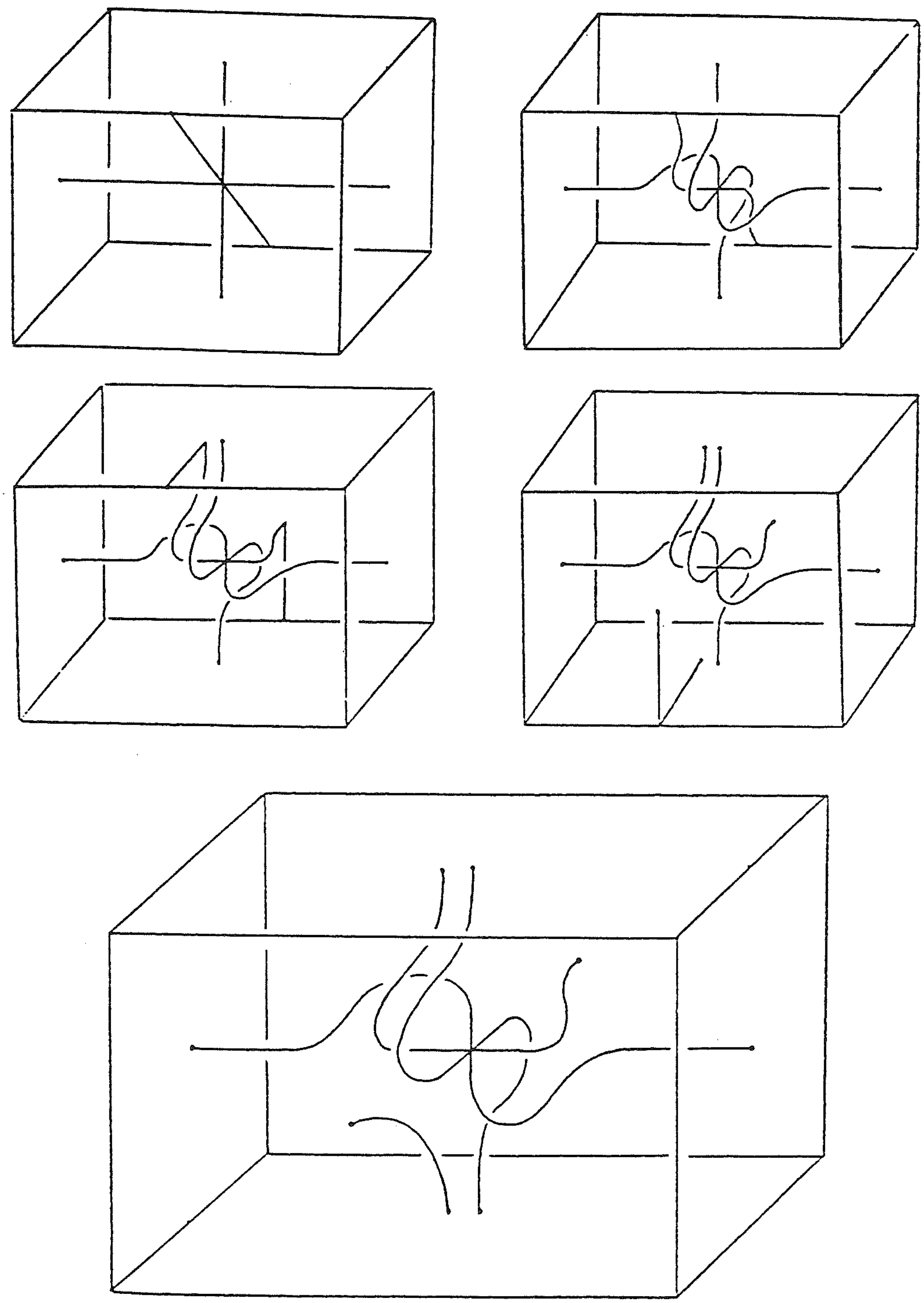
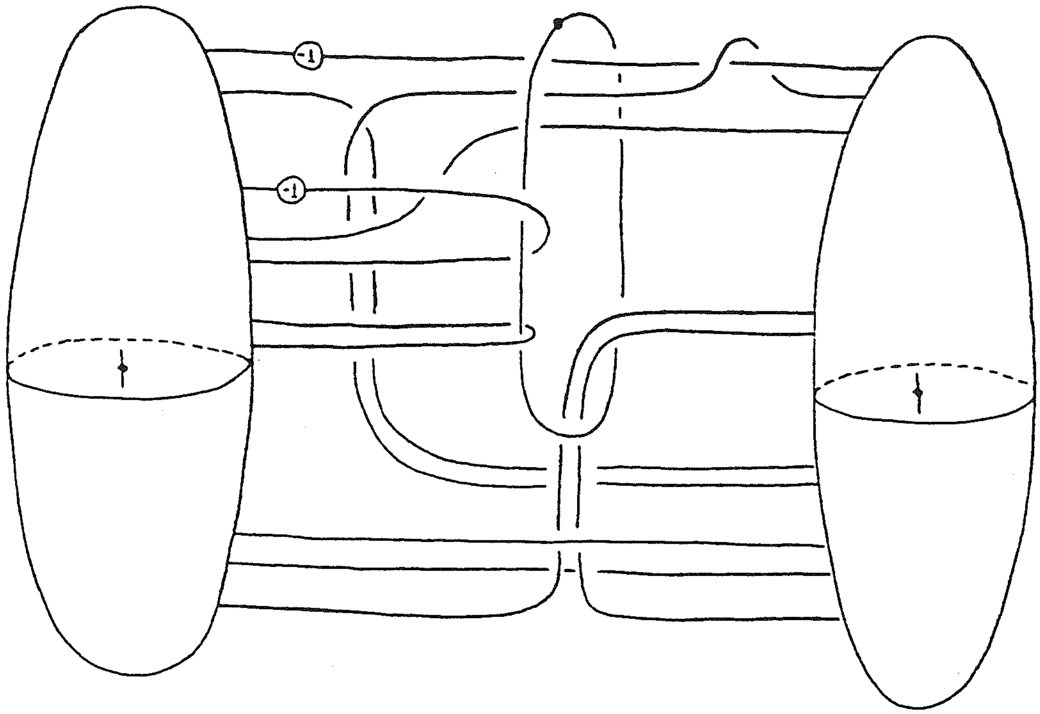
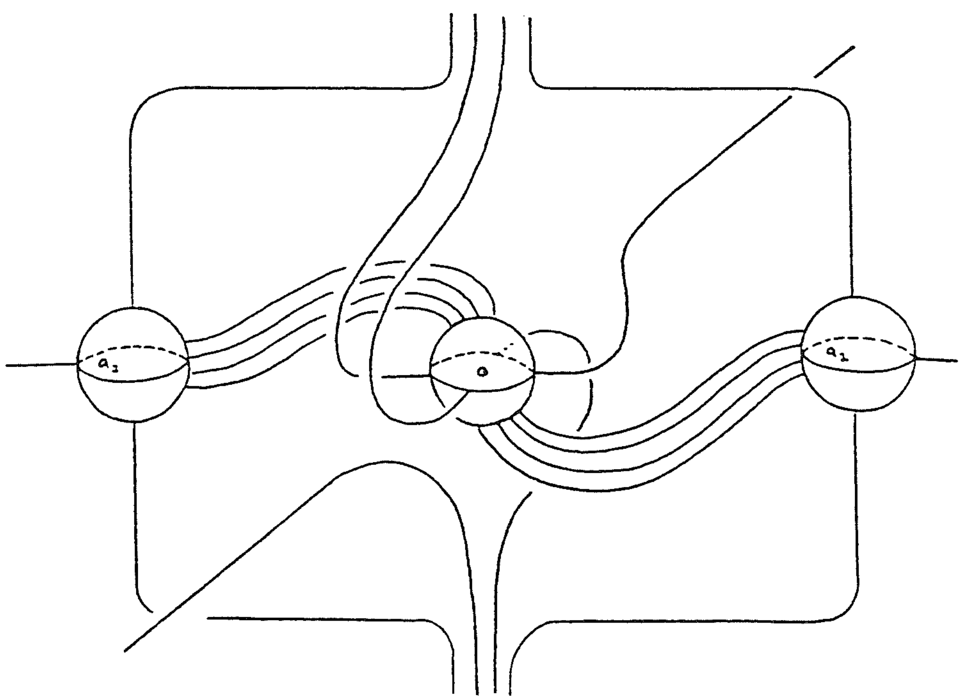


Figure 20

Il est utile d'opposer à cette façon de procéder celle où la figure porte tout le texte, comme par exemple pour la constitution d'une variété de dimension 4: les figures se suivent et les constructions disent le raisonnement. Indéniablement, il y a là une construction imagée qui apporte aux mathématiques contemporaines un aspect artisanal, sinon expérimental, quand bien même la rigueur du raisonnement ne serait pas moindre[36].




-1
-1



La tradition[37] attribue à Euclide lui-même la généralisation suivante du théorème de Pythagore:

"Dans les triangles rectangles, la figure construite sur le côté qui sous-tend l'angle droit, est égale aux figures semblables et semblablement décrites sur les côtés qui comprennent l'angle droit" [38].

Si le dessin usuellement fourni prend des rectangles comme figures construites sur les côtés alors que ces figures adjacentes ne sont pas autrement nommées, l'essentiel est l'économie majeure des lettres de cette figure: quatre seulement interviennent, précisément celles que nous avons trouvées utiles pour la figure 12. C'est que le fond de la question est la similitude cette fois -la proposition est dûment insérée au livre 6 des *Eléments* (Proposition 31)- et ces lettres suffisent à en délimiter les effets; on pourrait même ajouter que c'est la hauteur AΔ, dûment indiquée, qui est essentielle. La figure, par sa simplicité même[39], est une indication du statut théorique de la proposition, de sa place en tout cas dans l'architecture générale. Une place qui n'est pas acquise par simple filiation puisque la proposition dite de Pythagore, la proposition 47 du livre I, n'est pas du tout mentionnée. La figure "pense".

