FREGE Y LOS NOMBRES DE CURSOS DE VALORES

Matthias SCHIRN *

ABSTRACT

Frege's method of introducing abstract singular terms by transforming an equivalence statement into an identity statement suffers from one major defect: it is haunted by a pervasive indeterminacy of putative reference. In this paper, I discuss mainly Frege's introduction of courses-of-values in his *magnum opus Grundgesetze der Arithmetik* (Volume I, 1893, Volume II, 1903). More specifically, I want to assess critically, with respect to course-of-values names, what I call *Frege's indeterminacy problem*. In the first part, I sketch the nature of this problem in connection with the introduction of numerical singular terms in his book *Die Grundlagen der Arithmetik* of 1884. In the second part, I try to shed light on the analogies and differences concerning the introduction of numerical terms on the one hand and of course-of-values terms on the other.

El método fregeano de introducir términos singulares abstractos mediante la transformación de un enunciado de equivalencia en un enunciado de identidad, adolece de un defecto capital: está dominado por una profunda indeterminación respecto de las referencias putativas de estos términos. En este artículo, quiero discutir principalmente la introducción de los cursos de valores de funciones que Frege lleva a cabo en su *opus magnum Grundgesetze der Arithmetik* (volumen I, 1893, volumen II, 1903). Más específicamente, quiero evaluar críticamente, con respecto a los nombres de cursos de valores, lo que llamo *el problema de la indeterminación de Frege*. En la primera parte, bosquejo la naturaleza de dicho problema en relación con la introducción de términos singulares numéricos en su libro *Die Grundlagen der Arithmetik* de 1884. En la segunda parte, trato de arrojar luz sobre las similitudes y diferencias concernientes a la introducción de términos numéricos por una parte, y de términos de cursos de valores por la otra.

1. Términos numéricos

Según Frege, para cualquier introducción de objetos abstractos que sea metodológicamente capaz de sostenerse, es un requisito cardinal establecer un criterio de identidad adecuado para ellos, esto es, proporcionar un medio general

THEORIA - Segunda Época - Vol. IX
1994, Nº 21, 109-133

para concebirlos, reconocerlos nuevamente como los mismos y distinguirlos de cualquier otro objeto. La segunda tentativa heurística para definir el número en *Grundlagen* -aquí podemos ignorar el primer intento de definición del número en la sección 55- está destinada a satisfacer esta precondición. Para Frege, esto se extiende hasta fijar el sentido de una ecuación numérica "El número que corresponde al concepto F = el número que corresponde al concepto G" (simbólicamente: "$N_xF(x) = N_xG(x)$") sin emplear una palabra numérica en el *definiens.* Con el propósito de autorizar semejante definición contextual del término "$N_xF(x)$", invoca expresamente su famoso principio del contexto: Sólo en el contexto de una oración tienen las palabras un significado. Así, propone la siguiente definición ("E" es para abreviar "equinumérico"):

(I) $\qquad N_xF(x) = N_xG(x) := E_x(F(x),G(x)).$

La equinumericidad se define más adelante en términos de correspondencia biunívoca (GLA, FA, § 72).

Frege discute las dificultades involucradas en la transformación de una relación de equivalencia en una identidad tomando como paradigma ilustrativo el paralelismo y la identidad de direcciones. En lo que sigue, voy a transponer los puntos más importantes de su discusión al caso de la equinumericidad e identidad numérica. Ciertamente, al hacer esto, no debemos perder de vista las diferencias esenciales que existen entre ambos casos, a pesar de su afinidad básica.

Frege señala que (I) plantea tres problemas lógicos. Los dos primeros pueden resolverse. El tercero reza así. El criterio de identidad propuesto que se formula en (I) es incapaz de cubrir todos los casos concebibles. Nos permite determinar el valor de verdad sólo de aquellas ecuaciones en las cuales las expresiones que están de cada lado del signo de identidad poseen ambas la forma "$N_xF(x)$". Sin embargo, el criterio es incapaz de decidir si digamos, Julio César es el número de los planetas. Si ya tuviésemos una definición del concepto *n es un número* que satisfaciera el requerimiento de delimitación bien definida, podríamos estipular que si q no es un número, entonces "$N_xF(x) = q$" es falso; si q es un número y se nos da de manera apropiada, (I) dejará establecido el valor veritativo de "$N_xF(x) = q$". En esta etapa de la investigación, sin embargo, la indeterminación que surge de (I) no podrá eliminarse estableciendo la definición

(II) $\qquad N(n) := \exists\varphi \ (N_x\varphi(x) = n),$

puesto que el operador numérico "$N_x\varphi(x)$", que forma una parte del *definiens,* todavía no ha adquirido un significado determinado.

Frege rechaza (I) sólo sobre la base de que su tercera objeción se ha probado convincente. Por supuesto que destituir a la definición (I) de su status de definición del término "$N_xF(x)$" no significa llegar a prescindir de la fórmula (T) "$N_xF(x) = N_xG(x) \equiv E_x(F(x),G(x))$" totalmente. (Eso a que me refiero como (T) se suele llamar "el principio de Hume".) Por el contrario, como teorema demostrable, (T) debe desempeñar un papel crucial en la proyectada construcción lógica de la teoría de los números (cf. GLA, FA, § 73). Más aún, en la sección 104, Frege declara que la determinación del sentido de un "juicio de reconocimiento" constituye un principio guía para definir fracciones, números irracionales y números complejos en términos puramente lógicos. Una mirada a la estructura del Axioma V de *Grundgesetze* -el análogo formal exacto de (T)- muestra claramente que la transformación de una relación de equivalencia en una identidad fue y continuó siendo para él el medio por excelencia para introducir objetos lógicos. Y como veremos, el Axioma V no resulta mejor que el principio de Hume cuando se trata de fijar de manera unívoca las referencias de los términos singulares abstractos de un cierto tipo.

En su intento de enfrentar el dilema que resulta de su tercera objeción a (I), Frege sugiere una salida mediante la eventual definición del número que corresponde al concepto F como la extensión del concepto (de segundo nivel) *equinumérico con el concepto F,* esto es, como una clase de equivalencia de la relación de equinumericidad:

(III) $N_xF(x) := \lambda\varphi\ (E_x(\varphi(x),F(x)))$.

Esta definición explícita ha sido obviamente concebida de modo que sea conforme al principio de Hume. "$N_xF(x)$" se define precisamente en términos de aquella relación de equivalencia que el principio de Hume exhibe como el criterio de identidad para los números cardinales. Sin embargo, (III) se apoya en la cuestionable suposición de que sabemos intuitivamente lo que es la extensión de un concepto. En el período en que Frege escribió *Grundlagen,* no podía apoyarse en una concepción comúnmente aceptada sobre la naturaleza de las extensiones de los conceptos, sin mencionar la naturaleza de los números. No cabe duda que la concepción que prevalece entre los matemáticos y lógicos contemporáneos suponía que la extensión de un concepto (de primer nivel) consiste en los objetos que caen bajo ese concepto. Pero, al parecer, es más que probable que Frege no se fiara de este punto de vista. Puesto que si en el contexto de su logicismo, los números han de identificarse con extensiones de conceptos, entonces estos últimos deben ser de carácter puramente lógico. Sin embargo, la extensión de un concepto de primer nivel concebida como un objeto lógico no puede consistir en objetos físicos; no obstante, esto es precisamente lo que el partidario de la concepción predominante acerca de las extensiones tiene que admitir, si los objetos que caen bajo el concepto son de una naturaleza física. Más aún, quien propone esta concepción no podría reconocer justificadamente algo así como la extensión de un concepto vacío. Hasta ahora, el resultado es evidente: Las normas rigurosas que Frege aplica a su propia investigación sobre los fundamentos de la aritmética requieren que la introducción de nuevos objetos lógicos se lleve a cabo de una manera metodológicamente satisfactoria. Luego, su suposición relativa a extensiones de conceptos socava, en un punto crucial, su programa reduccionista tal como aparece bosquejado en *Grundlagen.*

¿Puede la definición (III) conducirnos fuera del atolladero en el cual se encontró Frege al considerar (I)? Ciertamente que, si él opinara que la única manera de referirse a un número consistiera en emplear un término numérico que tuviese la forma "$N_xF(x)$", la tercera objeción suscitada en torno a la definición (I) habría perdido toda su fuerza. Ahora bien, (III) efectivamente introduce una nueva forma de identificar a los números y, además, origina la posibilidad de definir tanto el concepto *n es un número* como los números individuales de una manera formalmente correcta. Noten que aquí utilizo las palabras "formalmente correcta" sólo en el sentido débil, según el cual el operador numérico ha sido definido previamente. Cada número individual, con excepción del 0, se define como el número que pertenece al concepto bajo el cual caen justamente sus predecesores. La obvia desventaja de estas definiciones es la introducción de ocurrencias de "$N_xF(x)$" que resistan la eliminación contextual. Y recuerden que la definición (III) es vulnerable a una seria objeción. Como argumentaré en un momento, Frege no logra resolver la indeterminación referencial de "$N_xF(x)$" definiendo el número que corresponde a F como una clase de equivalencia. Por lo tanto, la indeterminación referencial del operador numérico infecta inevitablemente las expresiones "N(n)" y "0", "1", etc. que Frege define a través de "$N_xF(x)$": $0:= N_x(x \neq x)$; $1:= N_x(x = 0)$; etc.

El principio de Hume, tomado en conjunción con la definición (III) y las definiciones de 0, 1, etc., proporciona un medio para determinar el valor veritativo de cualquier enunciado de identidad de los siguientes seis tipos:

(1) $N_xF(x) = N_xG(x)$

(2) $N_xF(x) = \lambda\varphi\ (E_x(\varphi(x),G(x)))$

(3) $\lambda\varphi(E_x(\varphi(x),F(x))) = \lambda\varphi\quad (E_x(\varphi(x),G(x)))$

(4) $N_xF(x) = n$

(5) $n = \lambda\varphi(E_x(\varphi(x),F(x)))$

(6) $n = m$

Una ecuación del tipo (4), (5), o (6) es susceptible de ser reducida a una del tipo (1), (2), o (3), y las condiciones de verdad de estas tres últimas están determinadas a través del lado derecho del bicondicional (T), o bien, para expresarlo con mayor precisión, a través de la correlación biunívoca de los objetos que caen bajo F con aquellos que caen bajo G: $\exists R(\forall x(F(x) \supset \exists y(R(x,y) \wedge G(y))) \wedge \forall y(G(y) \supset \exists x(R(x,y) \wedge F(x))) \wedge \forall x\forall y\forall z((R(x,y) \wedge R(x,z) \supset y=z) \wedge (R(x,z) \wedge R(y,z) \supset x = y)))$.

