SOBRE EL AGREGADO DE AXIOMAS A ZF

Carlos G. GONZALEZ*

It has been claimed that the axiom of choice was elevated to the status of an axiom only because of repeated exposure and the psychological reluctance to tolerate central undecidable propositions. One would then have to say that the conceptual justification is no more than an ad hoc rationalization.

Hao Wang, *From Mathematics to Philosophy*, p. 201.

1. Introducción

La finalidad de este artículo es considerar el agregado de axiomas a la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel, que abreviaremos ZF. Por tal entendemos la teoría de primer orden que resulta de los axiomas de extensionalidad, pares, unión, infinito, potencia, fundación y los esquemas de axiomas de separación y reemplazo[1]. Consideraremos que ZF no contiene el axioma de elección, cuyo caso se analizará en particular.

A ZF se le aplican los resultados del Teorema de Gödel: por una parte, si es consistente entonces es incompleta y, por otra parte, no se puede probar su consistencia utilizando esta misma teoría, ni una más débil que estuviera contenida en ella. Según los resultados de Gödel, y suponiendo la consistencia de ZF, la incompletud posee un cierto carácter esencial, en el sentido de que el agregado de cualquier conjunto decidible de axiomas que no altere la consistencia da como resultado teorías incompletas.

Tales circunstancias justificarían por sí solas, no sólo la discusión del agregado de tal o cual axioma en particular, sino también el estudio filosófico y lógico acerca de las cuestiones concernientes a la elección y aceptabilidad de nuevos axiomas realizadas de una manera general. Dicho estudio puede encararse desde diferentes puntos de vista, como ocurre, por ejemplo, cuando se considera la aceptabilidad en cuanto creencia, es decir, los motivos que llevan a que un sujeto o varios sujetos consideren verdaderos ciertos enunciados[2]. Por el contrario, el desarrollo llevado a cabo aquí tiene en cuenta un problema menos subjetivo: el de intentar discernir criterios explícitos (por ejemplo, lógicos) que permitan guiar la elección de axiomas, y la relación entre estos criterios y el concepto de conjunto.

A pesar de lo visto más arriba acerca de la aplicación de los resultados de Gödel a ZF, cabe señalar una diferencia con la aritmética de Peano[3] (que abreviaremos AP), teoría a la cual también se le aplican dichos resultados. La causa de la incompletud de AP parece ser más una limitación de los propios lenguajes formales, que de los criterios de la elección de axiomas y de las nociones intuitivas que los determinan. Dos hechos parecen dar aval a tal afirmación. El primero es que los modelos de los axiomas de Peano en

THEORIA - Segunda Época - Vol. X
1995, Nº 24, 199-224

segundo orden son isomorfos, lo cual parece mostrar que la existencia de modelos no isomorfos,[4] de AP es una limitación de la lógica de primer orden. El segundo es que si agregamos la regla infinitista llamada "regla omega"[5], resulta un sistema completo. En cambio ninguna de estas dos cosas, ni nada análogo, ocurre en ZF. Por ejemplo si cambiamos los esquemas de axiomas de separación y reemplazo por fórmulas de segundo orden, aún quedan cuestiones indecidibles como la existencia de algunos grandes cardinales, con lo cual tenemos no sólo modelos no isomorfos, sino ni siquiera elementalmente equivalentes[6]. Respecto a las reglas infinitistas similares a la regla omega (o más fuertes) que pudieran formularse, están lejos de transformar a ZF en una teoría completa: en AP toda fórmula que no tiene variables es decidible mediante un cómputo sencillo para el cual ya se usan ciertos algoritmos en la escuela primaria[7]. En cambio en ZF la introducción de constantes no puede ser usada para producir resultados similares en fórmulas sin variables, motivo por el cual no funcionan dichas reglas infinitistas[8].

En síntesis, observamos que, además de la incompletud propia de toda teoría que contenga (de un modo o de otro) la aritmética,[9] ZF posee otro tipo de incompletud en cuanto, por ejemplo, no conocemos si ciertos individuos del dominio de la interpretación standard están o no en una determinada relación,[10] análogamente a si en AP fuera indecidible $3+8<10$.