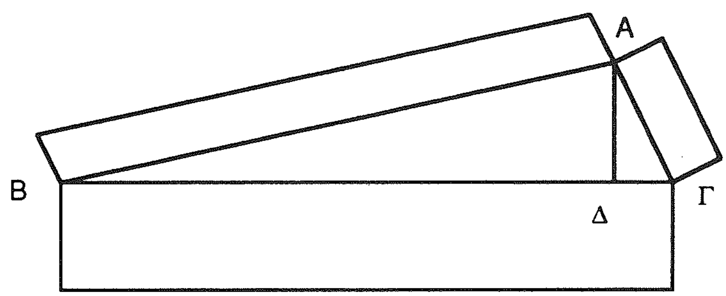


Figure 21

Le rôle de la similitude se doit donc d'être manifesté par l'écrit dans la démonstration même et vient effectivement en premier la similitude des trois triangles rectangles ABΓ, ΔBA et ΔAΓ. De sorte qu'est obtenu:

$$\frac{\Gamma B}{AB} = \frac{AB}{\Delta B},$$

et par similitude appliquée aux aires:

$$\frac{\Gamma B}{\Delta B} = \frac{\Gamma B}{AB}\,\frac{AB}{\Delta B} = \frac{\text{Aire figure sur B}\Gamma}{\text{Aire figure surAB}}.$$

De la même façon,

$$\frac{\Gamma B}{\Delta \Gamma} = \frac{\text{Aire figure sur B}\Gamma}{\text{Aire figure sur A}\Gamma}.$$

Ajoutons que de la seule mention BΓ = BΔ + ΔΓ, Euclide déduit sans tergiverser:

Aire figure sur BΓ = Aire figure sur AΓ + Aire figure sur AB,

alors que la justification de cette égalité par le calcul selon les seules règles édictées par la théorie des proportions du livre 5 nécessiterait au moins une explication[40] De fait, Euclide fait jouer pour ce dernier point une stabilité de forme sur les deux proportions en jeu, presque une symétrie de figure, mais qui est portée par une écriture, non par un symbolisme: ce qui se passe à droite (c'est-à-dire au début de l'expression rhétorique de la proportion) doit impliquer un comportement analogue à gauche (c'est-à-dire en fin de l'expression).

Aussitôt après la preuve de la proposition 31, des manuscrits proposent pourtant une autre démonstration: elle s'appuie sur le théorème de Pythagore d'une part (Prop. 47 du livre I) mais n'évite pas le jeu de la similitude quant aux aires d'autre part. Pour ce stade de la preuve, la figure elle-même peut être réduite à son plus simple appareil d'un triangle rectangle et en particulier la hauteur AΔ doit disparaître du dessin. Non pour la preuve mais pour la qualité de l'illustration, seules sont appelées à intervenir les figures semblables imaginées sur les côtés du triangle. Des auteurs inventèrent ces figures plus composées, comme Clairaut dans ses *Elémens de Géométrie* [41] et celui-ci ne dessine donc pas la hauteur. Si, par la profusion d'images, de tels auteurs obèrent le sens de la preuve, c'est qu'ils sont poussés par le plaisir du graphisme; la richesse des conclusions géométriques l'emporte sur la structure. Il y a certainement une esthétique de la figure géométrique; elle fait partie du style adopté par les mathématiciens quoique ne jouant pas le même rôle que ceux précédemment évoqués.

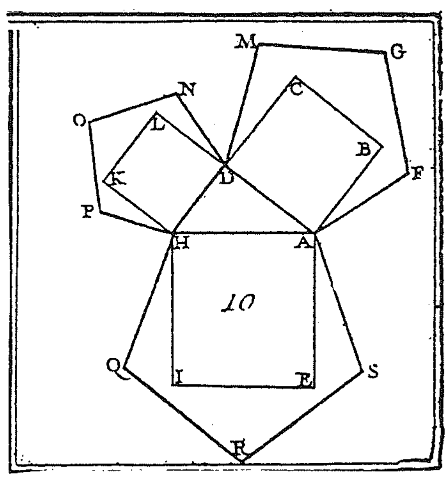


Figure 22

Capitalisant la mémoire d'un énoncé et des constructions, la figure géométrique peut s'avérer quelquefois surchargée, comme un texte où tant de choses sont soulignées que plus rien ne ressort. Je prendrai un exemple élémentaire tiré d'un ouvrage riche de propriétés, la *Géométrie du triangle*[42] de Trajan Lalesco, en choisissant une des première figures, utilisée pour expliquer le cercle des neuf points: *"Les points, H_a, H_b et H_c, pieds des hauteurs, A', B' et C' milieux des côtés, A", B" et C" milieux des segments supérieurs des hauteurs AH, BH, CH, sont neuf points situés sur un même cercle".*

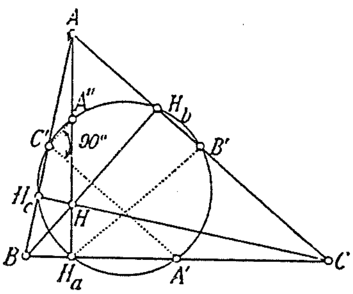


Figure 23

Certes, le nombre des traits n'est pas considérable, mais il est bien supérieur à ce qui est strictement nécessaire à la démonstration effective et si j'ai choisi cet exemple non caricatural c'est que l'on peut en faire simplement l'analyse. En effet, le procédé démonstratif de Lalesco consiste à ne pas utiliser tous les points mis en place par l'énoncé (au moins les neuf points), mais à se contenter de quelques-uns afin de faire jouer le rôle symétrique (symétrie ternaire) des trois sommets et des trois hauteurs. Voici, avec indication des orthogonalités, ce que donnerait la figure réduite à ce qui sert effectivement.

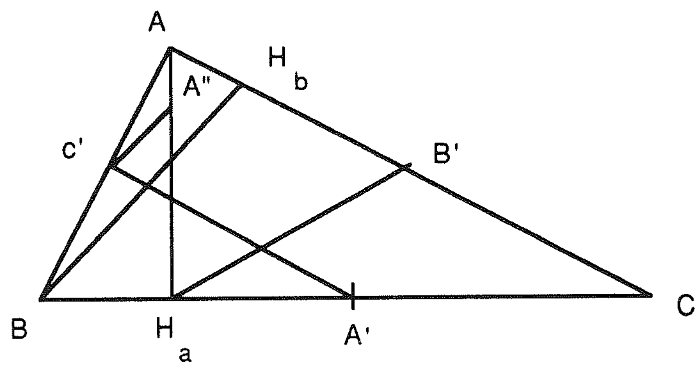


Figure 24

Les étapes de la démonstration sont en effet les suivantes:

- Les segments A'C' et H_aB' sont égaux car tous les deux valent la moitié du segment AC, le premier par le théorème des milieux et le second par l'inscription du cercle de centre B' passant par A, H_a et C.
- Les quatre point $B'C'H_aA'$, dont les deux premiers sont sur une parallèle à la droite passant par les deux derniers sont donc sur un même cercle.
- Par ailleurs l'angle A"C'A' est droit car A"C' est parallèle à BH_b (théorème des milieux) et A'C' est parallèle à AC, tandis que les droits BH_b et AC sont orthogonales.
- Comme l'angle AH_aA' est droit également, les points $A"C'H_aA'$ sont sur un même cercle.
- Ce cercle $A"C'H_aA'$ coïncide avec le cercle précédent des quatre points $B'C'H_aA'$ et contient donc les cinq points A', B', C', H_a et A".

- Par symétrie ternaire, ce même cercle contient aussi bien les deux autres pieds des hauteurs, H_b, et H_c que les deux autres milieux B" et C". C'est donc le cercle des neuf points.

Au total, il n'est pas nécessaire de tracer le ou les cercles, ni même de noter sur la figure les points H_c, B" et C". Du moins pour le profit de démonstration. Par contre, en ce qui concerne l'exposition et la conclusion, il est plaisant de faire apparaître le cercle des neuf points. Autrement dit, la surcharge, même modeste, de la figure de Lalesco provient d'un surplus de rôles: alors que le texte est linéaire, distinguant la première partie de la démonstration de la seconde au moyen d'un "Par ailleurs" très significatif, la figure quant à elle n'est pas morcelée. Il y a dysfonctionnement dans le style d'exposition. La figure n'accompagne plus le texte; elle est une mémoire où tout s'empile; elle est le tout du texte et doit en fournir la trace dans l'esprit. Le moindre des risques encourus est de ne pas simplifier la lecture[43].

Si la figure accompagnait encore le texte de Lalesco, il me semble que pour marquer les deux étapes du raisonnement relatives aux deux cercles B'C'H_aA' et A"C'H_aA', l'on devrait concevoir non pas une mais trois figures, les deux suivantes:

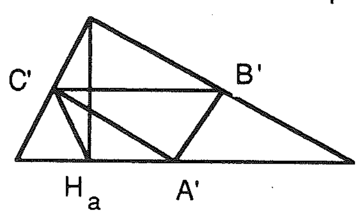


Figure 25

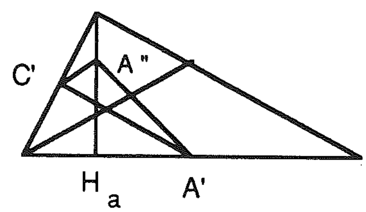


Figure 26

et une dernière figure, qui apparaîtrait en fait comme un récapitulatif en exhibant le cercle des neuf points[44].