Así, en virtud de (III), Frege consigue extender el dominio de aplicabilidad del criterio de identidad numérica originalmente propuesto. No obstante, el criterio así extendido carece de la irrestricta generalidad requerida. Tomemos, por ejemplo, las dos ecuaciones "$N_x(x \neq x) = \lambda x(x \neq x)$" y "$N_x(x \neq x)$ = Julio César". La primera no puede transformarse en una ecuación del tipo (1), ya que el nombre "$\lambda x(x \neq x)$", a diferencia del término "$\lambda\varphi(E_x(\varphi(x),x \neq x))$, designa la extensión de un concepto de *primer* nivel. En consecuencia, no podemos decidir mediante (T) si "$N_x(x \neq x) = \lambda x(x \neq x)$" es verdadero o falso. Aunque Frege no hace comentarios sobre semejante caso, parece suponer que (III) sirve para resolver la indeterminación referencial del término "$N_xF(x)$" de una vez y para siempre. Si sabemos realmente lo que es la extensión de un concepto en general, esto es, si efectivamente tenemos una comprensión total de la noción de extensión en cuanto concepto clasificatorio -y Frege lo da por sentado, aunque sin ninguna justificación- entonces deberíamos ser capaces de distinguir la extensión de un concepto de primer nivel de la extensión de un concepto de segundo nivel y (distinguir) este último de Julio César. En consecuencia, estaríamos justificados cuando asignamos el valor de verdad *falso* a ambas ecuaciones. No se puede descartar que esta línea de pensamiento pueda reflejar la evaluación tácita de Frege acerca de la situación. Ciertamente, es muy difícil saber qué otra cosa pudo haber tenido en mente. A la luz de su argumentación en relación a la definición (I), al parecer pudo haber considerado la siguiente estrategia alternativa: Una vez que el concepto clasificatorio de número cardinal ha sido definido sin falacias, podemos solucionar el problema de la indeterminación sobre la base de (T) y la definición (II) $N(n) := \exists\varphi(N_x\varphi(x) = n)$.

Sea lo que fuere, ambas estrategias son igualmente insatisfactorias. El problema no se soluciona por ninguno de estos medios, sino que sólo se pospone. Ya que no sabemos si Julio César es un número a menos que sepamos si es o no una extensión. En *Grundlagen,* Frege formula condiciones de identidad solamente para diversos tipos de clases de equivalencia, de equinumericidad y, por razones de ilustración, de paralelismo y similitud geométrica. Y hemos visto que su suposición en torno a extensiones de conceptos carece de fundamento.

2. Nombres de cursos de valores

En *Grundlagen*, Frege intentó dar el paso crucial en su programa logicista definiendo los números naturales como extensiones de conceptos. En *Grundgesetze*, donde la ejecución formal de este programa debe llevarse a cabo, se adhiere básicamente a esta definición[1]. Además, recalca que eventualmente todos los números deberán definirse como extensiones de conceptos (GGA I, 14; BLA, 44)[2]. Así, el dominio inicial de los objetos de su sistema formal, consistente en los dos valores veritativos, tiene que extenderse o bien a través de extensiones de conceptos o bien a un conjunto de objetos que comprenda las extensiones como un subconjunto propio. Un conjunto de objetos tal es aquel de los cursos de valores de funciones. Ahora, los números cardinales se definen como extensiones de conceptos de primer y no de segundo nivel. Puesto que, en contraste con *Grundlagen*, la extensión de un concepto es la que se considera como la portadora del número, el operador numérico aparece como un nombre de función de *primer* nivel.

En *Grundgesetze*, Frege parece ser perfectamente consciente de que una introducción metodológicamente impecable de los cursos de valores como objetos lógicos no puede proceder por la vía de una elucidación de la función primitiva de segundo nivel $\grave{\varepsilon}\varphi(\varepsilon)$, la así llamada función de curso de valores, más específicamente, no puede proceder mediante una elucidación modelada conforme a las explicaciones semánticas proporcionadas para las otras funciones primitivas de su sistema. Lo anterior se debe a que una elucidación de este tipo, digamos: "El valor de $\grave{\varepsilon}\varphi(\varepsilon)$ para cada función monádica de primer nivel $\Phi(\xi)$ como argumento será el curso de valores de $\Phi(\xi)$", presupone que nosotros ya sabemos qué son los cursos de valores, esto es, que ya poseemos una comprensión total de la noción de curso de valores. Recuérdese que es precisamente esta suposición, en relación con el caso más especial de las extensiones de conceptos, la que debilita el programa de

Grundlagen. Mientras que Frege se abstiene de suponer que el lector de *Grundgesetze* tiene un conocimiento suficiente sobre los cursos de valores, se siente justificado con la suposición de que en nuestra práctica del juzgar y afirmar ya tenemos familiaridad con los objetos lo Verdadero y lo Falso[3]. El hecho de que para Frege los dos valores veritativos sean, en efecto, objetos abstractos distinguidos, se muestra claramente en las elucidaciones que da para los conceptos primitivos y las relaciones primitivas de su sistema, así como en su (fracasada) prueba de referencialidad para el lenguaje formal de *Grundgesetze*[4]. Permítaseme una analogía: en el dominio de objetos del sistema lógico de Frege, lo Verdadero y lo Falso son lo que las ocho funciones primitivas son en el dominio de funciones. Por lo tanto, podríamos llamar *objetos primitivos de la lógica* a los valores veritativos[5].

En la sección 3 de *Grundgesetze*, Frege introduce cursos de valores (respectivamente un nombre de la forma "el curso de valores de la función $\Phi(\xi)$") en el contexto de una proposición, estableciendo un criterio de identidad para ellos: "Yo uso las palabras 'la función $\Phi(\xi)$ tiene el mismo curso de valores que la función $\Psi(\xi)$' generalmente para denotar lo mismo que las palabras 'las funciones $\Phi(\xi)$ y $\Psi(\xi)$ siempre tienen el mismo valor para el mismo argumento'". Esta estipulación informal corresponde al malogrado Axioma V de *Grundgesetze*: $(\grave{\varepsilon}f(\varepsilon) = \grave{\alpha}g(\alpha)) = \,\frown\!\!\!\!\!^{\mathfrak{a}}\!\!-\, f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a}))$. Tal como lo subrayé anteriormente, el Axioma V tiene la misma estructura lógica que el principio de Hume. Vale la pena añadir que, a diferencia de la definición contextual de "$N_xF(x)$" propuesta por Frege, el Axioma V tiene una naturaleza de cara doble. Está destinado a fijar, al menos parcialmente, la referencia de un nombre de curso de valores "$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$"[6]. Sin embargo, desde el propio punto de vista de Frege, el fijar la referencia de una expresión no puede ser jamás la tarea de un axioma, sino sólo aquella de una definición o una elucidación[7].

2.1. El argumento de permutación

Cuando Frege llega a introducir cursos de valores de la manera que acabamos de describir, se encuentra con una variación de su viejo problema de indeterminación de la época de *Grundlagen*. Al principio de la sección 10 de *Grundgesetze* dice que su estipulación informal "de ninguna manera determina completamente la referencia de un nombre como '$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$'." El criterio de identidad para cursos de valores formulado en la Ley Básica V fija las condiciones de verdad de ecuaciones en las cuales ambos nombres relacionados tienen la forma "$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$", así también las condiciones de verdad de "$\grave{\varepsilon}(\varepsilon \neq \varepsilon) = \grave{\varepsilon}(\varepsilon \sim \grave{\varepsilon}(\varepsilon \neq \varepsilon))$" (donde "$\sim$" sirve para simbolizar la relación de equinumericidad entre clases)[8]. No obstante, el criterio no basta para determinar el valor veritativo de "$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon) = q$" si "$q$" no tiene la forma "$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$"[9]. Por supuesto, una vez que el operador numérico "$\mathbf{N}\xi$" y los números individuales han sido definidos, el valor veritativo de, digamos, "$\grave{\varepsilon}(\varepsilon \neq \varepsilon) = \mathbf{N}\grave{\varepsilon}(\varepsilon \neq \varepsilon)$" o "$\grave{\varepsilon}(\varepsilon \neq \varepsilon) = 0$" puede determinarse sobre la base del Axioma V, reduciendo ambos enunciados a la ecuación citada más arriba. Las ecuaciones de la forma "$\backslash\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon) = \grave{\alpha}\Psi(\alpha)$", donde "$\backslash\xi$" es el sustituto de Frege para el artículo definido u operador descriptivo, pueden descartarse por el presente. Volveré a ellas más adelante.

Por la misma razón, no podemos decidir, en general, si un curso de valores dado $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ tiene una propiedad dada a menos que esa propiedad se relacione con una propiedad de la función correspondiente. La siguiente línea argumentativa intenta arrojar claridad sobre este punto.

Supongamos que h es una función biunívoca de todos los objetos del dominio del sistema lógico de Frege. Entonces, el criterio de identidad que se aplica a las referencias de los términos de cursos de valores, también se aplica a las referencias de los nombres de valores funcionales que tienen la forma "$h(\grave{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon))$". Para formular el punto concisamente: según nuestra suposición, la siguiente ecuación es verdadera:

$$(1) \qquad (h\,(\varepsilon'\,\Phi(\varepsilon)) = h(\alpha'\,\Psi(\alpha)))$$

De la ecuación (1) y el Axioma V se sigue inmediatamente

$$(2) \qquad (h\,(\varepsilon'\,\Phi(\varepsilon)) = h(\alpha'\,\Psi(\alpha))) = (\overset{\mathfrak{a}}{-\!\smile\!-}\,\Phi(\mathfrak{a}) = \Psi(\mathfrak{a}))\,.$$

En consecuencia, el Axioma V no fija completamente la referencia de un término de curso de valores "$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$", al menos si efectivamente existe una biyección h de modo que para un curso de valores $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$, "$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon) = h(\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon))$" es falsa. Pues, claro está, si para cada función h y cada curso de valores $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$, el valor funcional $h(\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon))$ fuese a coincidir con el argumento $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$, entonces podríamos usar las dos ecuaciones "$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon) = \grave{\alpha}\,\Psi(\alpha)$" y "$h(\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)) = h(\grave{\alpha}\Psi(\alpha))$" para hacer una aseveración sobre el mismo objeto, siempre que la primera ecuación sea verdadera. En términos modernos, el argumento de Frege puede presentarse como sigue:

(P1) Supongamos que φ es la asignación deseada de objetos a nombres de cursos de valores que satisfacen el Axioma V. Sea h una permutación no trivial (de todos los objetos), y consideremos la asignación φ' de objetos a términos de cursos de valores, que está relacionada con φ de la siguiente manera: Si Δ es asignado por φ a un nombre dado de curso de valores y $\Gamma = h(\Delta)$, entonces Γ es asignado por φ' a ese nombre de cursos de valores. Se sigue que φ' es una asignación de objetos a nombres de cursos de valores distinta de φ, pero de tal índole que satisface el Axioma V si φ lo hace.

Siguiendo la línea de Dummett, yo califico este argumento inicial de la sección 10 como *el argumento de permutación de Frege*[10], porque el concepto de una aplicación biyectiva del considerado dominio de objetos sobre sí mismo, es decir, una permutación, es esencial para éste. En el resto de esta sección así como en las secciones 2.2 y 2.3 voy a prescindir de la inconsistencia del sistema lógico de *Grundgesetze.*

Frege sugiere resolver la indeterminación referencial de un nombre de curso de valores, "determinando para cada función, a medida que ésta es introducida, qué valores toma para cursos de valores como argumentos, al igual que para todos los otros argumentos"[11]. En cuanto a los *otros* argumentos, piensa que puede limitarse a los dos valores de verdad. Hasta la sección 10, Frege ha introducido tres funciones primitivas: la función horizontal $—\xi$, la negación $\neg\xi$, y la función de igualdad $\xi = \zeta$. La función horizontal es un concepto de primer nivel bajo el cual cae lo Verdadero solo; la negación es un concepto de primer nivel bajo el cual cae todo objeto con la única excepción de lo Verdadero. La determinación de los valores de la negación puede ser ignorada. La función horizontal, sin embargo, puede reducirse a la función de igualdad: $\xi = (\xi = \xi)$ y $—\xi$ son obviamente conceptos coextensivos. Por tanto, tenemos que determinar meramente qué valor adopta la función de igualdad si insertamos en uno de los dos lugares argumentales de "$\xi = \zeta$" un nombre de curso de valores y en el otro un nombre de un valor de verdad que no tiene la forma de un nombre de curso de valores. No obstante, no podemos decidir, apelando al Axioma V, si uno u otro valor de verdad es o no un curso de valores.