A partir del desarrollo del método del *forcing* introducido por Cohen, se ha mostrado que numerosas cuestiones son indecidibles en ZF. Esto ha dado origen a la interpretación siguiente: faltan criterios para decidir intuitivamente algunos problemas, criterios que permitirían formular luego los axiomas correspondientes[11]. Si comparamos con AP, nos encontramos frente al hecho histórico de que nadie sostuvo nunca que alguno de sus axiomas fuera falso o que no reflejara lo que ocurría o debía ocurrir con los números, cosa que aconteció en la teoría de conjuntos, por ejemplo, con el axioma de elección. Por otra parte, en geometría la discusión acerca del quinto postulado duró milenios, pero las alternativas aceptadas eran: a) que debiera incluírselo como axioma o, b) que fuera un teorema demostrable a partir de los restantes axiomas. Pero la polémica no incluyó la cuestión de su verdad o falsedad hasta que los métodos para probar la independencia de axiomas llevaron a buscar modelos para las geometrías no euclidianas. En ninguno de los dos casos se sostuvo en las etapas iniciales la falsedad de algún axioma, sino que la intuición fue una buena guía para el hallazgo de los mismos. Por el contrario, las primeras formulaciones de la noción de conjunto son contradictorias[12]. Luego, cuando en 1904 aún no se habían realizado teorías axiomáticas que carecieran de las contradicciones conocidas, Zermelo propone el axioma de elección, que de inmediato es rechazado por otros matemáticos[13]. Dada la axiomatización de Zermelo de 1908, no transcurre una década cuando Mirimanoff[14] plantea nuevas discusiones semánticas, las cuales con los aportes de Skolem, von Neumann y Fraenkel finalizan con el agregado de los axiomas de fundación y reemplazo. En síntesis, desde los primeros intentos por parte de Cantor de elaborar una teoría de conjuntos hasta la actualidad se han sucedido, sin solución de continuidad, discusiones acerca de la conveniencia o no de uno u otro principio de la teoría de conjuntos.

2. Criterios para el agregado de axiomas

En primer lugar tenemos criterios sintácticos. Los más importantes de éstos son la consistencia y la consistencia relativa, aunque también se debe considerar la independencia[15].

Con una aritmetización de Gödel para ZF, y siendo T una teoría cualquiera en el lenguaje de ZF, el predicado Con(T) puede expresarse como un predicado de números naturales. Así, cabe preguntarse en qué teoría o con qué métodos se está probando, para una sentencia P, por ejemplo, que Con(T) implica Con(T+P). Muchas de las pruebas de este tipo que se han dado son estrictamente finitistas: dada una deducción de una contradicción en la teoría T+P, se puede construir una deducción de una contradicción a partir de T. Como estas pruebas pueden formularse en la teoría de las funciones recursivas, también pueden formalizarse en AP. Hay pruebas en las que se construye un modelo por métodos infinitistas, pero que constituyen pruebas finitistas de consistencia relativa[16]. Inclusive podría darse otra versión de este último hecho en las siguientes palabras: toda la construcción conjuntística no es más que una heurística para hallar una prueba estrictamente finitista de consistencia relativa, la cual sólo hace referencia a fórmulas, secuencias (finitas) de fórmulas, etc. Esta visión, que relega en cierta manera el valor que poseen en sí mismos los modelos de teoría de conjuntos construidos por métodos infinitistas, encuentra cierto apoyo en la práctica contemporánea de teoría de conjuntos que concibe importantes teoremas (como, por ejemplo, el de definición por recursión transfinita), no como enunciados acerca de clases, sino como metateoremas que garantizan la existencia de fórmulas con determinadas propiedades.

Sea, por ejemplo, T una teoría que contenga ZF tal que

$$T \vdash \mathrm{Con(ZF)} \qquad *$$

Una prueba finitista puede representarse en ZF: si probamos finitísticamente

$$\mathrm{Con(ZF)} \Rightarrow \mathrm{Con(T)} \qquad **$$

tendremos también

$$\mathrm{ZF} \vdash \mathrm{Con(ZF)} \Rightarrow \mathrm{Con(T)} \qquad ***$$

Entonces de * y *** obtenemos

$$T \vdash \mathrm{Con(T)}$$

pues T contiene a ZF. Pero en este caso, debido al teorema de Gödel, tenemos una prueba finitista de $\neg$Con(T), lo que a su vez, por **, implica una prueba finitista de $\neg$Con(ZF). Por estos motivos, toda prueba de Con(ZF) $\Rightarrow$ Con(T) para una teoría T de las características descritas, tendría que evitar su formalización en ZF, que es un lenguaje muy poderoso en lo que se refiere a la representación de métodos de prueba[17].

Entre los criterios semánticos podemos encontrar algunos que no hacen intervenir la evidencia. El principal de ellos hace referencia a la existencia de modelos internos. Desde el punto de vista sintáctico, dada una teoría axiomática T, la existencia de un modelo interno significa que existe una clase no vacía M[18] definible en el lenguaje de T, tal que se puede probar en T la relativización de los axiomas de T a M[19]: $T \vdash T^M$. Esto es útil cuando se dan dos condiciones: a) que no se pueda probar en T que todos los *x* pertenecen a la clase M (es decir que tienen la propiedad M), b) que exista algún enunciado P tal que $T \vdash (T+P)^M$. Si se dan estas dos condiciones se está probando la consistencia relativa de (P+T) a T. Desde el punto de vista semántico M puede ser concebida como una clase que no abarca todos los individuos posibles. De ahí el nombre de "modelo interno".