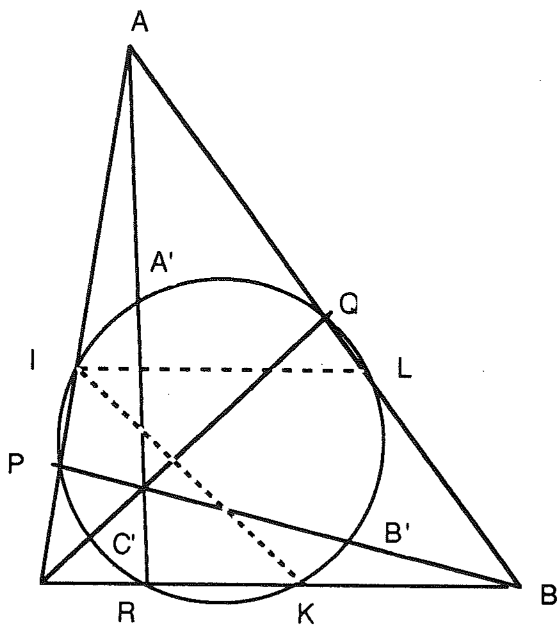


Figure 27

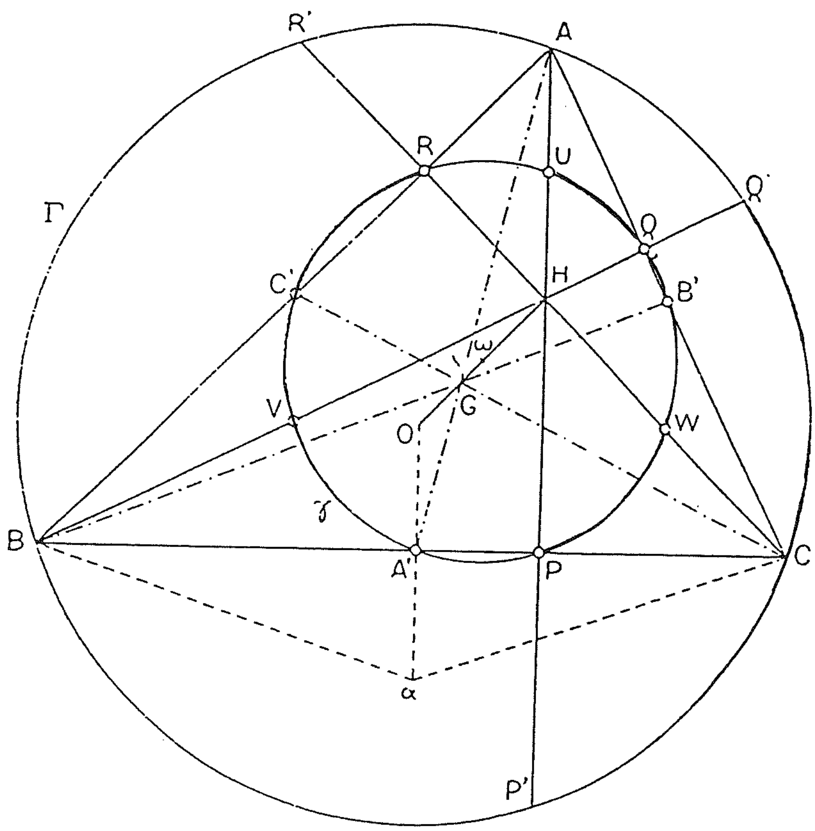
Avec cette dernière disposition, on saisit comment une figure modifie son environnement textuel en débordant le cadre d'un proposition unique. En l'occurrence en effet, le récapitulatif figuré (figure n°27) n'a de sens que si le cercle des neuf points est ultérieurement utilisé en tant que tel et sans la grille de droites qui a servi à le construire, débarrassé donc de son échafaudage démonstratif. Pour le rôle de la figure le contexte général est bien en cause, c'est-à-dire l'architecture même de tout l'écrit mathématique par la place que l'on veut faire tenir à la proposition dans l'économie globale.

Une incursion historique n'est pas ici inutile. Contrairement à une légende tenace, le cercle des neuf points ne fut pas découvert par Euler[45] mais par deux mathématiciens, alors capitaines, l'un dans l'Artillerie et l'autre dans le Génie, C.J. Brianchon (1783-1864) et J.V. Poncelet (1788-1867), qui le feront connaître dans un article paru aux *Annales de mathématiques pures et appliquées*, article[46] dont les figures furent dessinées -et signées- par l'infatigable rédacteur des *Annales*, Joseph Diez Gergonne (1771-1859). Brianchon et Poncelet étudiaient les coniques circonscrites à un quadrilatère, un problème soulevé par Gergonne lui-même qui avait dans l'idée de prouver ainsi la supériorité de la géométrie analytique sur toute autre. Mais les deux auteurs mettaient à profit leurs travaux respectifs, puisque Brianchon avait découvert le dual du théorème de Pascal sur l'hexagone inscrit dans une conique et que Poncelet jouait déjà à partir de points et droite à l'infini, jeu qu'il théorisa en 1822 avec sa *Théorie des propriétés projectives des figures*: Ce n'était donc pas la géométrie analytique qui était à l'œuvre chez les deux militaires, mais une géométrie que l'on nommera bientôt projective. Avec ces données, ils parvinrent à prouver que les centres de toutes les hyperboles équilatères circonscrites à un triangle sont sur la circonférence d'un cercle qui "*renferme les trois points milieux des côtés de ce triangle*". Comme ils avaient aussi prouvé que l'orthocentre[47] d'un triangle prend place sur toute hyperbole de cette nature, ils disposaient d'une singularité: quatre points (les trois sommets et l'orthocentre) ne déterminent pas une unique hyperbole équilatère circonscrite. Accessoirement, en jouant sur les différents triangles construits avec ces quatre points, ils disposaient bien du cercle des neuf points. Trop cartésiens pour en rester là, et accepter une preuve par le second degré (l'hyperbole), Brianchon et Poncelet fournissaient aussitôt une démonstration élémentaire du cercle des neuf points. De sorte qu'ils privilégièrent la figure n° 27 (avec les lettres adoptées) car le cercle à leurs yeux ne réalisait qu'une étape de leur travail sur le projectif, et la figure de même n'était pas un état final. Aussitôt, Brianchon et Poncelet en effet faisaient passer à l'infini l'un des sommets du triangle et décomposaient d'autant le cercle en deux droites, dont l'une à l'infini; ils reprenaient aussi le jeu hyperbolique.

Leur deuxième démonstration -élémentaire- n'est pas indifférente dans la mesure où ces géomètres que l'on qualifie souvent de purs n'hésitent pas à jouer de relations métriques, bien plus en tout cas que Lalesco qui se base sur des orthogalités et des parallélismes[48]. La figure 27, pour figure de transition qu'elle nous était apparue, se révèle ici très adaptée[49]. Les deux triangles CBQ et ABR sont semblables, soit

$$\frac{BC}{BQ} = \frac{BA}{BR},$$

donc, puisque BC = 2 BK et 2 BL = AB, vient la relation BK.BR = BL.BQ, qui est une condition métrique de cocyclicité des points K, R, L, Q (puissance d'un point par rapport à un cercle) De la même façon, symétriquement, les points K, R, I, P et P, I, Q, L sont également cocycliques. Mais, si les trois cercles ainsi exhibés étaient distincts[50], l'intersection des trois axes radicaux serait un point unique. Or, ces trois axes sont évidemment AB, AC et BC, les trois côtés du triangle. Donc, il n'y a qu'un seul cercle contenant les six points K, R, P, I, Q et L. Les triangles CDR et CBQ sont semblables, donc $\frac{CD}{CR} = \frac{CB}{CQ}$, ce qui en faisant intervenir les milieux C' de CD et K de CB fournit la cocyclicité des points C', R, K et Q (relation CC'.CQ = CR.CK). Le point C' est donc sur le cercle précédemment exhibé, et partant, de la même façon par symétrie ternaire, les points A' et B' lui appartiennent aussi. C'est le cercle des neuf points.



Cercle des neuf points
Cercle circonscript
Droite d'Euler

L'exemple que nous venons de traiter décrit une situation assez générale quant aux figures. D'ailleurs, dans les textes latins en début d'une proposition on rencontre souvent l'expression *Iisdem positis*: mêmes choses étant posées, peut-on traduire, ou encore, même disposition, c'est-à-dire même figure. De sorte que la figure sert éventuellement de lien entre les propositions, comme ces moellons qui sortent d'une facade et appellent un second bâtiment, alors que l'énoncé, ou la conclusion qui le reprend, sont le plus souvent comme des monades sans communication. A ce propos, il est significatif que les styles mathématiques aient tous tendance à privilégier les énoncés parallèles, c'est-à-dire à user, sinon abuser, de la reprise des mêmes expressions en vue de conclusions différentes; comme si les auteurs ne reculaient jamais devant la répétition. Or, simultanément, les figures sont très rarement répétées. L'explication du coût de la figure imprimée serait acceptable... Mais elle ne rend pas compte de la même attitude adoptée dans les manuscrits! Le spatial figuré ne pourrait-il pas servir de bien meilleure explication à une telle attitude, parce que le spatial figuré crée naturellement une continuité, comme une toile tissée entre les propositions et favorise ainsi la visibilité de l'ensemble des propositions, cette visée architecturale propre à toute œuvre mathématique.

Pour exprimer cette continuité jouée par le dessin, choisissons un exemple historique de plus grande ampleur[51]. Descartes est certainement un des tenants de la figure conçue comme accompagnant et enrichissant le texte, collant au plus près d'un texte, mais aussi le suivant dans son découpage en plusieurs morceaux indépendants. Or, les figures vont quelquefois plus loin que le texte lui-même. Voulant expliquer la construction des racines d'une équation du second degré $z^2 = az + b^2$, Descartes indique:

"Je fais le triangle rectangle NLM, dont le côté LM est égal à b racine carrée de la quantité connue bb, et l'autre LN est $\frac{1}{2}$ a, la moitié de l'autre quantité connue, qui était multipliée par z que je suppose être la ligne inconnue. Puis prolongeant MN la base de ce triangle, jusques à O, en sorte que NO soit égale à NL, la toute OM est z la ligne cherchée. Et elle s'exprime en cette sorte

$$z=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}\text{"}\ ^{52}.$$

En apposition au texte, la figure ajoute la représentation du cercle qui n'est pas mentionné dans le texte -c'est le procédé normal de construction de ON sur la droite NM- et la figure ajoute aussi bien le point P, intersection de ce cercle avec NM. Pour l'œil, les deux intersections P et O interviennent à parité. Or si NO = z, qui est ce que l'on recherche, la longueur MP vaut $\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}\ -\ \frac{a}{2}$; c'est au signe près la seconde racine de l'équation de départ, une racine "fausse", selon le vocabulaire adopté, parce que négative. De sorte que la figure suggère nettement plus que ce que Descartes en retient dans l'extrait fourni: il est difficile de croire qu'il ne le fait pas exprès puisqu'il a précisément donné un nom à l'intersection P. La figure fait donc le lien avec le théorème général qui sera énoncé plus loin: il y a autant de racines pour un polynôme que la puissance de plus haut degré l'indique.