Puesto que en el sistema de teoría de conjuntos y lógica de segundo orden de *Grundgesetze* los cursos de valores son indefinibles, Frege debe intentar otra forma -distinta a la de *Grundlagen*- para superar la indeterminación referencial de un nombre como "$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$". Intenta lograr esto construyendo primeramente una variante de su argumento inicial de permutación y haciendo luego una estipulación sobre la base de dicha variante. Por mayor brevedad, presentaré su argumento del mismo modo en que lo hice antes.

(P2) Como en (P1), sea φ una asignación de objetos a nombres de cursos de valores que satisfagan el Axioma V. Sean $f(\xi)$ $g(\xi)$ dos funciones particulares, extensionalmente no equivalentes. Supongamos que φ asigna *a* a "$\grave{\varepsilon}f(\varepsilon)$" y *b* a "$\grave{\alpha}g(\alpha)$". Sea h una función tal que

(i) h(a) es lo Verdadero,

(ii) h(lo Verdadero) es a,

(iii) h(b) es lo Falso,

(iv) h(lo Falso) es b, y,

(v) para cada argumento x distinto de éstos, h(x) = x.

Finalmente, sea φ' una asignación de objetos a nombres de cursos de valores relacionados con φ como en (P1), con respecto a la permutación particular h que acabamos de especificar. Luego, como en (P1), φ' satisfará el Axioma V.

Recurriendo a (P2), Frege concluye que tenemos libertad para estipular, sin contradecir el Axioma V, que lo Verdadero sea idéntico a un curso de valores de una función monádica arbitraria de primer nivel, y lo Falso (idéntico) a un curso de valores de cualquier otra función extensionalmente no equivalente del mismo tipo[12]. Así, él propone eliminar la indeterminación referencial de nombres de cursos de valores haciendo precisamente semejante estipulación: identifica lo Verdadero y lo Falso con sus propias clases unitarias. Los valores de verdad figuran ahora como valores de la función $\grave{\varepsilon}\varphi(\varepsilon)$ para ciertos argumentos, y, en consecuencia, como objetos que satisfacen el Axioma V[13].

Vale la pena considerar un aspecto importante de la estrategia de Frege. Sus observaciones al comienzo de la sección 10 parecen sugerir que, en su opinión, la indeterminación referencial de los nombres de cursos de valores se puede superar, si se fijan sólo los valores de la función de igualdad para cursos de valores como argumentos así como para todos los restantes argumentos de tipo 1. Como hemos visto, el método propuesto por Frege para resolver el problema tiene un carácter más general. No obstante, la fijación de los valores de $\xi = \zeta$ para cursos de valores y para los dos valores veritativos como argumentos desempeña un *papel clave* en el método de Frege. Esto es el caso aún independientemente del hecho de que para $-\!\!\top\!\!\xi$ la determinación de los valores funcionales resulta innecesaria y de que $-\!\!-\xi$ puede reducirse a $\xi = \zeta$. Mediante la determinación del valor veritativo de ecuaciones de la forma "$\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon) = \acute{\alpha}\Psi(\alpha)$" por un lado y "proposiciones de reconocimiento" de la forma "$\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon) = \Delta$" o "$\Delta = \acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$" por otro lado -donde "$\Delta$" no es un nombre de curso de valores sino un nombre de un valor veritativo*[14] o un término que pertenece a otra clase de nombres de objeto del lenguaje formal- Frege puede garantizar precisamente lo siguiente: que los valores funcionales de cualquier otra función primitiva de primer nivel están determinados para cursos de valores como argumentos conforme a la manera en la que ha sido introducido o aclarado.

Tomemos la función $\begin{array}{l}\top\!\!-\xi\\ \llcorner\,\zeta\end{array}$ que, como Frege parece suponer, no puede reducirse plenamente a ninguna otra función de su sistema[15]. ¿Qué valor toma ésta si se elige como argumento ζ a la clase unitaria $\acute{\varepsilon}(\varepsilon = (\varepsilon = \varepsilon))$ y como argumento ξ a la clase universal $\acute{\varepsilon}(\varepsilon = \varepsilon)$? Según su aclaración, lo Falso, si $\acute{\varepsilon}(\varepsilon = (\varepsilon = \varepsilon))$ es lo Verdadero y $\acute{\varepsilon}(\varepsilon = \varepsilon)$ no es lo Verdadero; lo Verdadero en los demás casos. Ahora bien, $\acute{\varepsilon}(\varepsilon = (\varepsilon = \varepsilon))$ es lo Verdadero, en virtud de la identificación de lo Verdadero con $\acute{\varepsilon}(-\!\!-\varepsilon)$[16], y $\acute{\varepsilon}(-\!\!-\varepsilon) = \acute{\varepsilon}(\varepsilon = \varepsilon)$ es lo Falso, en virtud del Axioma V. Puesto que $\acute{\varepsilon}(\varepsilon = \varepsilon)$ no coincide con lo Verdadero, la relación $\begin{array}{l}\top\!\!-\xi\\ \llcorner\,\zeta\end{array}$ toma lo Falso como valor si el argumento ζ es $\acute{\varepsilon}(\varepsilon = (\varepsilon = \varepsilon))$ y el argumento ξ es $\acute{\varepsilon}(\varepsilon = \varepsilon)$. Por esta razón, Frege puede sostener que en virtud de la explicación de esta función diádica y las estipulaciones previas, están determinados sus valores también para cursos de valores como argumentos.

Regresemos a la función descriptiva para ver cómo podemos determinar el valor veritativo de ecuaciones de la forma "$\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon) = \backslash\acute{\alpha}\Psi(\alpha)$" (o "$\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon) = \backslash\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$"). Frege introduce $\backslash\xi$ mediante una estipulación con dos partes:

(a) Si al argumento Γ de $\backslash\xi$ le corresponde un objeto Δ de modo tal que $\Gamma = \acute{\varepsilon}(\Delta = \varepsilon)$, entonces Δ mismo debe ser el valor de $\backslash\xi$;

(b) Si el antecedente de (a) no tiene validez, entonces $\backslash\Gamma$ debe ser Γ.

Según esta estipulación, "$\backslash\acute{\varepsilon}(\Delta = \varepsilon) = \Delta$" denota lo Verdadero y, por lo tanto, puede reemplazar la tentativa identificación de $\acute{\varepsilon}(\Delta = \varepsilon)$ con Δ que Frege considera en una tortuosa nota al pie de la sección 10. Como veremos en la sección 2.2, no sólo es insostenible la estipulación $\acute{\varepsilon}(\Delta = \varepsilon) = \Delta$ en su forma general por razones formales -esto es, si se supone que incluye objetos ya dados como cursos de valores- sino que el argumento de Frege en la nota al pie parece socavar ya la legitimidad de la identificación de cualquier objeto, que se nos da independientemente de cursos de valores, con su propia clase unitaria.

Si la función $\Phi(\xi)$ es un concepto bajo el cual cae únicamente un objeto, entonces "$\backslash\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$" designa exactamente este objeto. En los casos restantes -si más de un objeto cae bajo $\Phi(\xi)$; si ningún objeto cae bajo $\Phi(\xi)$; si $\Phi(\xi)$ no es un concepto- "$\backslash\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$" tiene la misma referencia que "$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$". Por lo tanto, una expresión de la forma "$\backslash\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$" siempre es un nombre de un curso de valores o de un valor veritativo, si cada concepto $\Phi(\xi)$ bajo el cual cae un único objeto y cuya designación "$\Phi(\xi)$" forma una parte de un nombre "$\backslash\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$" es tal que el único objeto ya es un valor veritativo o un curso de valores. Apelando a la estipulación informal de la sección 10 podríamos aún decir que cada descripción definida "$\backslash\grave{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon)$" se refiere a un curso de valores.

Ahora estamos en una posición que nos permite tratar la cuestión en torno a la determinación del valor veritativo de un enunciado de identidad de la forma "$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon) = \backslash\grave{\alpha}\Psi(\alpha)$". Tomemos, por ejemplo, las proposiciones (a) "$\grave{\varepsilon}(\varepsilon = \varepsilon) = \backslash\grave{\varepsilon}(-\!\!\top\!\!-\varepsilon)$" y (b) "$\grave{\varepsilon}(\varepsilon \neq \varepsilon) = \backslash\grave{\varepsilon}(\varepsilon = \grave{\varepsilon}(\varepsilon = \varepsilon))$". De acuerdo con la estipulación que Frege hace respecto a $\backslash\xi$, (a) puede reducirse a (a') "$\grave{\varepsilon}(\varepsilon = \varepsilon) = \grave{\varepsilon}(-\!\!\top\!\!-\varepsilon)$" y (b) a (b') "$\grave{\varepsilon}(\varepsilon \neq \varepsilon) = \grave{\varepsilon}(\varepsilon = \varepsilon)$"; y las condiciones de verdad de (a') y (b') están determinadas a través del lado derecho del Axioma V. (a') y (b') son falsas y asimismo (a) y (b). En contraste con (a) y (b), la proposición (c) "$\grave{\varepsilon}(\varepsilon = (-\!\!\top\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\, \mathfrak{a} = \mathfrak{a})) = \backslash\grave{\varepsilon}(-\!\!-\varepsilon)$", por ejemplo, no puede reducirse a una ecuación en la que ambos términos flanqueando el signo de identidad son de la forma "$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$", sin tener que invocar a la estipulación adicional de la sección 10. Si Frege no hubiese identificado los valores veritativos con su clases unitarias, (c) daría lugar al mismo problema que encontramos en la sección 10 concerniente a la determinación del valor veritativo de una ecuación como "$\grave{\varepsilon}(-\!\!-\varepsilon) = (-\!\!\top\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\, \mathfrak{a} = \mathfrak{a})$"; ya que "$\backslash\grave{\varepsilon}(-\!\!-\varepsilon)$" denota lo Verdadero del mismo modo como lo hace "$-\!\!\top\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\, \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$". La estipulación en la sección 10, sin embargo, nos permite reemplazar "$\backslash\grave{\varepsilon}(-\!\!-\varepsilon)$" por "$\grave{\varepsilon}(-\!\!-\varepsilon)$" en (c), y la proposición que resulta (c'), es verdadera sobre la base del Axioma V.