La limitación expresiva de una extensión T+P tal que exista un M para el cual $T \vdash (T+P)^M$, se puede ver del siguiente modo. Supongamos que N es un modelo de T+P y que usamos T+P para conocer N, hecho que, utilizando formalizaciones podría expresarse: si $T+P \vdash \varphi$ entonces φ vale en N. Si consideramos aquellos objetos de N que tienen la propiedad M, tenemos un submodelo N' de N que es indistinguible desde la teoría T+P en el sentido de que, si usando T+P determinamos que una fórmula φ es verdadera en N también lo será en N'. Pero además, en N' será verdad φ^M, debido a que $T+P \vdash \varphi$ implica $(T+P)^M \vdash \varphi^M$. Pero de esta última y $T \vdash (T+P)^M$ tenemos $T \vdash \varphi^M$. Con lo cual todo lo que conocíamos de N apelando a T+P puede ser probado en T reinterpretando T+P en M, i.e. relativizando T+P a M.

A este criterio puramente semántico se le puede hacer una crítica que incluya elementos pragmáticos: puede ocurrir que trabajar con la teoría T+P sea relativamente sencillo, pero que hacerlo con $(T+P)^N$ sea, desde el punto de vista práctico, muy difícil o imposible. La traducción a fórmulas relativizadas puede cambiar el significado intuitivo de la teoría. Esto ocurre cuando se interpretan las geometrías no euclidianas en la elipse, la hemiesfera, etc., cambiando el significado intuitivo de "recta".

Otro tipo de criterios semánticos involucra el concepto de evidencia, con los sabidos problemas que conlleva. Se ha dicho, por ejemplo, que no se acepta un axioma por no ser verdadero, o por no ser un principio básico que incumba a la noción de conjunto[20]. "Verdadero" es un término relativo a una interpretación, de modo que las expresiones citadas deben estar suponiendo un modelo intuitivo[21], con lo cual la verdad o falsedad de un principio tiene como base la evidencia. Algo similar ocurre con la afirmación de que no corresponde a la noción de "conjunto", o que no es un principio básico acerca de los conjuntos, etc., pues esto implica que se supone la existencia de una intuición definida acerca de lo que es o no es un conjunto. Al problema de la evidencia se suma aquí el peligro de introducir presupuestos platónicos no explicitados[22], pues es fácil remitir esta evidencia a una realidad independiente del sujeto. Otro problema concomitante es suponer que existe una noción de conjunto que, aunque no pueda ser explicitada más allá de ciertos límites, pueda servir de guía para la elección de principios. Sin duda, la noción intuitiva de "conjunto" permite seleccionar algunos principios básicos, como el de extensionalidad y, en general, los axiomas de ZF[23]. También es cierto que las intuiciones son suficientes para decir que la jerarquía acumulativa es un modelo de ZF que corresponde a la noción intuitiva de "conjunto". Pero si se quiere hacer valer estos criterios más allá de este límite habría que especificar algunas características del modelo que cumpla o no el principio bajo discusión, pues de lo contrario se está haciendo valer la evidencia en cuestiones no demasiado claras e inclusive en cuestiones disputadas.

Un criterio que involucra aspectos sintácticos y semánticos es el de estabilidad[24]. Supongamos que estamos analizando el agregado de P a una teoría T. Sucede que existe una sentencia P' cuyo significado (no su verdad) es intuitivamente claro y además es distinto del significado intuitivo de P, pero en T puede probarse que son equivalentes: $T \vdash P \Leftrightarrow P'$. Entonces algunos autores interpretan esto en los siguientes términos: P es un principio intuitivo básico del modelo, que se manifiesta de distintas maneras. En otras palabras, representaría una característica del modelo que la teoría puede representar con diferentes sentencias y que puede comprenderse de diferentes maneras, pues cada sentencia que se comporte igual que estas P y P' pueden ser interpretadas expresando una idea diferente, pero que en la estructura del modelo produce el mismo efecto. Contra este criterio puede decirse que la mayoría de los axiomas de ZF no tienen esta característica[25].

Otro criterio que recurre a la intuición, es el que da por verdaderos ciertos teoremas, pero por carencia de simplicidad no los acepta como principios, sino que acepta algunos principios porque son necesarios para la derivación de dichos teoremas.

Un criterio directamente relacionado al anterior es el de considerar subdominios privilegiados del modelo, que llamaremos "modelos privilegiados". Por ejemplo la aritmética es expresable en ZF, de modo que se puede estudiar lo que sucede con algunos enunciados de ZF, a saber, aquellos que representan afirmaciones aritméticas. Si llamamos a tales enunciados EA (por enunciados de la aritmética) se puede tener como criterio sobre si conviene o no agregar un enunciado P a ZF el hecho de que permita decidir algún enunciado de la aritmética. Es decir que existiría una fórmula $\varphi \in EA$ tal que, si Con(ZF) entonces $ZF \nvdash \varphi$ y $ZF+P \vdash \varphi$. Si bien esto podría pasar como un criterio puramente sintáctico, no se contestaría a la pregunta de por qué elegir tal conjunto de enunciados y no tal otro, sin tener en cuenta consideraciones semánticas. En efecto, ciertos conjuntos son elegidos para representar los números naturales y ciertas operaciones entre conjuntos son interpretadas como operaciones entre números naturales. Las razones por las cuales se puede considerar cierto subdominio del modelo como preferido pueden ser de cuatro tipos.