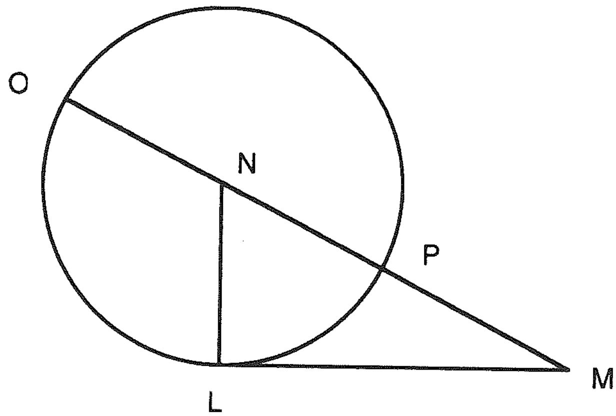


Figure 28

Dans la brillante résolution du problème de Pappus à quatre lignes, Descartes décompose la figure en plusieurs cas, selon la conique obtenue, morcelant ainsi de façon analytique le problème général. Mais précisément, la similarité de la figure de base ainsi répétée renforce l'appartenance commune des coniques à un même groupe, celui des courbes du second degré dont Descartes montre non seulement qu'elles constituent les seules solutions du problème de Pappus, mais aussi que toute conique est solution d'un certain problème de Pappus. Aussi, les figures non seulement suivent le texte, mais leur succession même calque la signification du texte; elle en adopte l'objectif qui est l'exhibition de la notion de degré d'un problème, une des découvertes majeures de la *Géométrie*.

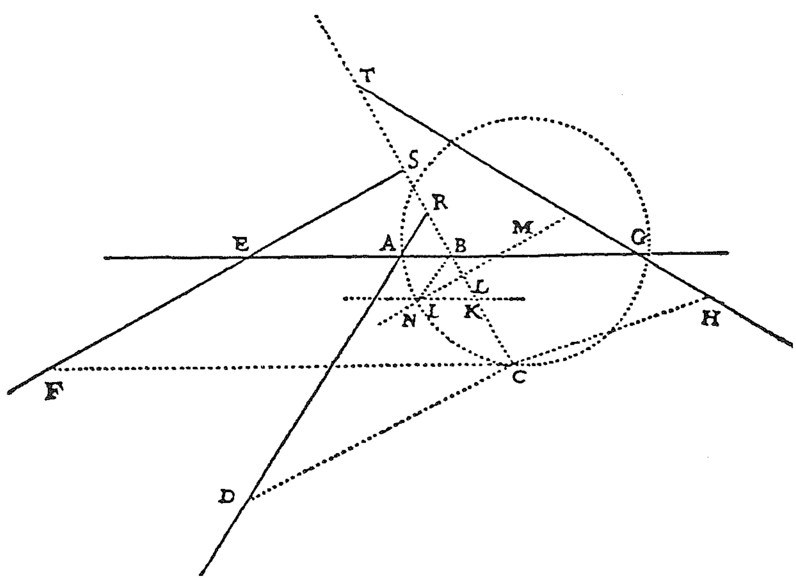


Figure 29

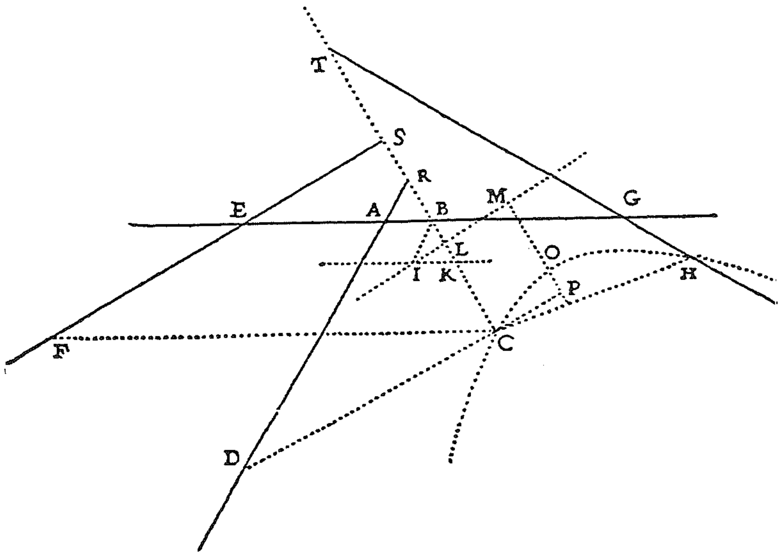


Figure 30

La spatialité de la figure peut être utilisée au moment même de poser le problème en jeu, et servir ainsi directement dans la résolution. Ainsi, d'Alembert cherchant à prouver la composition des forces selon la règle du parallélogramme[53] -c'est-à-dire à fournir une démonstration de l'addition des vecteurs à partir de quelques axiomes préliminaires de symétrie- pose-t-il d'emblée une représentation dans le cas où les deux vecteurs ont le même module. Voici le dessin très élémentaire qu'il donne lorsque deux couples de vecteurs sont en jeu, de même module supposé unité:

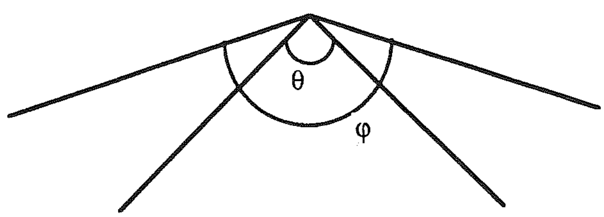


Figure 31

La résultante de chaque couple doit se trouver sur la bissectrice commune, et on en cherche le module. D'Alembert le pose *a priori* égal à une fonction inconnue du seul écart angulaire θ entre les deux vecteurs, et c'est sur cette fonction que va porter l'analyse. Avec l'intervention de l'autre couple de vecteurs, elle fera intervenir l'équation fonctionnelle du cosinus dont la solution en $2\cos\theta$ montrera bien la composition attendue[54]. Mais il est clair que c'est la représentation spatiale qui a fourni la seule dépendance en θ, sans que la position effective des vecteurs dans l'espace ait à jouer. Pour s'en convaincre, il suffit de pousser à l'extrême en posant les données en géométrie analytique à trois dimensions, avec choix préalable d'un repère orthonormé quelconque. Chaque vecteur dépend de trois variables, x, y et z; x', y' et z', liées par la relation $1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$, ce qui réduit à quatre variables seulement. Par conséquent, si l'on adopte la démarche de d'Alembert, dans cette nouvelle "représentation" le module de la résultante est *a priori* fonction de ces quatre variables, et non pas d'une seule variable! Certes, si l'on choisissait le repère composé de la bissectrice et de deux droites orthogonales entre elles et dans un plan perpendiculaire à cette bissectrice, les vecteurs auraient comme composantes respectivement x, y et 0, -x, y et 0 et le module de la résultante serait fonction de ces valeurs, c'est-à-dire de x et de y, mais $1 = \backslash R(x^2 + y^2)$, donc on déduit bien la dépendance en une seule variable qui peut être prise comme l'arctangente du rapport $\frac{y}{x}$. Autrement dit, la figure suggère[55] aussitôt une invariance de nature physique par rapport au repère puisqu'il s'agit de composition de forces, et *ipso facto*, elle permet de sélectionner un repère *ad hoc* pour initier le calcul.

La figure portant le discours géométrique

C'est vraisemblablement pendant les temps baroques, lorsque la profusion du discours le rendait redondant, que la figure s'est peut-être le mieux intégrée au texte mathématique. Un seul acteur nous servira de témoin: il s'agit de Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667), jésuite et mathématicien formé au Collège romain au début du XVIIè siècle sous la férule de Clavius, et auteur d'un prolifique *Opus geometricum*[56] qui aurait dû paraître vers 1625 mais fut longuement retardé (et naturellement remanié): l'œuvre ne sortit à Anvers qu'en 1647.

Lorsqu'on parcourt les 1225 pages in folio de ce texte, sans compter les pages d'errata, on est aussitôt saisi par la richesse de l'illustration. Les figures abondent, quasiment une par proposition, et il ne s'agit pas d'une manie de l'éditeur pour le confort du lecteur, assuré en tournant la page de retrouver la figure sur laquelle il avait précédemment réfléchi. En effet, les manuscrits de Grégoire, précieusement conservés à la Bibliothèque royale de Bruxelles[57], offrent la même richesse de droites, de triangles, de cercles, de cônes, de coniques, de tranches, d'onglets, etc. Figures auxquelles se joignent des gravures allégoriques, comme le titre de l'œuvre qui apparaît sur une peau de lion tendue entre deux colonnes torves à la manière du Bernin, dans un paysage de collines escarpées où gambadent des *putti* charnus tandis que de graves personnages, façon Ecole d'Athènes, tracent avec leur bâton des figures au sol. De temps à autre, lorsque la place le permet à la fin d'un chapitre, un écusson flamboyant de guirlandes, et d'angelots, de fleurs et de gueules animales, vient inscrire l'IHS jésuite.