En la primera parte de este artículo, subrayé el hecho de que al definir "$N_xF(x)$" en términos de "$\lambda\varphi(E_x(\varphi(x),F(x)))$" y "0", "1", etc. en términos de "$N_x\varphi(x)$" Frege consigue extender el dominio del criterio de identidad para números cardinales que propuso originalmente. Es obvio que la situación de los cursos de valores en *Grundgesetze* es análoga a la situación de los números en *Grundlagen,* aunque en la primera Frege está operando en el marco de un sistema formal mientras que en la segunda la investigación se lleva a cabo en el marco del lenguaje natural, empleando sólo pocos recursos técnicos. En virtud de las estipulaciones hechas en las secciones 10 y 11 de *Grundgesetze* y las definiciones del operador numérico y de los números individuales, Frege consigue extender considerablemente el dominio de aplicabilidad del criterio de identidad para cursos de valores incorporado en el Axioma V. El Axioma V, junto con estas estipulaciones y definiciones, proporciona un medio para determinar el valor veritativo de cualquier ecuación de los siguientes quince tipos[17]:

(1) $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon) = \grave{\alpha}\Psi(\alpha)$

(2) $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon) = \mathrm{NVV}$

(3) $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon) = \grave{\alpha}\Psi(\alpha)$

(4) $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon) = \mathbf{N}\ \grave{\alpha}\Psi(\alpha)$

(5) $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon) = n$

(6) $\mathrm{NVV} = \mathrm{NVV}$

(7) $\mathrm{NVV} = \backslash\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$

(8) $\mathrm{NVV} = \mathbf{N}\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$

(9) $\mathrm{NVV} = n$

(10) $\backslash\grave{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon) = \grave{\alpha}\Psi(\alpha)$

(11) $\backslash\grave{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon) = \mathbf{N}\ \grave{\alpha}\Psi(\alpha)$

(12) $\backslash\grave{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon) = n$

(13) $\mathbf{N}\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon) = \mathbf{N}\ \grave{\alpha}\Psi(\alpha)$

(14) $\mathbf{N}\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon) = n$

(15) $n = m$

Una ecuación de los tipos (2)-(15) puede reducirse a una del tipo (1), y las condiciones de verdad de esta última están determinadas por el lado derecho del Axioma V. Como argumentaré en la sección 2.3, el criterio de identidad para cursos de valores así extendido carece aún de la generalidad necesaria tal y como fue el caso con el criterio de identidad numérica. Y ésto significa que la solución del problema de indeterminación en torno a los cursos de valores, que Frege ofrece en *Grundgesetze,* resulta ser también insatisfactoria.

2.2. Clases unitarias

La segunda nota al pie de la sección 10 que voy a analizar ahora es intricada y enigmática; además resulta ser muy importante para evaluar adecuadamente la estrategia fregeana en la sección 10. Hemos visto que Frege consigue establecer la legitimidad *formal* de su estipulación adicional mediante un argumento ingenioso. Haber mostrado que pueden identificarse los dos valores de verdad con sus clases unitarias sin contradecir el Axioma V es, en efecto, su realización clave en la sección 10. En la nota al pie, por contraste, Frege parece arriesgar, si no invalidar, la legitimidad de su estipulación adicional usando básicamente el mismo argumento que encontramos en la sección 67 de *Grundlagen* respecto a la introducción de términos para direcciones. Sorprendentemente, pasa por alto la discrepancia. ¿Así pues, la identificación de lo Verdadero y de lo Falso con sus clases unitarias, la que Frege considera como clave para resolver la indeterminación referencial de términos de cursos de valores, no es, al fin y al cabo, otra cosa que un intento frustrado? En lo que sigue trato de arrojar luz sobre su argumentación.

En la nota al pie de la sección 10, Frege considera la posibilidad de generalizar su estipulación de modo que cada objeto se identifique con su clase unitaria. Nótese que al comienzo de la nota al pie, incluye a todo objeto Δ en la identificación tentativa de Δ con $\acute{\varepsilon}(\Delta = \varepsilon)$, y no sólo a los objetos de su sistema. Es evidente que la estipulación $\acute{\varepsilon}(\Delta = \varepsilon) = \Delta$, si fuese formalmente válida, podría reiterarse *ad libitum*, apelando al principio de la sustitutividad mutua de términos co-referenciales, esto es, $\acute{\varepsilon}(\Delta = \varepsilon)$ podría identificarse con $\acute{\varepsilon}(\dot{\varepsilon}(\Delta = \varepsilon) = \varepsilon)$, $\acute{\varepsilon}(\dot{\varepsilon}(\Delta = \varepsilon) = \varepsilon)$ con $\acute{\varepsilon}(\dot{\varepsilon}(\dot{\varepsilon}(\Delta = \varepsilon) = \varepsilon) = \varepsilon)$, etc. En mi opinión, es sorprendente que Frege nos deje a oscuras sobre su motivo para examinar la posibilidad de extender la estipulación en la sección 10. Sólo nos dice que la identificación de Δ con $\acute{\varepsilon}(\Delta = \varepsilon)$ sería una propuesta natural. ¿Pero en qué sentido se nos ofrece? ¿Qué lograríamos si semejante identificación fuese impecable desde un punto de vista formal? En la sección 11 de *Grundgesetze,* Frege sostiene que si la identificación de $\acute{\varepsilon}(\Delta = \varepsilon)$ con Δ se hubiera podido mantener en su forma general, entonces un nombre de la forma "$\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$" debería servir como sustituto para el artículo definido del lenguaje ordinario. Pues si $\Phi(\xi)$ fuese un concepto bajo el cual cae Δ y sólo Δ, entonces la proposición "$-\overset{\mathfrak{a}}{\smile}-\,\Phi(\mathfrak{a}) = (\Delta = \mathfrak{a})$" sería verdadera y, por lo tanto, "$\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon) = \acute{\varepsilon}(\Delta = \varepsilon)$" también sería verdadera; y, según la estipulación $\acute{\varepsilon}(\Delta = \varepsilon) = \Delta$, $\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ sería idéntico a Δ. Ciertamente, no podemos descartar la posibilidad de que Frege fuera consciente del problema de que, a la luz de sus propios criterios, una determinación completa de la referencia de un nombre de curso de valores no se puede garantizar a través de la determinación de los valores de las funciones primitivas de primer nivel de su sistema sólo para valores de verdad y cursos de valores como argumentos. Si él concibiese el hecho de que el lenguaje formal de su sistema lógico está diseñado para contener solamente nombres de objeto para valores veritativos y cursos de valores como una buena razón para rechazar una generalización de su estipulación desde del comienzo, entonces se me haría difícil entender por qué añade la nota al pie de la sección 10. Un nombre de valor veritativo* bien formado denota un valor veritativo; un nombre de curso de valores bien formado designa un curso de valores. No obstante, esta observación no resuelve la cuestión de si un curso de valores dado es idéntico a Julio César o no. Volveré a discutir este asunto en la sección 2.3.

Quizá uno puede estar inclinado a interpretar la primera oración de la nota al pie de la sección 10 de tal manera que Frege estaría considerando la posibilidad de extender la estipulación sólo a cada objeto no dado como curso de valores, así pues, no tomando en cuenta objetos ya dados como cursos de valores. Pues podría parecer que pudiéramos decidir, apelando al Axioma V, si un curso de valores dado coincide con un objeto Δ, que no es designado por un nombre de curso de valores, una vez que hemos identificado Δ con su propia clase unitaria[18]. Sea como fuere, aun en el caso de que la identificación de objetos ya dados como cursos de valores con sus clases unitarias fuese consistente con el Axioma V, no contribuiría de ningún modo a resolver la indeterminación referencial de los términos de cursos de valores. Sin embargo, estoy bastante seguro de que, en la nota al pie, Frege intenta incluir objetos ya designados por nombres de cursos de valores en la estipulación generalizada que está considerando.

Frege afirma que la estipulación $\acute{\varepsilon}(\Delta = \varepsilon) = \Delta$ es posible para cada objeto que se nos da independientemente de cursos de valores sobre la misma base tal como observó respecto a los valores veritativos. Al mismo tiempo, subraya que sería intolerable permitir que esta estipulación "se mantuviese solamente para aquellos objetos que no nos son dados como cursos de valores; la manera en que un objeto se nos da no debe considerarse como una propiedad inmutable de éste, puesto que el mismo objeto puede darse de diferentes maneras" (GGA I, 18 nota al pie; BLA, 48). De hecho, en el sistema de *Grundgesetze*, la extensión, por ejemplo, del concepto $—\xi$ puede ser designada no solamente por nombres de cursos de valores (por ejemplo, por "$\acute{\varepsilon}(\varepsilon = (\varepsilon = \varepsilon))$"), sino también por nombres de valores veritativos* (por ejemplo, por "$\forall\mathfrak{a}\; \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$") y descripciones definidas (por ejemplo, por "$\backslash\acute{\varepsilon}(—\varepsilon)$"). Además, ciertos cursos de valores (extensiones de conceptos) pueden ser designados por numerales tales como "0", "1" u "$\hat{\omega}$" o por términos numéricos que tienen la forma "$\mathbf{N}\varepsilon'\,\Phi(\varepsilon)$".

La sugerencia de extender la estipulación de la sección 10 a todos los objetos, incluso a aquellos designados por nombres de cursos de valores, fracasa. Frege la rechaza porque entraría en contradicción con el criterio de identidad para cursos de valores incorporado en el Axioma V, si el objeto que debe identificarse con su clase unitaria ya se nos ha dado como curso de valores. A pesar de que el punto es evidente, quiero explicarlo siguiendo la exposición de Frege. Si aplicamos la estipulación $\acute{\varepsilon}(\Delta = \varepsilon) = \Delta$ a $\acute{\varepsilon}(\neg\varepsilon)$, podemos formar la ecuación "$\acute{\varepsilon}(\acute{\varepsilon}(\neg\varepsilon) = \varepsilon) = \acute{\varepsilon}(\neg\varepsilon)$". Según el Axioma V, ésta tiene el mismo valor veritativo que la ecuación generalizada "$\forall\mathfrak{a}\; (\acute{\varepsilon}(\neg\varepsilon) = \mathfrak{a}) = \neg\mathfrak{a}$". Esta última es falsa, sin embargo, ya que no todo objeto que cae bajo $\neg\xi$, cae también bajo $\acute{\varepsilon}(\neg\varepsilon) = \zeta$. De este resultado, Frege no concluye explícitamente que la estipulación $\acute{\varepsilon}(\Delta = \varepsilon) = \Delta$ sea ilícita para *todo* objeto Δ. Si hubiera hecho esto, habría tenido que declarar su estipulación en la sección 10 nula y sin efecto[19]. Ante una breve reflexión, otro punto parece claro. Cada curso de valores cuya función correspondiente es un concepto bajo el cual cae su propia extensión como único objeto, podría identificarse con su clase unitaria. Pero si Frege no hubiese estipulado que lo Verdadero y lo Falso deben ser identificados con sus clases unitarias, no estaría en una posición que le permitiese identificar todo objeto dado como curso de valores con su clase unitaria, sin contradecir el Axioma V. Por consiguiente, es sólo en virtud de esta estipulación que la identificación de $\acute{\varepsilon}(\Delta = \varepsilon)$ con Δ para ciertos objetos dados como cursos de valores se puede llevar a cabo formalmente. Más específicamente, la identificación vale para las extensiones de los conceptos $—\xi$ y $\xi = (\neg\forall\mathfrak{a}\; \mathfrak{a} = \mathfrak{a})$, respectivamente para la extensión de cada concepto que es coextensivo con $—\xi$ o $\xi = (\neg\forall\mathfrak{a}\; \mathfrak{a} = \mathfrak{a})$; por ejemplo, la identificación de $\acute{\varepsilon}(\varepsilon = (\varepsilon = \varepsilon))$ con $\acute{\varepsilon}(\acute{\varepsilon}(\varepsilon = (\varepsilon = \varepsilon)) = \varepsilon\ )$ sería legítima[20].