En primer lugar cierto subdominio puede poseer una jerarquía ontológica particular que lo haga preferible frente a otros[26]. Esto sucede, por ejemplo, cuando algunos matemáticos asumiendo una suerte de platonismo sostienen que los números naturales son más importantes que los cardinales transfinitos[27]. En segundo lugar puede pasar que para ciertos subdominios de objetos las intuiciones sean más claras que para otras[28]. Difícilmente se cuestionar que nuestras intuiciones acerca de los números naturales son más claras que las que atañen a cardinales transfinitos. En tercer lugar pueden utilizarse consideraciones pragmáticas, en tanto que ciertos subdominios poseen individuos y relaciones para los cuales existen campos de aplicación, como, por ejemplo, la física, mientras que para otros subdominios o bien no se conocen aplicaciones o bien existen en mucho menor grado. En este sentido, las operaciones y relaciones entre números naturales poseen mucha mayor aplicación que las análogas entre cardinales transfinitos. En cuarto lugar podemos preferir un subdominio por una característica que podríamos denominar "absolutez". Cuando representamos un dominio D de objetos en ZF elegimos ciertos conjuntos para representar los objetos y relaciones de D, y ciertas operaciones entre conjuntos para representar las operaciones entre elementos de D. Hay ciertas características que son independientes del modo de representación elegido. Los dominios de objetos que poseen propiedades que son independientes del modo de representación elegido, poseen cierta absolutez[29].

También es importante citar el criterio de la generalización. Supongamos que ciertos objetos del dominio tienen una propiedad $\phi(x)$ de modo que en la teoría T se puede probar que todo objeto de tipo $\psi(x)$ tiene la propiedad $\phi(x)$, i.e. $T \vdash \psi(x) \Rightarrow \phi(x)$. Además, éstos objetos son una parte de otros objetos que tienen, por ejemplo, la propiedad $\theta(x)$. Generalizar el resultado $T \vdash \psi(x) \Rightarrow \phi(x)$ sería probar que $T \vdash \theta(x) \Rightarrow \phi(x)$. Podría ocurrir que $T \nvdash \theta(x) \Rightarrow \phi(x)$ y que $T+R \vdash \theta(x) \Rightarrow \phi(x)$ para algún enunciado R. De este modo el enunciado R se entendería como generalizando el resultado anterior. Otro tipo de generalización consiste en considerar un metateorema o un teorema como afirmando cierta característica, no de los conjuntos del modelo, sino del dominio de interpretación del mismo, y analizar si dicha característica es no sólo conservada en una extensión, sino también generalizada en algún sentido, como podría ser, que dicha característica se mantenga si utilizamos lógicas de orden superior.

Un criterio para valorar un axioma es el de obtener consecuencias verificables. Supongamos que el agregado de un axioma nos produce nuevos teoremas de la aritmética. Entonces podríamos tomar uno de estos teoremas y probar con números determinados si se cumple o no utilizando los procedimientos habituales de cómputo. Tener consecuencias verificables significa en este sentido obtener consecuencias en el terreno de lo finito, ya sean números naturales, conjuntos finitos, etc. Este nuevo criterio podría entenderse como una combinación de hallar modelos privilegiados y utilizar métodos que, de una manera impropia, podríamos llamar empíricos, porque presentan una cierta analogía con los métodos inductivos utilizados en física, aunque la experiencia sensible no desempeñe ningún rol[30].

Otro criterio es el de simplificación de las pruebas. Muchas veces el agregado a la teoría de un principio no sólo aumenta la cantidad de teoremas, sino que permite pruebas más cortas de teoremas ya probados en la teoría sin extender[31]. Debido a que una deducción en un lenguaje formalizado como ZF es un objeto sintáctico, tal como ha sido enunciado se trata de un criterio puramente sintáctico. Sin embargo cabe hacer una salvedad. Ningún matemático demuestra sus teoremas construyendo deducciones en un sistema formal. En el mejor de los casos y en ramas como teoría de conjuntos, una prueba puede volcarse en una secuencia de fórmulas $\varphi_1,..., \varphi_n$ tal que existe una deducción $\psi_1, \psi_2,..., \varphi_1, \psi_m, \psi_{m+1},..., \varphi_2,..., \psi_r,..., \psi_{r+1},..., \varphi_n$. Entonces puede pasar que el significado intuitivo pueda permitir hallar una prueba más corta, si entendemos "prueba" con el significado usual que posee en la práctica matemática. Esto es, si podemos hallar una secuencia $\theta_1,..., \theta_s$ con $s < n$ (más corta que la anterior de las φ), pero con una propiedad análoga. En este caso consideramos además elementos semánticos y pragmáticos.

3. El axioma de elección

El axioma de elección, que abreviaremos E, es el enunciado que dice que, dada una familia $\mathcal{F}$ de conjuntos no vacíos y disjuntos dos a dos, existe un conjunto C que tiene exactamente un miembro de cada uno de los conjuntos de $\mathcal{F}$. El nombre se justifica porque es como si *eligiéramos* un elemento de cada miembro de $\mathcal{F}$. Desde el punto de vista sintáctico Gödel probó que, si Con(ZF) entonces Con(ZFE), y Cohen que, si Con(ZF) entonces Con(ZF+¬E).