Un mouvement propre semble emporter les figures, comme si elles composaient un courant dans cet immense fleuve. Tout au long d'un des chapitres du livre consacré à l'hyperbole[58], une subtile alternance anime la courbe représentée par l'une de ses branches. Tantôt elle est située dans le quadrant droit des asymptotes, tantôt dans le gauche. Au chapitre premier de ce livre, l'alternance était autre, avec ou sans les asymptotes. Au chapitre cinq, fort régulièrement au long de trente trois propositions, la branche de l'hyperbole vient toujours se loger dans le quadrant de droite en présence d'une demi-parabole; le dessin jouant alors alternativement sur les lignes horizontales ou verticales, pour ne pas dire les abscisses et les ordonnées.

Car, sous la profusion de cette décoration baroque passent des lignes tectoniques identifiables par lesquelles se manifeste la démarche analytique qui organise le raisonnement. Un exemple devrait nous en convaincre: nous avons choisi deux propositions très voisines dans le texte, la proposition 106 et la proposition 108 du chapitre 4 au livre 6, avec les deux figures qui leur sont associées et que nous apposons l'une en face de l'autre pour faciliter la comparaison[59].

Proposition 106
Soient AB et AC les asymptotes de l'hyperbole DEG et qu'on pose DG ordonnée par rapport au diamètre AE: qu'on mène DE et EG. Je dis que les segments convexes DIE et GLE sont égaux

Proposition 108
Soient AB et AC les asymptotes de l'hyperbole DEF; et que DH, EG et FC équidistantes à l'asymptote AB soient en proportion continue. Je dis que le segment DHGE est égal au segment EGCF.

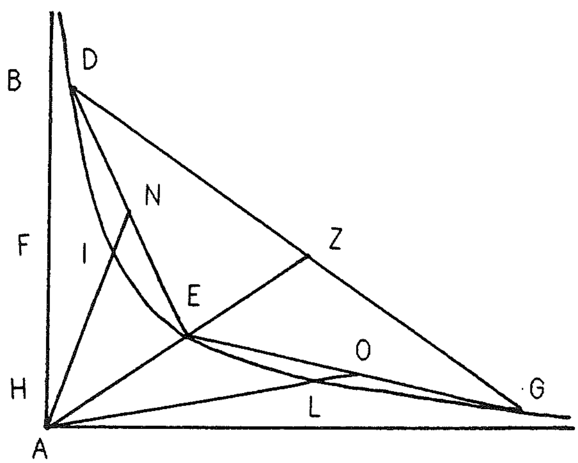


Figure 32

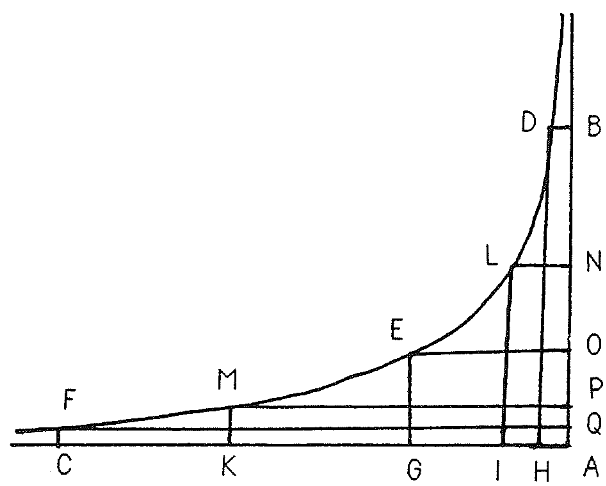


Figure 33

Avec les deux branches de l'hyperbole, les deux figures se répondent par symétrie. Mais on constate que dans la figure de gauche l'hyperbole est insérée dans un faisceau de droites issues du centre A alors que dans celle de droite la même courbe est quadrillée par les parallèles aux deux asymptotes[60]. Deux situations bien différentes pour l'œil.

Les figures répondent précisément aux énoncés puisque pour la proposition de gauche l'objet privilégié est le diamètre, c'est-à-dire une droite passant par le centre A de l'hyperbole et coupant une corde DG de l'hyperbole en son milieu Z. La droite AN est un autre diamètre relatif à la corde DE et AO est un diamètre relatif à la corde EG. Alors que dans la figure de droite, on a posé des droites équidistantes, les trois parallèles aux ordonnées DH, EG et FC, dont les longueurs obéissent à une règle précise, celle de la proportion continue:

$$\frac{DH}{EG} = \frac{EG}{FC}.$$

Autrement dit DH, EG et FC forment une progression géométrique.

Les deux conclusions ont en commun d'établir une égalité d'aires: à gauche les aires des segments convexes DIE et GLE délimités entre une corde et l'hyperbole et à droite les aires des trapèzes curvilignes DHGE et EGCF délimités par l'hyperbole, l'axe des abscisses et des droites parallèles aux ordonnées.

Ces deux résultats sur les aires pouvaient apparaître comme mystérieux, en tout cas originaux pour les lecteurs du XVIIe siècle, alors que le lecteur moderne n'est plus étonné par le résultat de droite. En effet, il indique qu'à des ordonnées en progression géométrique correspondent des aires égales sous l'hyperbole. Or, les aires sous l'hyperbole sont mesurées par la fonction logarithmique. De sorte que, de

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{y_2}{y_3}, \text{ avec } \frac{y_2}{y_1} = \frac{x_1}{x_2} \text{ (hyperbole),}$$

on déduit bien:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x} = \text{Log}\frac{y_1}{y_2} \text{ et } \int_{x_2}^{x_3} \frac{dx}{x} = \text{Log}\frac{y_2}{y_3}.$$

A bien lieu l'égalité indiquée des aires. Grégoire de Saint-Vincent, quoique ne parlant pas de logarithme[61], a effectivement prouvé pour la première fois ce comportement logarithmique et ce résultat devait assurer une certaine gloire à son nom.

Ce n'est pas celle-ci qui nous intéresse, mais le jeu des figures tant pour les énoncés que pour les démonstrations et en particulier l'opposition voulue entre la figure de droite et la figure de gauche.

La figure de gauche ne présente aucune évidence visuelle pour le lecteur d'aujourd'hui qui, pour se convaincre, tentera sans doute de le réduire au résultat de droite, ce qui n'est pas difficile et d'ailleurs a été expliqué par Grégoire de Saint-Vincent lui-même. Il est vraisemblable que le résultat de gauche paraissait plus naturel à un lecteur du XVIIè siècle. Quoiqu'il en soit, Grégoire de Saint-Vincent propose *deux* démonstrations distinctes, outre la possibilité de passer automatiquement du cas de droite au cas de gauche. Nous donnons les deux preuves en opposition, comme nous avons confronté les figures correspondantes.

ED et GE étant divisées en deux parties égales en N et O, qu'on pose les diamètres AIN et ALO, et qu'on joigne DIE et GLE. On aura donc les triangles DIE et GLE maximaux (cf Proposition 102 de ce livre) et égaux entre eux (cf Proposition 104 de ce livre), plus grands que les moitiés des segments dans lesquels ils sont inscrits (cf Proposition 103 de ce livre). De même, si l'on inscrit les triangles maximaux dans les segments restants de part et d'autre, on montre que les triangles maximaux des segments ID et IE sont égaux aux triangles maximaux des segments EL et LG. Et puisque cette opération peut être continuée indéfiniment dans chacun des deux segments, en sorte que les aires qui sont retranchées du segment DIE sont plus grandes que les moitiés des segments dont elles sont retranchées et égales à celles qui sont retranchées du segment GLE, dont chacune est supérieure aussi à la moitié du segment dont elle est retranchée, le segment DIE est égal au segment GLE (cf Proposition 116 du De progressionibus). Ce qu'il fallait démontrer.

Qu'on pose LI et MK moyennes proportionnelles entre HD, EG, FC, et qu'on mène BD, LN, EO, MP, FQ équidistantes de l'asymptote AC. Puisque DH, LI, EG, MK, FC, continuent la même raison, AH, AI, AG, AK, AC, sont donc proportionnelles (Proposition 78 de ce livre). Mais puisque les différences HI, IG, GK, etc... sont proportionnelles (Proposition 1 du De progressionibus), ce que HI est à IG, AI l'est à AG, c'est-à-dire EG à LI. C'est pourquoi les parallélogrammes LH et EI sont égaux. (Proposition 14 de ce livre). De même parce que GI est à GK comme MK à EG, les parallélogrammes EI et MG sont aussi égaux. De même, le parallélogramme FK est égal au parallélogramme MG. Donc les quatre parallélogrammes LH, EI, MG, FK sont égaux. Donc les deux parallélogrammes LH et EI retranchés du segment EGHD sont égaux aux deux parallélogrammes MG et FK retranchés du segment FCEG. Derechef, si l'on pose les moyennes proportionnelles entre DH, LI, EG, et aussi entre EG, MK, FC, on montre de la même façon, comme ci-dessus, que les parallélogrammes du segment EGHD sont égaux aux parallélogrammes du segment FCEG. Et puisque cela pourra toujours se faire en sorte que les parallélogrammes retranchés de DHEG soient plus grands que la moitié du segment DHEG et égaux à ceux qui sont retranchés du segment EGFC qui sont aussi plus grands que la moitié du même segment, il est constant que le segment FCEG est égal au segment EGDH (Proposition 116 du De progressionibus). Ce qu'il fallait démontrer.

Les deux démonstrations reposent toutes les deux sur la méthode d'exhaustion, antique méthode illustrée par Euclide, Archimède et Apollonius à laquelle Grégoire de Saint-Vincent a donné un nom: on constate effectivement dans les deux cas le recours final à la proposition 116 du livre 2 de l'*Opus geometricum*, livre consacré aux progressions. Cette proposition fournit un résultat "abstrait", en ce sens qu'il ne fait pas jouer des grandeurs géométriques particulières:

"Soient deux quantités AB et CD; soit AB divisée en E et G de telle façon que AE ne soit pas inférieure à la moitié de AB, et EG pas inférieure à la moitié de EB; qu'on divise de la même manière CD en F et H, et soient AE, EG et CF, FH proportionnelles et que cela puisse se faire indéfiniment. Je dis que AB tout entière est à CD tout entière comme AE est à CF".