Frege identifica los dos objetos primitivos de la lógica con sus propias clases unitarias. ¿Qué lo justifica a hacer esto? En su artículo 'Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröders Vorlesungen über die Algebra der Logik' (1895), Frege rechaza como insostenible la identificación que establece Schröder entre un individuo y la clase, a la que aquél pertenece como único individuo, porque ella lleva a una contradicción (cf. KS, 201; TF, 96). Frege argumenta del modo siguiente: Sea P una clase que contiene varios individuos como elementos, en particular, los dos distintos individuos a y b. Sea Q una clase a la que pertenece P como único elemento. Ahora bien, si fuese correcto sostener que una clase unitaria es idéntica a su único elemento, entonces Q coincidiría con P y, en consecuencia, a y b serían igualmente elementos de Q. Pero considerando que Q es una clase que contiene P como único elemento, debería valer a = P así como b = P, y, por lo tanto a = b en contra de la premisa a $\neq$ b. Como Frege subraya, la suposición de que las clases unitarias coinciden con los individuos es una consecuencia necesaria de la concepción de que las clases consisten en individuos -una concepción que surge del cálculo de dominios de Schröder. Frege se aparta de esta concepción debido a que no es apropiada para el uso lógico; el cálculo de dominios resulta confuso[21]. Parece claro que Frege considera su propia concepción de las clases immune a las objeciones que él plantea a la posición de Schröder. Sin embargo, hay una objeción de tipo totalmente diferente y a la vez de mucho alcance que surge de la estipulación de Frege en la sección 10. A la luz de su platonismo, debería ser un asunto de hecho objetivo si cada uno de los valores de verdad es o no un curso de valores y, por consiguiente, no algo que pueda ser establecido mediante estipulación. Nos encontramos precisamente con este conflicto en la nota al pie que estamos considerando.

Frege descarta la propuesta, intuitivamente atrayente, de identificar a todos y sólo a aquellos objetos que no son dados como cursos de valores, con sus clases unitarias. Lo hace sobre la base de que la manera en que un objeto se nos da no debe considerarse una propiedad invariante de éste[22]. ¿Qué fuerza se supone que tiene este argumento? ¿Cómo debe el argumento explicar o justificar la afirmación de que sería insostenible restringir la estipulación $\grave{\varepsilon}(\Delta = \varepsilon) = \Delta$ a objetos no dados como cursos de valores? ¿Piensa Frege que si permitiésemos la restricción, elegiríamos el modo en que un objeto se da como un rasgo esencial de éste, y, en consecuencia, confiaríamos en la suposición cuestionable de que todo objeto Δ no dado como curso de valores en efecto no es un curso de valores?[23] Pues si no confiásemos en esta suposición, no podríamos descartar que nuestra identificación de un objeto Δ, que no se da como curso de valores, con su clase unitaria peca contra el criterio de identidad para los cursos de valores incorporado en el Axioma V, esto es, que Δ es, en realidad, un curso de valores, y, en particular, un curso de valores distinto de su clase unitaria. Pero si Frege efectivamente favorece esta opinión en la nota al pie, entonces, por la misma razón, no habría tenido derecho alguno a identificar los valores de verdad con sus clases unitarias en primer lugar. En otras palabras: si Frege considera la estipulación en la sección 10 legítima -y lo hace desde el punto de vista formal del argumento de permutación- entonces no podría rechazar razonablemente la identificación de al menos algunos objetos, que son distintos tanto de lo Verdadero como de lo Falso y que no se dan como cursos de valores, con sus clases unitarias. Recuérdese que en la nota al pie, Frege afirma que la estipulación $\grave{\varepsilon}(\Delta = \varepsilon) = \Delta$ es posible para cada objeto que se nos da independientemente de cursos de valores. No obstante, sus observaciones subsiguientes ponen en duda justamente esta afirmación.

Ser designado por un nombre de curso de valores no es una propiedad esencial de un curso de valores. En el sistema de *Grundgesetze*, $\grave{\varepsilon}(-\varepsilon)$, por ejemplo, podría designarse por "\$\grave{\varepsilon}(-\varepsilon)$"; fuera del sistema, uno podría referirse a $\grave{\varepsilon}(-\varepsilon)$ por "el objeto favorito de Frege". ¿Estaría inclinado Frege a mantener que un objeto Δ dado como curso de valores, en realidad, no podría ser un curso de valores? Esto me parece improbable. En todo caso, si se ha establecido que Δ es un objeto que satisface el Axioma V, Frege probablemente no dudaría acerca de la naturaleza de Δ. De lo contrario, tendría que vivir con una inseguridad atormentadora: que en el curso de la construcción de su sistema lógico quizá ha sucumbido a la ilusión de interpretar como cursos de valores lo que en realidad son objetos de otro tipo, por ejemplo, cuerpos celestes. Aunque no podemos decidir con la ayuda del Axioma V si, por ejemplo, $\acute{\varepsilon}(-\varepsilon)$ es o no un valor de verdad, queremos mantener que $\acute{\varepsilon}(-\varepsilon)$ es un objeto que satisface el Axioma V. Si $\acute{\varepsilon}(-\varepsilon)$ fuera idéntico a lo Falso, estaríamos obligados a decir que lo Falso satisface el Axioma V. Antes de la estipulación de la sección 10, no podemos excluir la posibilidad de que, por ejemplo, $\acute{\varepsilon}(-\varepsilon)$ coincida con Julio César. Pero, ¿estamos en una mejor situación después de haber identificado lo Verdadero con su propia clase unitaria? Frege insistiría, presumiblemente, en el hecho de que es en virtud de nuestra familiaridad intuitiva con los dos valores veritativos -algo que nos falta en el caso de los cursos de valores- que podemos distinguir seguramente lo Verdadero y lo Falso de Julio César. Sea como fuere, sería raro decir que una vez que lo Verdadero se ha identificado con $\acute{\varepsilon}(-\varepsilon)$, sabemos que $\acute{\varepsilon}(-\varepsilon)$ es distinto de Julio César. Frege no puede resolver la cuestión mediante una estipulación, sin pecar contra su platonismo.

Recapitulemos: la pregunta de si se puede extender consistentemente la estipulación $\acute{\varepsilon}(\Delta = \varepsilon) = \Delta$ a objetos que ya son designados por términos de cursos de valores, resulta ser irrelevante para cualquier solución proyectada del problema de indeterminación acerca de los términos de cursos de valores. La cuestión de si, por ejemplo, $\acute{\varepsilon}(\acute{\varepsilon}(\varepsilon = (\varepsilon = \varepsilon)) = \varepsilon)$ coincide con Julio César, plantea el mismo problema que la cuestión de si $\acute{\varepsilon}(\varepsilon = (\varepsilon = \varepsilon))$ es idéntico al emperador romano que cruzó el Rubicón. Además, aun si una extensión tal fuese posible, no permitiría, por sí misma, la identificación de un objeto Δ, no dado como curso de valores, con su clase unitaria. Esto vale especialmente desde la perspectiva del platonismo fregeano. Si el principio sostenido por Frege de que la manera en que se nos da un objeto no es una propiedad invariante de éste es capaz de sostenerse -y yo creo que lo es- entonces socava no sólo la idea de generalizar la estipulación respecto a los valores veritativos, sino también dicha estipulación. Pues un objeto que no es designado por un término de curso de valores tal como $-\!\smile^{\mathfrak{a}}\!-\ \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ puede, sin embargo, *ser* un curso de valores y, en particular, un curso de valores que es distinto de su clase unitaria[24].

Un ejemplo puede ilustrar este asunto. Para Frege, parece ser un hecho objetivo que el número 1, por ejemplo, es la extensión del concepto *equinumérico con la clase* $\acute{\varepsilon}(\varepsilon = 0)$. En el sistema de *Grundgesetze,* el número 1 puede ser designado por un término que no pertenece a la categoría de los términos de cursos de valores, a saber mediante el numeral "1" o el término numérico "$\mathbf{N}\acute{\varepsilon}(\varepsilon = 0)$". Ahora bien, si Frege identificase el número 1 con su clase unitaria, es decir, con $\acute{\varepsilon}(\varepsilon = 1)$ o $\acute{\varepsilon}(\mathbf{N}\acute{\varepsilon}(\varepsilon = 0) = \varepsilon)$, se enfrentaría a un resultado intolerable. Sustituyendo el término de clase "$\acute{\varepsilon}(\varepsilon \sim \acute{\varepsilon}(\varepsilon = 0))$" por "1" podemos formar la siguiente ecuación: $\acute{\varepsilon}(\varepsilon = 1) = \acute{\varepsilon}(\varepsilon \sim \acute{\varepsilon}(\varepsilon = 0))$. Según el Axioma V, esta ecuación es verdadera si y sólo si los conceptos $\xi = 1$ and $\xi \sim \acute{\varepsilon}(\varepsilon = 0)$ son coextensivos. Se puede mostrar fácilmente que esta condición no se da. Bajo el concepto $\xi = 1$ cae el número

1 y, de acuerdo con la identificación tentativa de 1 con su clase unitaria, también $\grave{\varepsilon}(\varepsilon = 1)$. Si en "$\grave{\varepsilon}(\varepsilon = 1)$" sustituimos "$\grave{\varepsilon}(\varepsilon = 1)$" por "1", obtenemos "$\grave{\varepsilon}(\varepsilon = \grave{\varepsilon}(\varepsilon = 1))$". El concepto que corresponde a la extensión $\grave{\varepsilon}(\varepsilon = \grave{\varepsilon}(\varepsilon = 1))$, esto es, $\xi = \grave{\varepsilon}(\varepsilon = 1)$, tendría que ser coextensivo con $\xi = 1$, si nuestra estipulación tentativa fuese legítima. Ahora bien, toda clase unitaria es equinumérica con $\grave{\varepsilon}(\varepsilon = 0)$, incluyendo $\grave{\varepsilon}(\varepsilon = 0)$ misma. Sin embargo, puesto que $\grave{\varepsilon}(\varepsilon = 0)$ no cae bajo el concepto $\xi = 1$, este concepto no es extensionalmente equivalente a $\xi \sim \grave{\varepsilon}(\varepsilon = 0)$ y, por lo tanto, la ecuación "$\grave{\varepsilon}(\varepsilon = 1) = \grave{\varepsilon}(\varepsilon \sim \grave{\varepsilon}(\varepsilon = 0))$" resulta ser falsa. Se sigue que, después de haber identificado los números cardinales con clases de equivalencia de la relación de equinumericidad entre clases, Frege no estaría en condiciones de identificar un número cardinal particular con su clase unitaria.

Una lección que obtenemos de la nota al pie es ésta: que posiblemente tenemos que reconocer todo objeto que no se nos da como curso de valores como *siendo* un curso de valores. Un lógico hipotético que abarcase completamente con la vista el universo de los cursos de valores fregeanos y tuviese un conocimiento perfecto de éste, podría informarnos de que cada objeto Δ, al que uno se refiere mediante un término que no es un nombre de curso de valores, *es* un curso de valores. Pero si aceptamos que Δ es un objeto regido por el Axioma V, entonces no podemos identificar Δ con su clase unitaria sin infringir el criterio de identidad incorporado en la Ley Básica V, a menos que Δ resulte ser la extensión de un concepto bajo el cual cae únicamente Δ mismo. Una segunda posibilidad sería ésta: nuestro lógico hipotético nos diría que todo objeto, que no es designado por un término de curso de valores fuera del sistema de *Grundgesetze,* es, en efecto, idéntico a su propia clase unitaria. No obstante, en relación al lenguaje formal de *Grundgesetze* no podría sostener que todo nombre de objeto, no siendo un nombre de curso de valores, se refiere a un curso de valores que resulta ser su clase unitaria. "$\backslash\grave{\varepsilon}(\varepsilon = \varepsilon)$" y **N** $\grave{\varepsilon}(\varepsilon \neq \varepsilon)$" son ejemplos de nombres que se refieren a un curso de valores, aunque no designan una clase unitaria. Finalmente, nuestro lógico omnisciente podría informarnos que todo objeto, que no es dado como curso de valores fuera del sistema de *Grundgesetze*, no es un curso de valores. Pero si supiéramos esto, sería supérfluo generalizar la estipulación de la sección 10; de hecho, cada estipulación generalizada $\grave{\varepsilon}(\Delta = \varepsilon) = \Delta$, que abarca objetos no designados por nombres de cursos de valores fuera del sistema fregeano, sería falsa. Parece claro que en vista de lo que considero el argumento crucial en la nota al pie de la sección 10, Frege no tendría ninguna posición ventajosa para rechazar alguna de estas posibilidades, si quisiera hacer esto.