La primer referencia conocida de un principio similar fue realizada en el siglo pasado por Peano, quien lo rechaza[32]. Zermelo explicitó un enunciado semejante y lo utilizó en 1904 para probar que todo conjunto puede ser bien ordenado[33]. De inmediato recibió críticas que rechazaban su principio de elección[34]. Dado que la teoría de conjuntos no había sido aún axiomatizada y la lógica matemática misma se encontraba aún en sus comienzos, algunos matemáticos rechazaban E pero aceptaban principios equivalentes E' y métodos deductivos que a partir de principios aceptados por ellos y E' se podía deducir E. Así, comienza la investigación de qué teoremas y principios son equivalentes (en presencia de otros principios aceptados) a E. Cuando se establece ZF como teoría de orden uno, la cuestión es con cuáles enunciados A sucede que $ZF \vdash A \Leftrightarrow E$. Por supuesto que el problema sólo tiene interés cuando el significado intuitivo de A es más o menos claro[35]. De este modo se hallaron proposiciones equivalentes a E en distintas ramas de la matemática y con significado muy diverso[36]. Esta tarea prosiguió con aquellos enunciados A tales que, si ZF es consistente, en ZF no se deduce A ni que $A \Leftrightarrow E$, pero $ZF \vdash E \Leftrightarrow A$, llamadas *formas débiles* de E[37].

Esto muestra que el axioma de elección tiene una gran estabilidad, tal como este criterio fue descrito en la página 6. Sin embargo, debido a que la mayoría de los axiomas de ZF no poseen esta característica, cabe preguntarse si no se trata de un criterio ad hoc para justificar E, *después* de que se habían hallado una gran cantidad de enunciados equivalentes.

El axioma de elección afirma la mera existencia del conjunto C, pero no nos da ningún criterio para determinar que un x sea elemento de C, contrariamente con lo que ocurre con otros axiomas de ZF que afirman la existencia de algún conjunto. Por ejemplo, el axioma de pares dice que dados a y b cualesquiera existe $\{a,b\}$, pero $\{a,b\}$ está unívocamente determinado cuando hemos dado a y b. En cambio, si damos una $\mathcal{F}$ suficientemente compleja, el conjunto C que se afirma que existe no está determinado, dado que si $A \in \mathcal{F}$ y $x \in A$ no sabemos nada acerca de si $x \in C$. Las primeras críticas toman este hecho y sostienen que sólo podemos aceptar la existencia de un conjunto cuando está determinado. Esto, traducido a términos modernos, se convierte en la exigencia de que, para poder afirmar la existencia de un conjunto, debamos tener un término del lenguaje que lo defina, y con ello la unicidad. Si no, entonces estamos hablando de un conjunto que podemos imaginar, pero no de algo cuya existencia matemática podamos afirmar. Esta exigencia de definibilidad debe reformularse de una manera más compleja si no se quiere caer en la paradoja de Richard. Pero lo cierto es que E nos permite afirmar la existencia de un conjunto cuando el poder expresivo del lenguaje resulta insuficiente. Si tuviéramos una fórmula $\varphi(x)$ que definiera C, es decir: $x \in C \Leftrightarrow \varphi(x)$, entonces E resultaría superfluo, pues $\varphi(x)$ nos permite obtener C de la unión de la familia $\mathcal{F}$ usando el axioma de separación, i.e., sin E.

El estudio de E respecto de ZF nos lleva a realizar la siguiente distinción. En primer lugar, podemos comparar a ZF con ZFE, pero más interesante resulta comparar a ZFE con ZF+$\neg$E. También habíamos hecho mención a enunciados A, formas débiles de E, tales que en ZF no se deduce A ni que $A \Rightarrow E$, pero $ZF \vdash E \Leftrightarrow A$. Si sucede que en ZF no se deduce $\neg A$ entonces la comparación entre ZFE y ZF+$\neg$A será más general que la de ZFE y ZF+$\neg$E, puesto que $ZF \vdash \neg A \Rightarrow \neg E$. Sabemos que algunas formas muy débiles de E como, por ejemplo, que $\mathcal{F}$ sea una familia numerable de pares, son independientes de ZF. En 1922 Fraenkel probó un resultado similar para ZF menos el axioma de fundación[38], construyendo un modelo con un conjunto U de elementos primitivos (Urelemente) que, si pertenecían al mismo par, el lenguaje no podía distinguirlos. Salvando las fallas técnicas de la prueba, pues en dicha época estaban muy poco desarrollados los procedimientos que luego utilizaría la teoría de modelos, los Urelemente del modelo son indiscernibles, puesto que existen a y $b \in$ U, a diferente de b tales que, para toda φ

$$\mathrm{M} \models \varphi[a] \quad \text{ssi} \quad \mathrm{M} \models \varphi[b]$$