Une écriture en termes modernes nous fait mieux saisir cette généralité. Soient x et y deux grandeurs (qui s'identifient pour nous à des nombres réels positifs) et soit α un nombre réel avec $0<\alpha$. On suppose $\alpha = \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \cdots = \frac{x_n}{y_n} = \cdots$ pour des grandeurs assujetties aux inégalités:

$$x > x_1 > \frac{x}{2} \text{ et } y > y_1 > \frac{y}{2}; \ (x-x_1) > x_2 > \frac{(x-x_1)}{2} \text{ et } (y-y_1) > y_2 > \frac{(y-y_1)}{2};$$

et plus généralement on impose:

$$x-(x_1+ \ldots + x_n) > x_{n+1} > \frac{x-(x_1+ \ldots + x_n)}{2}$$

et

$$y-(y_1+ \ldots + y_n) > y_{n+1} > \frac{y-(y_1+ \ldots + y_n)}{2}, \text{ etc.}$$

Voilà tout le contenu analytique des hypothèses faites à la proposition 116, et ce pour tout entier $n \geq 1$. La conclusion[62] de la proposition est:

$$\frac{x}{y} = \frac{\sum_{n=1}^{n=\infty} x_n}{\sum_{n=1}^{n=\infty} y_n} = \frac{x_1}{y_1} = \alpha.$$

Le résultat est numérique, en tout cas mis sous la forme d'une proportion, et non géométrique de sorte qu'aucune figure n'est indispensable.

En vérifiant que les conditions de validité de la proposition 116 du livre 2 sont réalisées, au moyen donc d'une approche des aires par des suites, les deux démonstrations procèdent toutes les deux à l'égalité de deux aires X et Y, à droite X = aire seg. hyp. DIE et Y = aire seg. hyp. GLE; à gauche X = aire quadr. hyp. DHGE et Y = aire quadr. hyp. EGCF. Le parallélisme des deux preuves est voulu.

Toutefois, la mise en scène diffère. A gauche, la discussion est intrinsèquement géométrique en ce sens que l'usage des diamètres fait apparaître des triangles naturellement liés à l'hyperbole, ce que Grégoire de Saint-Vincent appelle des triangles maximaux: en effet l'aire du triangle DEG est maximale parmi celle de tous les triangles de base DG lorsque le sommet parcourt l'arc de l'hyperbole entre D et G. De fait, la tangente en E à l'hyperbole est parallèle à la corde DG; de la même façon que toutes les cordes parallèles à DG ont pour diamètre la même droite AE: cette propriété figure déjà dans les *Coniques* d'Apollonius. Certes, il faut un bon discernement mathématique pour établir l'égalité des aires des triangles (rectilignes) maximaux DIE et ELG, ce dont Grégoire de Saint-Vincent s'est acquitté deux propositions plus haut. C'est, en outre, très géométriquement que la propriété de la tangente en E (et de même aux points I, L, etc) établit, comme au livre XII d'Euclide pour la mesure du cercle, l'inégalité dont on a besoin pour l'application de la proposition 116: l'aire du triangle rectiligne DEG dépasse la moitié de l'aire du segment hyperbolique DEG: il suffit de circonscrire un rectangle à l'arc d'hyperbole à partir de la corde et de la tangente pour s'en convaincre, l'aire du rectangle étant double de celle du triangle maximal. Si tout est alors prêt pour le "passage à la limite" que représente le recours à la proposition 116, constatons que la première partie de cette démonstration de gauche table constamment sur la géométrie de l'hyperbole.

Dans la démonstration de droite, la mise en scène est tout autre. Elle est d'emblée calculatoire: on pose des progressions géométriques, on calcule des raisons. Une véritable algèbre est à l'œuvre, l'algèbre des proportions. Certes, comme dans la démonstration de gauche, il faut successivement insérer des points nouveaux, mais ceux-ci sont donnés par le calcul, et non pas construits géométriquement. Aux trois ordonnées DH, EG et FC de l'énoncé, la première étape s'enrichit de deux nouveaux segments LI et MK, définis selon[63]:

$$(1) \qquad \frac{LI}{DH}=\frac{EG}{LI}=\frac{MK}{EG}=\frac{EG}{MK} \qquad \left(\frac{y_2}{y_1}=\frac{y_3}{y_2}=\frac{y_4}{y_3}=\frac{y_5}{y_4}\right)$$

L'hyperbole intervient, mais non comme un donné géométrique, bien plutôt comme un passage, celui des ordonnées aux abscisses. En effet, Grégoire énonce:

$$(2) \qquad \frac{DB}{LN}=\frac{LN}{EO}=\frac{EO}{MP}=\frac{MP}{FQ} \qquad \left(\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_2}{x_3}=\frac{x_3}{x_4}=\frac{x_4}{x_5}\right).$$

Effectivement, il a prouvé plus tôt que l'hyperbole transformait toute progression géométrique de points situés sur l'un des axes en une progression géométrique de points sur l'autre axe. Cette propriété n'est pas encore l'équation cartésienne de l'hyperbole, mais on conçoit qu'elle s'en rapproche[64].

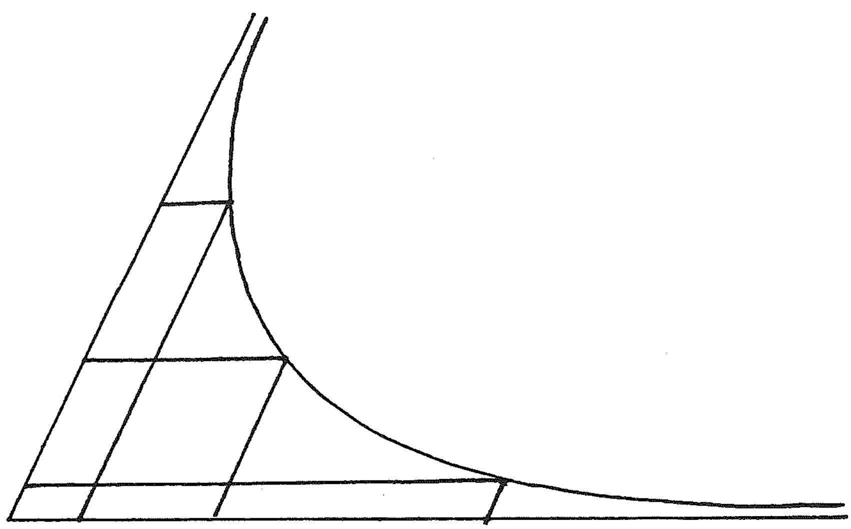


Figure 34

La lecture de la relation (2) s'effectue alors en abscisse

(3) $$\frac{AH}{AI}=\frac{AI}{AG}=\frac{AG}{AK}=\frac{AK}{AC}.$$

On peut oublier l'hyperbole pour effectuer un calcul sur cette suite de proportions:

$$\frac{AH}{AI}=\frac{AI}{AG}=\frac{AI-AH}{AG-AI}=\frac{HI}{IG},$$

calcul dont on ne retient que la proportion,

(4) $$\frac{AI}{AG}=\frac{HI}{IG}.$$

Intervient maintenant la propriété caractéristique de l'hyperbole qui est la mise sous forme de proportion de ce qui correspond à l'équation cartésienne de l'hyperbole:

(5) $$\frac{AI}{AG}=\frac{EG}{LI}.$$

Chez Grégoire de Saint-Vincent, comme chez Apollonius, cette relation (5) est conçue comme une égalité d'aires: le rectangle de côtés AI et LI a une aire constante lorsque L parcourt l'hyperbole. En quelque sorte, cette propriété joue le rôle tenu par celle de l'aire du triangle chez Euclide, aire invariante comme l'indique la figure 11 donnée ci-dessus. Mais désormais l'écriture a pris un tour analytique. Tenant compte de (4) et (5), il vient la relation:

(6) $$HI.\ LI = EG.\ IG.$$

C'est-à-dire l'égalité des aires des deux rectangles LH et EI. Par conséquent, puisque le calcul a seulement porté sur des progressions géométriques, de la même façon on dispose de l'égalité des aires des rectangles MG et EK. Ces égalités sont exactement l'ingrédient nécessaire à la mise en route de la méthode d'exhaustion[65], avec recours à la proposition 116 du livre 2. Ce qui termine la démonstration de droite.

Indéniablement, le passage de la démonstration de gauche à celle de droite correspond au passage d'une géométrie des courbes à une analytique des courbes: c'est un passage intellectuellement important que Descartes affirmera dans sa *Géométrie*. Les figures de Grégoire de Saint-Vincent participent à ce passage: elles ne sont pas la mémoire morte des énoncés et des démonstrations: elles présentent une dynamique démonstrative. La figure fait intégralement partie du discours géométrique dont elle souligne les tendances majeures.

Conclusion

Il fut une tradition qui dénigrait la figure comme adjuvant d'une démonstration mathématique; le moins que l'on puisse dire à partir des exemples abordés dans la présente étude est que cette tradition renie l'histoire du développement des mathématiques. La figure, au-delà même de la géométrie, est une composante du style et elle entretient avec le texte des rapports qui ne se réduisent pas à une simple illustration, rapports que le mathématicien choisit dans une palette dont l'histoire précisément dit et la richesse et la variété.

* Université de Nantes

NOTES

1 A ma suggestion, Serge Plantureux après avoir recensé les innombrables éditions des *Eléments* d'Euclide depuis l'*editio princeps* latine de Ratdolt en 1482 (DEA soutenu à l'E.H.E.S.S, 1989), entreprend l'étude de quelques dispositions des figures dans ce vaste fonds.