Volviendo a la cuestión que había planteado al comienzo de esta sección, poco, si algo, nos queda para decir en favor de la estipulación de Frege en la sección 10, si la evaluamos a la luz de lo que parece ser su argumento en la nota al pie de esta sección. Tenemos que concluir, siguiendo los criterios que el mismo Frege establece, que la identificación de lo Verdadero y de lo Falso con sus clases unitarias es un paso en falso. Tanto peor para su proyecto de fundamentación lógica de la aritmética.

2.3. Indeterminación no resuelta

Es oportuno examinar ahora la pregunta de si Frege eventualmente logra fijar por completo las referencias de los nombres de cursos de valores, y, por lo tanto, justificar el uso de esos nombres en su lenguaje formal. Dejaré a un lado el resultado negativo al final de la sección 2.2. Y como antes, voy a prescindir de la inconsistencia del sistema fregeano.

En la sección 2 de *Grundgesetze*, Frege pone de relieve que el dominio de aquello que se admite como argumento (del tipo 1) debe extenderse a los objetos en general. Yo llamo a esta exigencia: "la doctrina de no-exclusividad de Frege". En conformidad con esto, *explica* las funciones primitivas, lógicamente simples de primer nivel para todos los argumentos admisibles, esto es, para un dominio universal de objetos, y *define* ciertas funciones lógicamente complejas, de acuerdo con su principio de completud, "para todos los objetos posibles como argumentos" (GGA I, 52f.; BLA, 92). Finalmente, las variables individuales libres a, b, ..., que Frege utiliza en el sistema de *Grundgesetze* desempeñan la tarea de indicar objetos en general, no solamente aquellos que pertenecen a un dominio con límites ya fijados (cf. GGA II, 78; TF, 169). Así, resulta sorprendente que la determinación de los valores funcionales de $\xi = \zeta$, para cursos de valores como argumentos, "al igual que para todos los otros argumentos", se lleva a cabo eventualmente sólo para cursos de valores y los valores de verdad. Frege intenta justificar esta restricción recurriendo al hecho de que hasta la sección 10 ningún otro objeto ha sido introducido (GGA I, 17; BLA 47).

En esta etapa de su investigación, sin embargo, Frege parece ser perfectamente consciente de lo que podríamos describir como sigue. Supongamos que su fundamentación proyectada de las teorías de los números cardinales y de los números reales requiriese de la introducción de un tercer nuevo tipo de objetos y, de conformidad con esto, una nueva categoría de nombres propios para referirse a esos objetos. En ese caso, la indeterminación referencial concerniente a los términos de cursos de valores surgiría nuevamente. Una extensión del dominio original de objetos, consistente en los dos valores de verdad y en cursos de valores, podría proceder de la siguiente manera. Además del concepto de generalidad de segundo nivel $-\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\ \varphi(\mathfrak{a})$ y la función de cursos de valores $\acute{\varepsilon}\varphi(\varepsilon)$, una tercera función de segundo nivel, digamos, $\hat{\alpha}\varphi(\alpha)$, se introduce a través de la siguiente estipulación: su valor para cada función monádica de primer nivel como argumento será un objeto del nuevo tercer tipo. Soy consciente de que Frege quizás no estaría dispuesto a aceptar este modo de introducir una nueva función de segundo nivel, sobre la base de que presupone ilegítimamente un conocimiento de los valores funcionales en cuanto objetos de un nuevo tercer tipo. Recuérdese mi afirmación de que Frege resiste la tentación de introducir cursos de valores a través de una elucidación de $\acute{\varepsilon}\varphi(\varepsilon)$. Sin embargo, supongamos, para facilitar el argumento, que Frege acepta la introducción propuesta de objetos de un nuevo tercer tipo[25]. Los nombres de objeto de la nueva categoría se formarían colocando nombres funcionales monádicos de primer nivel en el lugar argumental de "$\hat{\alpha}\varphi(\alpha)$". Ahora bien, es evidente que la identificación que hace Frege de lo Verdadero y lo Falso con sus clases unitarias puede cumplir su papel sólo si las reglas para la formación correcta de las expresiones del Begriffsschrift preveen la construcción solamente de aquellos nombres de valores funcionales que sirven para designar valores veritativos y cursos de valores.

De lo que acabo de imaginar como una extensión del sistema lógico de Frege, se seguiría que la pretendida determinación completa de las referencias de los nombres de cursos de valores agregando la estipulación adicional concerniente a los valores veritativos, no podría estar asegurada. Puesto que, desde del punto de vista de Frege, no podríamos descartar la posibilidad de que un objeto del nuevo tercer tipo, que la nueva función primitiva de segundo nivel asigne a un argumento admisible, de hecho coincida con un curso de valores. Con el propósito de resolver esta indeterminación reiterada, tendría que hacer otra estipulación, destinada a garantizar que el valor veritativo de cada ecuación, en la cual el signo de identidad conecte un nombre de curso de valores con un nombre de la nueva categoría, se determine de manera única. Y, por supuesto, cada extensión adicional del dominio de objetos requeriría de una estipulación más.

En su carta a Russell del 3.8.1902, Frege escribe: "Usted pregunta ¿cómo se puede saber si algo es un curso de valores? No cabe duda, esto es una cuestión difícil. Ahora bien, todos los objetos de la aritmética se introducen como cursos de valores. Siempre que se considera un nuevo objeto que no ha sido introducido como un curso de valores, tenemos que, de una vez por todas, contestar a la pregunta de si es un curso de valores; y la respuesta es probablemente que no, ya que si fuese un curso de valores, hubiera sido introducido de antemano como tal" (WB, 225; PMC, 142). Claro está, aquí Frege es cauteloso afirmando que una respuesta negativa a la pregunta de la cita sería sólo *probable.* Aún así, su explicación no parece concordar completamente con el argumento que utiliza tanto en la sección 67 de *Grundlagen* como en la sección 10 de *Grundgesetze.* A la luz de este argumento, Frege no estaría justificado en descartar la posibilidad de que el nuevo objeto en cuestión *sea* un curso de valores, apelando al hecho de que éste no había sido introducido como tal.

Ahora bien, el dominio de los valores funcionales del sistema plenamente desarrollado de *Grundgesetze* consiste, de hecho, sólo en los valores veritativos y los cursos de valores. Los objetos que pertenecen a estos dos tipos son, a la vez, los únicos argumentos del tipo 1 que efectivamente se encuentran en el sistema de Frege. Los números naturales se definen como simples cursos de valores especiales, a saber, como clases de equivalencia, y los números reales se definen como dobles cursos de valores especiales, a saber, como Relaciones de Relaciones, esto es, como cocientes de magnitudes. Sin embargo, la existencia de objetos, a los cuales no podemos referirnos empleando nombres bien formados de valores funcionales no constituye un requisito de los axiomas del sistema.

Si tomamos en cuenta la observación de Frege en la sección 9 de *Grundgesetze* que señala que introduciendo su notación para cursos de valores también extendemos el dominio de lo que puede aparecer como argumento de una función (de primer nivel), se sugiere la siguiente suposición. Frege piensa que es suficiente determinar los valores de la relación de identidad sólo para cursos de valores y valores veritativos como argumentos, porque su sistema lógico no contiene y no debe contener ningún medio para designar otros objetos. Esta limitación, sin embargo, apenas puede reconciliarse con su apelación a un dominio universal de objetos. Decir que el lenguaje formal del sistema de *Grundgesetze* no contiene (presumiblemente) nombres para Julio César o La Alhambra, o que semejantes objetos espacio-temporales no necesitan caer dentro del dominio de un modelo de los axiomas del sistema, no socava la legitimidad de la pregunta de si un curso de valores dado es idéntico a Julio César o a la Alhambra. Como Michael Dummett (1981, 410) ha señalado correctamente, la dificultad ni siquiera depende de la suposición de que el dominio abarque todos los objetos. Supongamos que acordamos que el dominio de las variables individuales contenga solamente aquellos objetos cuya existencia es requerida por los axiomas fregeanos. Todavía no sabemos si uno de los cursos de valores incluidos en el dominio sea Julio César y otro la Alhambra. Así, aparte del hecho de que, contrariamente a lo que Frege alega, no siempre resulta posible estipular que un curso de valores arbitrario será lo Verdadero y otro lo Falso[26], el Axioma V junto con la estipulación adicional no determina completamente las referencias de los nombres de cursos de valores. Además, puesto que en el sistema de *Grundgesetze* tanto los números cardinales como los números reales se definen como cursos de valores especiales, la indeterminación referencial de los nombres de cursos de valores se transfiere a los términos que se supone que designan números cardinales, así como a los términos que se refieren supuestamente a números reales.

Si tratamos de resolver la indeterminación referencial concerniente a los nombres de cursos de valores, nos encontramos, en principio, con dos posibilidades. En primer lugar: podríamos estipular que cada objeto que se nos da independientemente de cursos de valores será considerado como distinto de todo curso de valores. En segundo lugar: podríamos establecer que cada objeto no dado como curso de valores debe ser identificado con la extensión de un concepto bajo el cual cae ésta como único objeto. Para Frege, ambas soluciones posibles son inaceptables. Entran en conflicto con su profunda convicción de que la manera en que un objeto se da no debe considerarse como una propiedad invariante de éste.

Se podría estar inclinado a considerar una tercera posibilidad para superar la indeterminación en cuestión. Si una elucidación inobjetable del operador de curso de valores fuese posible, esto es, una que no se apoyase en un supuesto conocimiento de los cursos de valores, la indeterminación no surgiría en lo absoluto. En tal caso, Frege podría haber definido el predicado "a es un curso de valores" ("CV(a)") siguiendo el modelo de su definición de "n es un número" en *Grundlagen*.

$$CV(a) := \exists\varphi(\grave{\varepsilon}\varphi(\varepsilon) = a).$$

Equipados con esta definición, que satisface supuestamente el principio fregeano de completud, estaríamos en posición de decidir, en principio, para cada objeto dado a, si éste es un curso de valores o no lo es. Si a *es* un curso de valores y se da como tal, el Axioma V establecería si a coincide o no con un curso de valores designado por un nombre de curso de valores. Desafortunadamente, la perspectiva de construir una elucidación impecable de "$\grave{\varepsilon}\varphi(\varepsilon)$" no es esperanzadora. En resumen, una solución satisfactoria del problema de indeterminación que estuviese en armonía con los principios subyacentes de la lógica y filosofía de Frege no parece vislumbrarse.