Si introducimos constantes para hacer referencia a los elementos de U, podremos distinguir mediante una fórmula a lo sumo un número finito de ellos, pero un conjunto de elección sobre $\mathcal{F}$ distinguiría una cantidad numerable de los mismos, cosa que es imposible, al menos que agreguemos nuevos axiomas. En efecto, si a y b son indiscernibles es porque pertenecen al mismo par de $\mathcal{F}$, pero C tiene sólo un elemento de cada par, con lo cual permite distinguir infinitos elementos. De aquí que la unión de la familia $\mathcal{F}$ no pueda estar totalmente ordenada y *a fortiori* falla el teorema del ultrafiltro para álgebras de Boole. Todo esto nos permite afirmar que E actúa superando el poder expresivo de la teoría, pues permite distinguir elementos allí donde el lenguaje no puede. Este es el motivo de la incompatibilidad de E con la existencia de ciertos conjuntos de indiscernibles. En lo que respecta al lenguaje, dada una $\mathcal{F}$ cualquiera, como los $x \in \mathcal{F}$ no son vacíos, podemos afirmar que existe un $y \in x$, y luego podemos utilizar este enunciado para afirmar la existencia de nuevos conjuntos, como por ejemplo $\{y\}$, utilizando los axiomas de ZF. Este procedimiento podría ser iterado: dados $x_1 \in \mathcal{F}$ y $x_2 \in \mathcal{F}$, y como son no vacíos, existen $y_1 \in x_1$ e $y_2 \in x_2$, de modo que podemos (usando los restantes axiomas de ZF) afirmar la existencia de nuevos conjuntos: $\{y_1, y_2\}$, etc. Pero por las limitaciones del lenguaje podemos aplicar este método sólo un número finito de veces. Si pudiéramos hacerlo infinitas veces, afirmando "existe un $y \in x$ para cada $x \in \mathcal{F}$", entonces el axioma de elección sería superfluo.

La existencia de estos conjuntos de indiscernibles en el modelo nos da la idea de un tipo de negaciones de E que son una afirmación de existencia. Sucede que, salvo extensionalidad y fundación, los principios de ZF son principios de existencia de conjuntos y, como E permite afirmar (manteniendo consistencia) la existencia de nuevos conjuntos, debería permitírsele su adición a ZF. Subyace a esta idea una especie de *Vollständigkeitsaxiom*[39]: en lugar de "el dominio de la teoría de conjuntos debe ser lo más comprensivo posible" sería "se deben permitir todos los métodos sanos (que no introduzcan contradicción) que permitan afirmar la existencia de nuevos conjuntos". Cuando Hilbert generaliza su idea del *Vollständigkeitsaxiom* expresa que puede suponerse la existencia de un ente matemático en tanto que la afirmación de existencia del mismo no engendre contradicción[40]. Zermelo utiliza algún argumento de este tipo en la defensa de la introducción de E[41]. Pero la existencia de conjuntos de indiscernibles es un postulado de existencia incompatible con otro enunciado de existencia: el axioma de elección. Por lo tanto el criterio de permitir el dominio más amplio posible resulta inaplicable.

Equivalentemente pueden encontrarse otros enunciados incompatibles con E que también son afirmaciones de existencia. Tal es el caso de los morfismos de orden. Dado un orden parcial <, una función f es un morfismo de orden si $x<y \Rightarrow f(x)<f(y)$. La existencia de ciertos morfismos de orden es incompatible con el axioma de elección. De todos modos cabe aclarar que dada una fórmula que afirme la existencia de un conjunto $a = \{x : \varphi(x)\}$ no podemos sacar la conclusión que visto el modelo de afuera (es decir "en realidad")

tenga más elementos. Un caso típico, visto siempre desde fuera del modelo, es cuando la existencia de *a* limita el número de los *x* que tienen la propiedad $\varphi(x)$.