2 Alors qu'aux XVIe et XVIIe siècles les figures accompagnaient le texte, la pratique des planches au XVIIIe siècle les a renvoyées en fin de livre, ce qui a notablement changé leur rôle dans l'économie du discours mathématique. Diverses solutions furent d'ailleurs cherchées par les libraires pour pallier cet inconvénient: usage de feuillets mobiles, pratique de dépliants en fin de livre permettant une lecture en parallèle des figures et du texte, etc.

3 Editée à Venise, l'*editio princeps* latine (version de Campanus) des *Eléments* étonne par la richesse presque volubile des figures utilisées.

4 Proclus de Lycie, *Commentaire sur le premier livre des Eléments d'Euclide*, trad. française de P. ver Eecke, Bruges, Desclée, 1948, rééd. Blanchard, Paris, 1959.

5 Trad. B. Vitrac, *Les Eléments*, PUF, 1990, vol. 1, p. 204.

6 Un mouvement extrême est adopté par Lagrange qui, dans sa *Méchanique analitique* de 1788, évitait l'insertion de toute figure. Cela fait penser au logicien du XIXè siècle définissant les nombres entiers, qui refusait la simple pagination de son ouvrage!

7 Proclus, op. cité, 203, 1 15.

8 Trad. F. Peyrard, *Les Œuvres d'Euclide, en grec, en latin et en français*, tome 1, Paris, 1814, p. 241. Nous adoptons cette traduction en attendant que se poursuive celle de B. Vitrac, voir note 4.

9 Voir J. Dhombres, *Nombre, mesure et continu. Epistémologie et histoire*, Nathan, Paris, 1978 (chapitre 1).

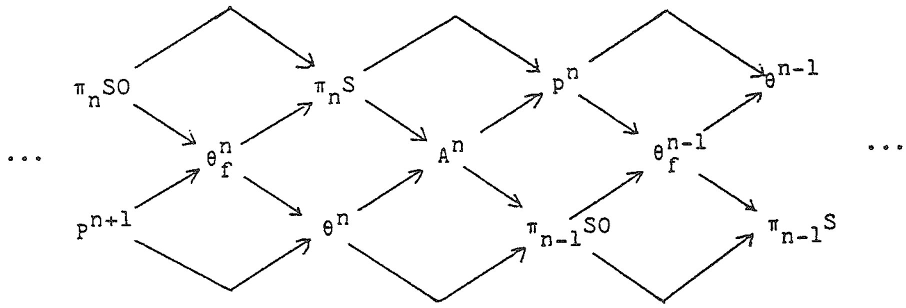
10 Est-il besoin de souligner que si Euclide donne la définition de ce qu'est une figure (σχημα), "*ce qui est contenu par quelque ou quelques frontières*", (définition 14 du livre I), cette définition n'a rien à voir avec les figures dont nous parlons ici, qui sont des illustrations (des constructions, κατασκευαζειν) du texte par un dessin, qui participent donc au style de l'exposé. Encore que l'on puisse vérifier qu'au cours des siècles, depuis l'imprimé à tout le moins, la définition "euclidienne "de la figure a influencé la pratique des figures illustratives, souvent conçues comme des capsules (l'exception étant le plus fréquemment les figures portant sur les propriétés du livre V des proportions).

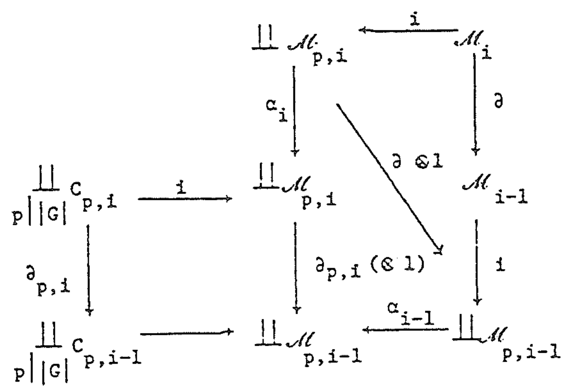
11 L'alignement fait effectivement jouer le spatial à deux dimensions. Certes, on peut aussi bien dire que cette figuration par l'alignement provient d'une convention, au même titre que la figuration d'une grandeur par un segment de droite. Que cette convention soit explicitement exprimée ou non ne change rien à la capitalisation effectuée, capitalisation aussi bien des données que des opérations portant sur ce donné. On pourrait citer bien d'autres cas, ainsi lorsqu'Euclide prouve la similarité de deux domaines en présentant convenablement leurs frontières.

12 Blancs qui ne doivent présenter aucune valeur quant à la longueur! De telles évidences ne sont jamais signalées dans le texte lui-même: capitalisation spatiale, la figure est rarement l'objet d'une attention simplement logique et dans de nombreuses éditions, la figure 6 par exemple ne respecte pas les égalités de longueurs qu'elle est pourtant censée reproduire. Il y a comme une affectation chez certains auteurs à raisonner sur des figures fausses! Elle n'est pas toujours ridicule.

13 La spatialisation peut être contagieuse, et en quelque sorte contaminer le texte, comme on le voit bien aujourd'hui en topologie algébrique, avec l'intervention explicite de diagrammes qui font intégralement partie du texte. Deux exemples suffiront: d'une part en premier la tresse de Kervaire-Milnor (il devient difficile de la considérer comme une figure et elle ne porte d'ailleurs pas de numéro lorsqu'elle intervient dans un article mathématique; il faut vraisemblablement la considérer comme un symbole,

au même titre que $+$, $\partial f, \otimes$, ou $\Rightarrow$), et d'autre part un diagramme commutatif ordinaire.





14 Trad. F. Peyrard, op. cité, vol. 3, p. 110.

15 Cette convention, qui n'est pas systématique dans les *Eléments*, répond à un souci d'économie et elle repose sur une mémorisation visuelle de la figure.

16 Par suite d'une erreur de typographie sans doute, telle est la situation de la figure dessinée dans l'édition de Peyrard déjà citée (proposition 39, livre XI), et que nous adoptons pour en faire l'analyse. Par contre, dans l'édition Heiberg (*Euclidis opera omnia*, I.L. Heiberg et H. Menge, Lipsiæ, 1883-1916, proposition 38, livre XI), la figure comporte l'indication du point E, comme celle des droites ΔY, YE, RΣ, ΣH.

17 Les variations dans l'attribution d'une dénomination pour un théorème -comme exemple le théorème dit de Thalès dénommé ainsi à la fin du 19è siècle (mais en France seulement)- témoignent de l'importance qu'on lui concède. Les généalogies en l'occurrence en disent plus sur l'architecture évolutive des mathématiques que sur l'histoire des découvertes à proprement parler.

18 Trad. B. Vitrac, op. cité, p. 282.

19 Trad. B. Vitrac, op. cité, p. 264 (proposition 37 du livre I).

20 Je ne cherche pas ici à indiquer une genèse possible de cette démonstration "lucide " d'Euclide, qualificatif adopté par Proclus. Toutefois, si les proportions ont dû jouer dans les démonstrations pythagoriciennes antérieures, il faut comprendre que chez Euclide les proportions ont servi de repoussoir, ce que Thomas L. Heath indique maladroitement: *"for there can be little doubt that the proof by proportion is what suggested to Euclid the method of I. 47, and the transformation of the method of proportion into one based on Book I only, effected by a construction and proof so extraordinarily ingenious, is a veritable tour de force which compels admiration..."*

(*The thirteen books of the Elements*, vol. 1, second ed., 1925, reproduction Dover Publ., 1956, p.354-355).

21 C'est le rôle de la proposition 41 qui est ici utilisée par Euclide: "*Si un parallélogramme a la même base qu'un triangle et est dans les mêmes parallèles, le parallélogramme est le double du triangle* " (trad. B. Vitrac, op. cité, p. 269).

22 Je ne veux pas entrer ici dans la discussion, par ailleurs très riche, de la question du caractère général de la démonstration écrite tranchant sur la figure, souvent particulière. Cette discussion ne relève pas directement de l'effet de style que j'entends décrire -la liaison d'un texte et d'une figure- dans la mesure où il pourrait suffire de faire jouer ce qu'on appelle les différents cas de figures. C'est ainsi que je ne crois guère à des faits non pensés par le texte que la figure porterait explicitement, ou réciproquement: il ne peut y avoir que des non-écrits sur l'un, présents sur l'autre, ce qui n'est pas la même chose. La question est celle des présupposés, que ce soit ceux d'Euclide ou ceux d'autres auteurs. S'il ne peut y avoir de présupposé que la figure contredirait aussitôt, il ne faut pas à l'inverse imaginer que les présupposés ne sont localisables que dans le texte écrit.

23 Prop. 12, livre 5, trad. de F. Peyrard, op. cité, t. 2, p. 262.

24 Une forme qui n'est en rien fidèle à la pratique mathématique jusqu'au 17e siècle, car elle réduit à une formule algébrique une propriété toujours présentée de façon rhétorique: les proportions ont leur algèbre propre, qui n'avait pas été réduite à celle des fractions numériques.

25 Dans la figure originale, les lettres M, N et J ne sont pas indiquées.

26 *P. Gregorii a StoVincentio Opus geometricum quadraturæ circuli et sectionum coni decem libris comprehensum*, Anvers, I. et I. Meursios, 1647, livre 2, proposition 69, p. 91.

27 On utilise ici une propriété algébrique plus composée que (1), à savoir

$$(3) \qquad \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ et } \frac{a'}{b}=\frac{c'}{d} \text{ impliquent } \frac{a+a'}{c+c'}=\frac{b}{d}\left(=\frac{a}{c}=\frac{a'}{c'}\right).$$

Cette propriété se réduit à (1) par la remarque

$$\frac{a}{c}=\frac{a'}{c'}=\frac{b}{d}.$$

(En l'occurrence a = Aire tr. AFE, b = Aire tr. APB, a' = Aire tr. EGB; c = Aire rect. CKJL; c' = Aire rect. KDMI et d = Aire rect. CDNH).