2.4. Observaciones finales

No quiero concluir con una nota puramente crítica sobre un lógico que ha realizado un trabajo pionero no sólo en la lógica y la semántica, sino también en la filosofía de la matemática. Al comienzo de la sección 62 de *Grundlagen*, Frege plantea la pregunta epistemológica de cómo podemos tener acceso a los números si no tenemos un acceso cognoscitivo a ellos a través de ideas o intuiciones. Es justamente aquí donde entra en vigor su demanda de enunciar una condición suficientemente general para la identidad de los números cardinales. De hecho, Frege presenta dicha demanda como un caso especial de lo que piensa se require en general si es que vamos a usar un término singular para referirnos a un objeto, sea éste concreto o abstracto. "Si para nosotros el símbolo *a* denota un objeto, tenemos que tener un criterio que decida en cada caso si *b* es igual a *a*, aun si no está siempre en nuestro poder aplicar este criterio" (GLA, FA, 73)[27]. En la primera parte de este artículo, hice la observación de que Frege deja, al fin y al cabo, que sea el lector quien juzgue cómo puede la definición explícita (III) del término "$N_xF(x)$" resolver el problema de Julio César para los números cardinales, es decir, el problema de otorgar a "$N_xF(x)$ una referencia única. Independientemente de lo que Frege tuviera en mente, hay una cosa que me parece clara. Si (III) fuese incuestionable, y Frege sabía que lo era, insistiría en que el requisito presentado en la sección 62 tendría que ser satisfecho: si vamos a justificar el acto de otorgar una referencia determinada a un término numérico "$N_xF(x)$" es indispensable que nos basemos en un criterio de identidad para los números.

El término "$N_xF(x)$" se define explícitamente en términos de la relación de equivalencia que sirve a su vez como un criterio de identidad para los números cardinales. La definición (III) nos ilustra así: cómo ha de ser determinado el valor veritativo de ecuaciones numéricas. Ahora bien, esta definición por sí sola, no resuelve la interrogante de si, digamos, 9 o el número de los planetas o la clase de los conceptos equinuméricos al concepto *planeta* coincide con el número de los libros en mi estante. Si estoy en lo correcto, la determinación del valor veritativo de los enunciados correspondientes tiene que proceder mediante una aplicación del criterio de identidad incorporado en el principio de Hume[28].

La importancia crucial que Frege atribuye al método de establecer un criterio de identidad siempre que intenta introducir una clase de objetos abstractos se manifiesta también en la sección 104 de *Grundlagen.* En esta sección, trata sucintamente las fracciones, los números irracionales y los números complejos. Exactamente igual que en el caso de los números cardinales, también aquí "todo se reducirá al final en la búsqueda de un contenido enjuiciable que puede transformarse en una ecuación cuyos lados son precisamente los nuevos números." De este modo, la estrategia preferida por Frege para la introducción propuesta de los números "más elevados" parece ser ésta. En un primer paso, tiene que suministrar una relación de equivalencia R apropiada para, por ejemplo, el caso de los números irracionales que puede reducirse a términos puramente lógicos. En un segundo paso, se introducen tentativamente los nuevos números mediante abstracción lógica, esto es, transformando R en una identidad de números irracionales. Haciendo esto, hay que ser consciente de los reparos lógicos que semejantes transformaciones suscitan. Dado que se espera que el criterio de identidad propuesto para los números irracionales incorporado en R se evidencie como muy estrecho, sería necesario definirlos en un tercer y último paso como extensiones de conceptos, o más específicamente, como clases de equivalencia de R.

Lo que acabo de decir respecto a la justificación de asignar una referencia determinada a los términos numéricos se aplica *mutatis mutandis* en el caso de nombres de cursos de valores. Supongamos que en *Grundgesetze* Frege logró divisar una elucidación satisfactoria del operador de curso de valores. En tal caso, presumo que aún subrayaría la necesidad de poseer un criterio de identidad para cursos de valores para poder legitimar el uso de nombres de cursos de valores en su lenguaje formal.

Los problemas que Frege confronta en su discusión sobre la legitimidad de asignar referencias determinadas a términos singulares abstractos, a términos numéricos en *Grundlagen* y a nombres de cursos de valores en *Grundgesetze*, yacen en el mismo corazón de su filosofía de la matemática. A pesar de las objeciones que se plantean a su método, éste es, sin lugar a dudas, un hito en la filosofía contemporánea de la lógica y de la matemática. Una de las aportaciones más importantes que debemos a Frege en esta área es el haber llamado nuestra atención sobre el papel fundamental que desempeñan los criterios de identidad en una introducción sólida de objetos abstractos[29]. Todavía resta mucho que aprender de sus profundas intelecciones.

* Institut für Philosophie, Logik
und Wissenschaftstheorie
Universität München
Alemania

Notas

† He discutido el material de este artículo en castellano en el Instituto de Investigaciones Filosóficas de la Universidad Nacional Autónoma de México, en la Universidad de Puerto Rico, Río Piedras, en la Pontificia Universidad Católica de Chile y en el Departamento de Lógica, Historia y Filosofía de la Ciencia de la Universidad de Barcelona. Una versión abreviada de este trabajo la he presentado también en inglés en las siguientes universidades: Oxford, Cambridge, St. Andrews, Boston (Colloquium for the Philosophy of Science), City University of New York (Graduate Center), University of Pennsylvania (Philadelphia), Berkeley (Logic Colloquium), Irvine, University of Southern California, Notre Dame, Chicago, Campinas (UNICAMP, Centro de Lógica, Epistemologia e Historia da Ciência), Buenos Aires (Universidad Nacional). Quiero aprovechar la ocasión para agradecer al público las discusiones interesantes. Agradezco a Ivette Fred (Nueva York) la lectura del manuscrito y las valiosas sugerencias estilísticas que me hizo. También he sacado provecho de las propuestas de mejora de Roberto Torretti (Río Piedras), Guillermo E. Rosado Haddock (Río Piedras), Arturo Yánez (México D.F.) y de Agustín González Ruiz (Munich). Amparo Díez (San Sebastián) examinó la penúltima versión de mi artículo y me hizo propuestas de mejora importantes.

1 Frege ahora define el número que corresponde a la extensión de un concepto como una clase de equivalencia de la relación de primer nivel de equinumericidad entre clases.

2 De hecho, Frege intentó definir los números reales como cocientes de magnitudes, es decir, en su terminología, como Relaciones de Relaciones. Él usa el término "Relación" para referirse a cursos de valores dobles especiales, esto es, a cursos de valores de funciones diádicas de primer nivel cuyo valor, para cualquier par admisible de argumentos, es lo Verdadero o lo Falso. Cf. GGA II, §§ 157, 162, 245.

3 En 'Über Sinn und Bedeutung', Frege observa que "estos dos objetos son reconocidos, aunque no sea más que de modo implícito, por todo aquel que juzgue algo como verdadero, por lo tanto también por el escéptico" (KS, 149, TF, 63).

4 Cf. GGA I, § 31. Esta aseveración se apoya en Schirn 1985.

5 Cf. WB, 121.

6 Generalmente, "$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$" debe denotar el curso de valores de la función $\Phi(\xi)$. Luego, "$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$" funciona como un nombre esquemático.

7 Si Frege considerase su estipulación en la sección 3 de *Grundgesetze* como una definición, estaría pecando tanto contra su principio de simplicidad del *definiendum* como contra su principio de completud (cf. GGA, § 146, TF, 180). Este último principio sería violado precisamente porque Frege intenta determinar completamente las referencias de los términos de cursos de valores, determinando a su vez, para cada función primitiva de primer nivel, tan pronto es introducida, qué valores tomará para cursos de valores como argumentos, así como para todos otros argumentos admisibles.

8 Uso el símbolo "~" para facilitar la exposición; no aparece en el lenguaje formal de *Grundgesetze.* Observaciones análogas se aplican a los símbolos "$\neq$" y "**N**". Utilizo "**N**" como signo para la función de cardinalidad la cual es de primer nivel en el sistema de *Grundgesetze*. Frege (cf. GGA II, 156) distingue los números cardinales $\mathbf{0}$ and $\mathbf{1}$ de los números 0 y 1. Por razones prácticas, no uso su notación especial para los números cardinales.

9 Frege añade que para un objeto no designado por un nombre de curso de valores no podemos decidir a qué función pueda corresponder.

10 Como veremos, Frege presenta una variante de este argumento cuando considera una permutación especial. A diferencia de Dummett (1981), Schroeder-Heister (1987) aplica la expresión "argumento de permutación" sólo a esta última variante.

11 Frege se limita deliberadamente a la determinación de los valores de las funciones *primitivas* de primer nivel de su sistema. Cree presumiblemente que, si un valor funcional puede establecerse para cada una de ellas, tomando cursos de valores y valores veritativos como argumentos, entonces lo mismo tiene que aplicarse también a todas las funciones compuestas de primer nivel. Encontramos un paralelismo con esta suposición tácita en la sección 31 de *Grundgesetze.* En su intento de demostar que los nombres "legítimos" de cursos de valores (es decir, los nombres de cursos de valores que se forman a partir de nombres de funciones monádicas de primer nivel que ya poseen una referencia) tienen una referencia según su criterio de referencialidad para nombres propios, Frege restringe la inserción de un nombre legítimo de curso de valores "$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$" en los lugares argumentales de nombres funcionales *primitivos* de primer nivel.

12 Schroeder-Heister (1987, 69) llama a esta conclusión la *tesis de identificabilidad* ("identifiability thesis"). Trata de mostrar, considerando una reconstrucción del argumento de permutación en la teoría de modelos, que este argumento no puede servir como fundamento para la tesis de identificabilidad. Sin embargo, Moore y Rein (1987) argumentan que la reconstrucción ofrecida por Schroeder-Heister tergiversa el argumento de permutación y, en particular, su conclusión, la tesis de identificabilidad. Ambos autores creen que, correctamente interpretado, el argumento proporciona una demostración válida de la tesis de identificabilidad. Para mostrar esto, Moore y Rein presentan una reconstrucción rival del argumento de

permutación, igualmente dentro del marco de la teoría de modelos. Su reconstrucción difiere de la de Schroeder-Heister de modo tal que las evaluaciones de nombres de cursos de valores se determinan mediante la asignación de una función particular al operador de curso de valores. En cambio, Schroeder-Heister considera evaluaciones que resultan de una asignación directa de objetos a nombres de cursos de valores. Como resultado, aprueba evaluaciones para las cuales no existe ningún equivalente en la interpretación de Moore y Rein. "Es esta lenidad la que le capacita para demostrar que el argumento de Frege es erróneo" (53).

13 Para $—\xi$ y cada concepto coextensivo como argumento, la función $\grave{\varepsilon}\,\varphi(\varepsilon)$ tiene lo Verdadero como valor, lo Falso para $\xi = (\top\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\!— \mathfrak{a} = \mathfrak{a})$ y cada concepto coextensivo como argumento.