Resulta interesante considerar un enunciado que contradice el axioma de elección: el axioma de determinabilidad[42]. Dado que en lengua española aún no ha tenido suficiente difusión, creemos conveniente explicarlo. La formulación corriente es realizada en teoría de juegos, que a su vez es representable en ZF. Se trata de un juego infinito para dos jugadores, que denominaremos A y B. Estos jugadores van eligiendo alternativamente o bien un cero o bien un uno, de modo que se va formando una secuencia infinita de ceros y unos. Hay, además, un conjunto P, determinado de antemano en cada juego particular, que contiene secuencias infinitas de ceros y unos. Ambos jugadores conocen el conjunto P y lo que se ha jugado anteriormente, conocimientos que pueden usar en sus jugadas. El juego termina cuando se obtuvo una secuencia infinita, ganando A si tal secuencia pertenece a P y ganando B en caso contrario. Por ejemplo, sea P el conjunto que tiene sólo dos elementos: la secuencia 0,1,0,1,0,1,... (la secuencia infinita que en los lugares pares tiene ceros y en los impares unos), y la secuencia 1,0,1,0,1,0,... (la secuencia infinita que en los lugares pares tiene unos y en los impares ceros). Supongamos que A juega 0. Entonces para ganar B debe jugar también 0, porque no pertenece a P ninguna secuencia que empiece con 0,0 y de este modo P gana independiente de las infinitas jugadas posteriores. Si, por el contrario, A hubiera jugado 1, B debería jugar también 1 por la misma razón. De este modo B posee una *estrategia ganadora*: jugar el mismo número que A. Veamos otro juego: en este caso P tendrá todas las secuencias infinitas de ceros y unos que tienen un segmento final donde ceros y unos se alternan, esto es ...0,1,0,1,0,1,... donde los puntos suspensivos iniciales están por cualquier secuencia finita de ceros y unos, mientras que los puntos suspensivos del final indican que la alternancia 0,1 continúa de ahí en adelante. Vemos que B posee la misma estrategia ganadora que en el juego anterior, aunque el ganador sólo queda claro cuando el juego ha concluido, esto es, después de infinitas jugadas. Para el último juego que veremos, sea un período de una secuencia infinita *s*, una secuencia finita de ceros y unos cuya repetición es un segmento final de *s*. (Si colocamos los ceros finales, los decimales de un cociente de enteros siempre tiene un período de número naturales, mientras que la raíz cuadrada de 2 no tiene período). Sea entonces P el conjunto de todas las secuencias infinitas de ceros y unos que tienen período. Las secuencias descritas hasta aquí tienen período. Nuevamente gana B, pues tiene que observar todo lo jugado hasta el momento, detectar la secuencias finitas que se repiten y jugar de modo de quebrar estas repeticiones. Pero como los períodos no tienen un largo máximo, transformar esta idea en una estrategia ganadora no es tarea fácil. Retornando a nuestro tema principal después de los ejemplos, ya estamos en condiciones de enunciar el axioma de determinabilidad: en todo juego o bien A o bien B tiene una estrategia ganadora.

La paradoja de la esfera es eliminada por el axioma de determinabilidad, y con el agregado del mismo a ZF se puede probar, por ejemplo, que todo conjunto lineal es medible de Lebesgue, esto es, que posee una medida invariante por traslaciones, propiedad que parece natural a los matemáticos que se ocupan de esos temas[43].

Respecto a la evidencia como criterio para aceptar o rechazar un axioma, se debe hacer notar que ésta varió en relación a E en lo que va del siglo: antes recibió severas críticas, pero hoy en día la mayoría de los teóricos de conjuntos lo aceptan. Quizás de esto no habría que sacar la consecuencia de que la intuición debe ser rechazada, sino, como sugiere Gödel, que debemos ejercitarla y perfeccionarla[44]. El carácter dinámico de la evidencia tiene entre sus causas la evolución del conocimiento, de modo que el aspirar a criterios estables también puede ser una forma de negar el desarrollo mismo de la ciencia[45].

Con el axioma de elección ocurre un hecho extraño: que lo signó desde el comienzo: la evidencia no presenta ninguna estabilidad deductiva, pues existen enunciados A y A' tales que $ZF \vdash E \Leftrightarrow A$ y $ZF \vdash E \Leftrightarrow A'$, pero para los cuales la evidencia discrepa seriamente, por ejemplo, favorablemente para A y desfavorablemente para A'. Por supuesto, nos contentamos con que nuestras reglas de inferencia conserven la verdad y no pretendemos que conserven la evidencia, cosa que quizás tornaría inútil la lógica. Pero nos resulta más natural lo que ocurre en la geometría elemental y la aritmética, donde los principios son evidentes y, por lo general, los teoremas o bien son también evidentes o bien su sentido o su verdad no aparecen claros en un primer momento, pero rara vez dan una evidencia negativa. Inclusive ocurre muchas veces que con el tiempo los enunciados adquieren cierta evidencia que no poseían. Por el contrario, en lo que respecta a E tiene consecuencias tales como "el dominio de una función tiene cardinal mayor o igual que la imagen" que resulta aceptado por los matemáticos de inmediato y otros que resultan rechazados y tan extraños que parece que merecieran algún tipo de explicación de por qué pueden suceder tal tipo de cosas. Este es el caso del teorema de Tarski-Banach, según el cual, dada una esfera, podemos dividirla en un número finito de partes tales que, al reensamblarlas, podemos obtener dos esferas de tamaño igual a la primitiva.

Bien vale la pena analizar las posibles causas de consecuencias antiintuitivas, como el teorema de Tarski-Banach. De inmediato surgen tres tipos de respuestas:

a) Lo paradójico está directamente en ZF, de modo tal que estamos permitiendo que existan conjuntos contrarios a la intuición, de modo similar a que si dedujéramos la existencia de un $x = \{x\}$
b) Nuestras intuiciones geométricas son inciertas, de modo que de principios geométricos evidentes surgen teoremas antiintuitivos.
c) Nuestras intuiciones en geometría y en teorías de conjuntos son claras, pero estamos estableciendo una correspondencia errónea entre ZFE y la geometría, de modo que no estamos hablando realmente de esferas, sino de conjuntos de puntos con ciertas características (algunas de las cuales también las poseen las esferas), y para éstos conjuntos de puntos el enunciado del teorema no es antiintuitivo[46].