28 Dont les diamètres sont respectivement AB, CD, AE, EB, CK et KD.

29 De façon surprenante, dans une édition latine des *Eléments* d'Euclide, due à I. Scheubel, les lettres sont omises des figures (*Euclides Megarensis...*, Bâle, 1550).

30 Incidente dans l'affaire est la question de l'angle droit: les géomètres hésitent souvent dans sa représentation sur la figure. Il y a ceux qui le stipulent entre deux droites par l'insertion de deux traits courts supplémentaires ( ), comme cela a été fait sur la figure 17; il y a ceux qui se contentent d'un dessin à l'équerre, laissant au texte proprement dit le soin de dire l'orthogonalité. La stipulation dessinée de l'angle droit ajoute une hétérogénéité au tracé, mais elle relève bien d'une convention, comme celle qui donne son nom aux points marqués A, B, etc.; ou comme la convention qui élimine la considération de la longueur du trait, de sa couleur, voire encore la convention beaucoup plus équivoque qui donne une image plane du spatial à trois dimensions.

31 $\frac{\text{Aire tr (ABC)}}{\text{BC2}}=\frac{1}{2}\frac{\text{AH}}{\text{BC}}$ et un tel rapport est invariant par similitude.

32 Ce qui pose, bien sûr, la question du rôle pédagogique de la figure, rôle que je ne veux pas aborder ici. La raison de ce refus tient à un présupposé, quelquefois porté par un jugement présenté sous une forme plus ou moins syllogistique: le texte écrit serait analytique et la figure serait synthétique, or l'analytique n'est pas pédagogique, donc la figure le serait. Si l'on adopte ce point de vue, il devient très difficile d'étudier

stylistiquement les rapports entretenus dans un même ensemble entre un texte écrit et ses figures, puisque celles-ci seront toujours jugées par leur effet de synthèse. Parce qu'elle se réfère au spatial même sous des représentations particulières, parce qu'elle joue de la superposition, une figure contraint le style, mais *a priori* elle ne me paraît pas impliquer le synthétique ou l'analytique. Par contre, un auteur peut utiliser la voie synthétique dans le texte et suggérer heuristiquement l'analytique par la figure.

33 E. Bézout, *Cours de Mathématiques à l'usage des Gardes du Pavillon et de la Marine*, Seconde Partie, Versailles, P.D. Pierres, 1791, p. 149-150. Bézout mourut en 1783, mais son cours lancé en 1765 poursuivit une longue carrière, avec certes de nombreux remaniements. Voir par exemple J. Dhombres, French mathematical textbooks from Bézout to Cauchy, *Hist. Scientiarum*, 28, 1985, pp. 91-137 et P. Lamandé, Des différents rôles de l'écriture dans un manuel mathématique; l'exemple de Bézout, *Sciences et Techniques en perspective*, vol. 19, 1991, p. 31-40.

34 Rappelons pour l'intelligence de cet extrait qu'une expression comme a:b::c:d, qui se prononce a est à b comme c est à d, signifie en notations modernes $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

35 Hermann, Paris, 1964, p. 131.

36 S. Akbulut, *A fake-4-manifold*, Springer-Verlag.

37 Tradition relayée par Proclus.

38 Traduction F. Peyrard, op. cité, vol. 2, p. 368.

39 Il n'y a donc pas de lettrage des figures construites sur les côtés puisque ces figures ne sont pas spécifiées (triangles, paralélogrammes, quadrilatères, etc).

40 Est ici trompeuse la notation par fractions que nous utilisons pour présenter cette preuve, sous la forme $\frac{\Gamma B}{AB} = \frac{AB}{\Delta B}$ par exemple. Dans le texte, Euclide ne concatène pas la notion de fraction et celle de proportion, et il prononce ΓB est à AB comme AB est à ΔB, instituant une partie gauche et une partie droite.

41 A. Clairaut, *Elémens de géométrie*, Paris, 1741, planche VII, figure 10.

42 T. Lalesco, *La géométrie du triangle*, 2ème éd., avec une préface de E. Picard et une préface de G. Tzitzéica, Paris, Vuibert, 1952; réédition J. Gabay, 1987, p. 2.

43 Chez certains auteurs, faute de place sans doute, ou par souci d'économie, les neuf points s'enrichissent de bien d'autres, jusqu'à trente quatre points "remarquables" indiqués sur la même figure. Remarquons que Lalesco néglige d'indiquer sur sa figure les points B" et C", de sorte que son cercle est seulement à sept points!

44 En vue d'une explication ultérieure, les lettres adoptées pour cette figure sont différentes de celles utilisées précédemment.

45 La droite qui joint l'orthocentre H au centre O du cercle circonscrit est à juste titre appelée droite d'Euler, car ce dernier en donna des propriétés en 1765. Le centre du cercle des neuf points est au milieu du segment joignant H et O. En 1822, W.K. Feuerbach examina les propriétés de ce cercle, montrant qu'il est tangent au cercle inscrit et aux trois cercles exinscrits (Il publia ces résultats dans un livre: *Eigenschaften einigen merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreieckes*).

46 C.J. Brianchon, J.V. Poncelet, Recherches sur la détermination d'une hyperbole équilatère, au moyen de quatre conditions données, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, t. 11, 1820/1821, pp. 205-220.

47 Ce nom n'était pas encore adopté pour désigner le point de rencontre des trois hauteurs du triangle.

48 Répétons que la méthode projective avait fourni la première preuve, sans doute la plus intéressante aux yeux des auteurs.

49 C'est la figure notée n° 7 dans l'article original.

50 Les trois cercles possibles ne figurent pourtant pas sur le dessin. C'est d'ailleurs une difficulté ordinaire de la représentation d'un raisonnement par l'absurde: comment dessiner du faux afin d'engendrer du vrai? Cette question exigerait une digression que nous ne ferons pas ici.

51 B. Vitrac, que je remercie pour une discussion sur la présente étude, me fait remarquer qu'une telle continuité joue déjà chez Euclide par souci d'économie. On y trouve en effet des démonstrations "potentielles" (*Alors semblablement nous démontrons que...*), démonstrations qui utilisent des éléments placés en situation analogue. Cette analogie n'est en définitive lisible que sur la figure. Il serait d'ailleurs intéressant, selon la démonstration en jeu, d'indiquer de façon systématique les manières du repérage d'une droite ou d'un solide chez Euclide.

52 R. Descartes, *La Géométrie,* in *Discours de la Méthode...*, I. Maire, 1637, Leyde, p. 302.

53 J. d'Alembert, Mémoire sur les principes de mécanique, *Mém. Acad. Paris,* 1769, pp. 278-286.

54 J. Dhombres, Le poids de la tradition et les ouvertures imprévues dans l'axiomatisation de la statique au début du XVIIIè siècle, *Studia Leibnitiana,* Sonderheft 17, 1989.

55 Cette suggestion peut ne pas être à l'origine du raisonnement de d'Alembert: j'entends seulement souligner qu'il y a suggestion dans l'esprit du lecteur et que, par conséquent, la figure est un ingrédient du style de composition de l'article de d'Alembert, pour convaincre.

56 *P. Gregorii a StoVincentio Opus geometricum quadraturæ circuli et sectionum coni decem libris comprehensum*, Anvers, I. et I. Meursios, 1647.

57 Mss 5770-5793.

58 Livre 6, *de Hyperbola*, chapitre 4, *De segmentis hyperbolicis, conuexis et concauis.*

59 Nous donnons seulement la traduction du latin, et modifons quelques erreurs triviales de lettres ou de références. Voir J. Dhombres, *Une algèbre de raison au XVIIè siècle: la quadrature de l'hyperbole par Grégoire de Saint-Vincent*, livre à paraître.

60 Ajoutons que ces dessins composés vers 1620 par Grégoire de Saint-Vincent se situent bien avant la représentation des fonctions par abscisse et ordonnée, bien avant ce qu'on a coutume d'appeler la géométrie analytique.

61 Il laissera ce soin à son disciple, Alphonse de Sarasa, qui publiera son texte en 1649, expliquant la propriété logarithmique des aires sous l'hyperbole. Ce dernier en profitera pour louer son maître dans une réponse cinglante à Mersenne. Voir référence de la note 59 pour une traduction.

62 Le lecteur moderne disposant de la théorie des limites de suites réelles peut être déçu par un tel résultat qui lui paraît maladroitement encombré de conditions inutiles. Il constate évidemment que x_n, comme la suite y_n, converge vers O et que la série $\sum_{n=1}^{n=\infty} x_n$ converge vers x, de même que $\sum_{n=1}^{n=\infty} y_n$ converge vers y. La convergence du rapport s'en déduit aisément. Grégoire de Saint-Vincent ne disposait pas de cette théorie des limites; il lui fallait précisément la construire, au moins avec des séries géométriques.

63 Nous avons mis entre parenthèses une sorte de transcription moderne, afin de mieux faire saisir la nature analytique de la démarche de Grégoire de Saint-Vincent, qui ne dispose d'aucune notation nouvelle par rapport à Euclide, en particulier il n'indexe pas les points en jeu et respecte plus ou moins l'ordre alphabétique.

64 Si l'on omet l'inversion de la raison, la propriété en question ne caractérise pas l'hyperbole. Pas plus d'ailleurs que la propriété des diamètres ne caractérise l'hyperbole dans la démonstration de gauche.

65 Emporté par la veine analytique, Grégoire de Saint-Vincent en oublie de vérifier une inégalité, à savoir que la somme des aires des deux rectangles EI et LH dépasse la moitié de l'aire du trapèze hyperbolique EGHD, une inégalité qu'il n'a pas manqué de vérifier dans la démonstration de gauche: la figure la rendait facile. La démonstration de l'inégalité dans la figure de droite serait plus ardue car relevant d'un calcul où doit jouer le logarithme (sans être prononcé), d'autant qu'il s'agit d'un résultat limite puisqu'il n'est exact que, lorsque H est fixé, le point I en est suffisamment proche.