14 Los nombres de valores veritativos*, como yo quiero usar este término cuando éste aparece con un asterisco, forman una categoría sintáctica de nombres de objetos en el lenguaje formal de Frege. Para que un nombre propio sea el nombre de un valor veritativo* es necesario que se forme, en el último paso de su construcción, colocando una expresión de argumento en el lugar argumental de una expresión conceptual, o insertando, en una doble operación, expresiones de argumento en los lugares argumentales de una expresión relacional. Por consiguiente, los nombres de valores veritativos* son nombres de valores de conceptos o de relaciones para argumentos admisibles. Más aún, sólo nombres de valores veritativos* expresan pensamientos. De acuerdo con las estipulaciones que hace Frege en las secciones 10 y 11 de *Grundgesetze*, un nombre de un curso de valores o un nombre de la forma "$\backslash\grave{\varepsilon}\,\Phi(\varepsilon)$" puede designar un valor veritativo, pero no pertenece a la categoría sintáctica de nombres de valores funcionales que expresan un pensamiento que se puede reconocer como verdadero o rechazar como falso. Por lo tanto, no cada nombre de un valor de verdad es un *nombre de valor veritativo** en mi uso de este último término. Para más información sobre las diferencias entre nombres de valores veritativos* y otros nombres de valores funcionales del lenguaje formal de Frege veáse Schirn 1985, 94ff. Es evidente que en el sistema de *Grundgesetze* se debe distinguir claramente entre un nombre de valor veritativo* y lo que Frege llama *Begriffsschriftsatz*. En contraste con un nombre de valor veritativo*, una proposición de Begriffsschrift "$\vdash \Delta$" no designa algo; más bien *afirma* que "$— \Delta$" denota lo Verdadero (cf. GGA I, BLA §§ 5, 26, 32; KS, 137, TF, 137).

15 Peter Simons muestra en su artículo de 'The Horizontal' que la función condicional puede definirse a través de las funciones primitivas del sistema fregeano.

16 Recuérdese que $—\xi$ y $\xi = (\xi = \xi)$ son conceptos coextensivos.

17 "NVV" debe representar cualquier nombre de valor veritativo* bien formado del formalismo fregeano. Vale la pena mencionar que el operador numérico puede aplicarse a cualquier nombre de objeto del lenguaje formal de *Grundgesetze*; por ejemplo, "$\mathbf{N} \smile^{\mathfrak{a}}\!\!— \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$" es un término bien formado. Debido a la identificación de lo Verdadero con su clase unitaria en la sección 10 de *Grundgesetze*, este término denota el número 1 justamente como lo hace "$\mathbf{N}\, \grave{\varepsilon}(—\varepsilon)$". Claro está, lo Verdadero y lo Falso en cuanto extensiones de conceptos pueden encontrarse en la relación de equinumericidad.

18 La cuestión de si Julio César en cuanto su propia clase unitaria coincide con $\grave{\varepsilon}\,(—\varepsilon)$, acaba en la cuestión de si los dos conceptos ξ = Julio César y $—\xi$ son coextensivos, esto es, si Julio César es idéntico a lo Verdadero.

19 En la nota al pie de la sección 10, Frege observa que $\grave{\varepsilon}(\Delta = \varepsilon) = \varepsilon$ es un caso especial de $\grave{\varepsilon}\Omega(\varepsilon,\Delta) = \Delta$. La cuestión puede surgir acerca de cómo tendría que estar constituida la función $\Omega(\xi,\zeta)$ para que se pudiera determinar en general que Δ sea lo mismo que $\grave{\varepsilon}\,\Omega(\varepsilon,\Delta)$. Entonces $\grave{\varepsilon}\,\Omega(\varepsilon,\grave{\alpha}\Phi(\alpha))$ debe ser lo Verdadero, y, por lo tanto, $\smile^{\mathfrak{a}}\!\!— \Omega(\mathfrak{a},\grave{\alpha}\Phi(\alpha)) = \Phi(\mathfrak{a})$ debe ser también lo Verdadero, cualquiera que sea la función $\Phi(\xi)$. Frege observa que más adelante introducirá una función, a saber $\xi\frown\zeta$, que tiene esta propiedad (cf. GGA I, BLA, § 34). Sin embargo, puesto que Frege define $\xi\frown\zeta$ con la ayuda de los cursos de valores, no puede usarla aquí.

20 La identificación de $\backslash\grave{\varepsilon}(-\varepsilon)$ con $\grave{\varepsilon}(\backslash\grave{\varepsilon}(-\varepsilon) = \varepsilon)$ y de $\backslash\grave{\varepsilon}(\varepsilon = (\top\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\mathfrak{a} = \mathfrak{a}))$ con $\grave{\varepsilon}(\backslash\grave{\varepsilon}(\varepsilon = (\top\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\mathfrak{a} = \mathfrak{a})) = \varepsilon)$ sería igualmente legítima.

21 En *Principia Mathematica* (*51), Russell y Whitehead introducen una nueva función descriptiva ι'x que significa "la clase cuya único elemento es x": ι'x = $\hat{y}$(y = x). Los autores subrayan la necesidad de distinguir entre x y ι'x. Reconocen que su argumento se debe a Frege (KS, 201f., TF, 96).

22 Lo que Frege considera ilegítimo, a saber, identificar a todo objeto no dado como curso de valores con su propia clase unitaria, es lo que Quine (1963, 31f.) actualmente hace. Quine supone que ya sabemos qué objetos son clases en el sentido intuitivo y cuáles no lo son. Concibe "ε" como un predicado primitivo y la expresión "y ε z" como significativa tanto para individuos como para clases en cuanto valores de "y" y "z". Entonces, se plantea la cuestión: ¿Cómo se debe interpretar "y ε z" si z es un individuo? Bajo la condición de que no es menester concebir individuos como clases vacías, Quine estipula que "x ε y" es verdadero o falso según que x = y o x $\neq$ y, cuando y es un individuo. Ahora bien, si y es un individuo y z es la clase unitaria de y, entonces, según la interpretación propuesta de "ε" delante de signos de individuos, "x ε y" es verdadero si y sólo si x es el individuo y; así pues $\forall$x(x ε y $\equiv$ x ε z), y, por lo tanto, y = z. Quine señala que la utilidad de la teoría de clases no se disminuye considerando un individuo, su clase unitaria, la clase unitaria de esa clase unitaria etc. como uno y el mismo objeto. Lo que constituye a individuos como tales no es el hecho de que no sean clases, sino su identidad con su clases unitarias. Por supuesto, la distinción entre las clases y sus clases unitarias es, en general, de vital importancia, y Quine la respeta plenamente. Los sistemas axiomáticos de la teoría de conjuntos ML *(Mathematical Logic)* y NF *(New Foundations)* no envuelven el axioma de fundación que expresa la estructura jerárquica del universo. En contraste con ML y NF, ZFF no permite la identificación de un individuo con su clase unitaria.

23 Los términos singulares "$\backslash\grave{\varepsilon}(\varepsilon = \varepsilon)$" y "$\mathbf{N}\grave{\varepsilon}(\varepsilon \neq \varepsilon)$", por ejemplo, se refieren a un curso de valores, a pesar de que no pertenecen a la categoría sintáctica de nombres de cursos de valores.

24 Moore and Rein (1986, 38) argumentan de una manera similar.

25 En todo caso, a la luz de su argumento en la sección 10 es obvio que la introducción de tales objetos mediante una variante del Axioma V no podría entrar en consideración.

26 Cf. T. Parsons 1987, 165. No es posible, en general, seleccionar un par arbitrario de nombres de cursos de valores "$\grave{\varepsilon}$A" and "$\grave{\varepsilon}$B" y estipular que "$\grave{\varepsilon}$A" designe lo Verdadero y "$\grave{\varepsilon}$B" lo Falso. Por ejemplo, no es posible estipular que el término de curso de valores (a) "$\grave{\varepsilon}(\varepsilon = (\top\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\mathfrak{a} = \mathfrak{a}))$" designe lo Verdadero y (b) "$\grave{\varepsilon}(\varepsilon = -\!\!\top\grave{\varepsilon}(\varepsilon = (\top\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\mathfrak{a} = \mathfrak{a})))$" lo Falso. Si acordamos que (a) denota lo Verdadero, (b) tiene que denotar, igualmente, lo Verdadero. (Si de acuerdo con la estipulación (a) denota lo Verdadero, entonces, según la elucidación de la función $-\!\!\top\xi$, "$-\!\!\top\grave{\varepsilon}(\varepsilon = (\top\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\mathfrak{a} = \mathfrak{a}))$" denota lo Falso. Así $\xi = -\!\!\top\grave{\varepsilon}(\varepsilon = (\top\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\mathfrak{a} = \mathfrak{a}))$ es tanto como $\xi = (\top\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\mathfrak{a} = \mathfrak{a})$ un concepto bajo el cual sólo cae lo Falso. Por lo tanto, ambos nombres de cursos de valores (a) y (b) tienen que tener la misma referencia, esto es, tienen que denotar lo Verdadero, según la estipulación recién mencionada. No obstante, en general, los dos nombres pueden tener referencias distintas.

27 Para distinguir el símbolo "a" del objeto *a* que "a" supuestamente denota, Frege debería usar comillas.

28 Un enunciado como "9 = el número de los planetas" puede transformarse, sin lugar a dudas, en un enunciado de la forma "N_x F(x) = N_x G(x)".

29 Véase la discusión de este asunto en "Criteria of Identity" en su 1991, 159ff. Dummett observa correctamente que la noción de un criterio de identidad, como Frege la introduce, se aplica a términos singulares para objetos de cualquier tipo. Es igualmente verdad que en *Grundlagen* Frege restringe su aplicación a objetos lógicos.

BIBLIOGRAFIA

Los escritos de Frege se citan mediante abreviaturas:

BLA: *The Basic Laws of Arithmetic. Exposition of the System*, trad. y comp. M. Furth, Berkeley y Los Angeles, University of California Press, 1964.

FA: *The Foundations of Arithmetic. A logico-mathematical enquiry into the concept of number*, trad. J. L. Austin, Oxford, Basil Blackwell, 1950, 1953.

GGA: *Grundgesetze der Arithmetik, Begriffsschriftlich abgeleitet*, volumen I, Jena, H. Pohle, 1893, volumen II, Jena, H. Pohle, Jena, 1903, reimpresión Darmstadt y Hildesheim, 1962.

GLA: *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau, W. Koebner,1884, reimpresión Darmstadt y Hildesheim, 1961.

KS: *Kleine Schriften*, comp. I. Angelelli,Hildesheim, G. Olms, 1967.

TF: *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*, comps. y trads. P. Geach y M. Black, Oxford, Basil Blackwell, 1952, 1960.

Dummett, Michael: 1981, *The Interpretation of Frege's Philosophy*, London, Duckworth.

Dummett, Michael: 1991, *Frege: Philosophy of Mathematics*, London, Duckworth.

Haaparanta, Leila, Hintikka, Jaakko (comps.): 1986, *Frege Synthesized. Essays on the Philosophical and Foundational Work of Gottlob Frege*, Dordrecht-Boston, D. Reidel.

Moore, Adrian W., Rein, Andrew: 1986, '*Grundgesetze*, Section 10', in Haaparanta, Hintikka (1986), 375-384.

Moore, Adrian W., Rein, Andrew: 1987, 'Frege's Permutation Argument', *Notre Dame Journal of Formal Logic* 28, 51-54.

Parsons, Terence: 1987, 'On the Consistency of the First-Order Portion of Frege's Logical System', *Notre Dame Journal of Formal Logic* 28, 161-168.

Quine, W.V.: 1963, *Set Theory and its Logic*, Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press.

Schirn, Matthias: 1985, 'Semantische Vollständigkeit, Wertverlaufsnamen und Freges Kontextprinzip', *Grazer Philosophische Studien* 23, 79-104.

Schroeder-Heister: 1987, 'A Model-Theoretic Reconstruction of Frege's Permutation Argument', *Notre Dame Journal of Formal Logic* 28, 69-79.

Simons, Peter: 1995, 'The Horizontal', in M. Schirn (comp.): *Frege: Importance and Legacy*, Berlin, New York, Walter de Gruyter (de próxima aparición).

Whitehead, Alfred N., Russell, Bertrand: 1910, *Principia Mathematica*, New York, Cambridge University Press, 1962.