En contra del caso "a)" se ha argumentado lo siguiente: si el problema estuviera en general en ZFE se encontrarían conclusiones antiintuitivas en las diversas ramas de la matemática. En efecto, si el mismo principio de formación de conjuntos genera problemas cuando tratamos con ciertos objetos y no los presenta cuando tratamos con otros, no puede ser que el problema esté en el método de formación de conjuntos tomado en su generalidad. Contra "b)" se puede argumentar que la primera axiomatización matemática fue la de la geometría, precisamente por la claridad de tales intuiciones. Los principios de la geometría sólo causaron alguna confusión digna de mención en época muy temprana con el problema de las cantidades inconmensurables. Pero aun en este caso se debe tener en cuenta que la afirmación de que dos cantidades cualesquiera son conmensurables no provenía de intuiciones geométricas, sino de ciertos presupuestos filosóficos generales.

Respecto a "c)", cuando formalizamos la geometría en ZF, representamos las propiedades y relaciones conocidas de los entes geométricos, que son las mismas que en los sistemas habituales de geometría no da lugar a ninguna paradoja conocida. Si la correspondencia ZF-geometría fuera errónea algún principio geométrico tendría que escapar a la representación en ZF. Pero si esto no ocurre y nuestras intuiciones generales acerca de los conjuntos son aplicables a conjuntos de elementos cualesquiera, entonces no podría haber resultados antiintuitivos, que suponen la existencia de un modelo intuitivo, es decir, de ciertas relaciones y propiedades que sostiene deben tener determinados objetos.

Si descartamos estas tres explicaciones entonces sólo nos queda la alternativa de sostener que los conjuntos de objetos geométricos no se comportan como los conjuntos de otros objetos y que algunos principios de existencia de conjuntos, como ser E, no se pueden aplicar a conjuntos de elementos geométricos. Volveremos a esta discusión en las conclusiones. Esta posición tendría una cierta analogía con "c)", puesto que mientras "c)" sostiene que los conjuntos que elegimos para representar los objetos geométricos no corresponden con los objetos geométricos representados, aquí se afirma que la relación "pertenencia" es la que no corresponde con la relación intuitiva "pertenencia" entre objetos geométricos, si aceptamos E. También le da cierto aval a esta posición el hecho de que en geometría existen gran cantidad de morfismos de orden y que éstos tienen mucha importancia. Por ejemplo el modelo que utiliza Mostowski[47] para probar la independencia del principio del orden total[48] OT del principio de buena ordenación BO[49], utiliza un conjunto de Urelemente numerable totalmente ordenado, denso y sin extremos y considera todos los morfismos sobre el universo que preservan un número finito de Urelemente, es decir considera funciones f tales que $x<y \Longrightarrow f(x)<f(y)$ y que existe un número finito de x tal que $f(x)=x$. En este modelo[50] es verdadero OT pero falso BO. Todo esto daría cierta plausibidad a la concepción que establece que la estructura que describe $\in$ entre conjuntos geométricos tendería más a respetar ciertos morfismos que a contener conjuntos bien ordenados. Además, si tomamos el punto de vista de E versus indiscernibles, los puntos en geometría no importan en cuanto a lugares absolutos, sino en cuanto a la relación que guardan con otros puntos y conjuntos de puntos, serían indiscernibles en algún sentido si se respetan ciertas relaciones. Cabe agregar que la técnica de *forcing* permite construir conjuntos indiscernibles de números reales, es decir que habría modelos de ZF con conjuntos de puntos indiscernibles de otros conjuntos de puntos, modelos en los cuales E es falso.

En lo que respecta a la aritmética E no produce nuevos teoremas, cosa que también pasa con la negación de E. Sin embargo podría ocurrir que algún enunciado que implique la negación de E produjera nuevos teoremas.

Algo distinto ocurre cuando ZF es una metateoría semántica. En tal caso son equivalentes a E los teoremas de Löwenheim-Skolem-Tarski, que dicen que si una teoría de orden uno[51] tiene modelo infinito, entonces tiene modelos para todos los cardinales infinitos. También se usan formas débiles para probar los teoremas de completud y compacidad. Cabe acotar que estos teoremas son considerados fundamentales en cuanto a establecer características de la semántica de orden uno.

En la teoría de álgebras de Boole, casi todos los resultados importantes que se obtienen con E también se pueden obtener con formas débiles, comenzando por el teorema que dice que todo filtro en un álgebra de Boole puede ser extendido a un ultrafiltro.

Respecto al importante criterio semántico del modelo interno, E vale en uno de ellos. Esto implica que hay una manera de reformular cualquier interpretación de modo que E resulte innecesario. Desde el punto de vista pragmático manejarse con una reinterpretación puede ser muy incómodo, pero desde el punto de vista del poder expresivo del lenguaje no hay diferencias. Sin embargo, cabe hacer alguna acotación. La prueba tipo Henkin de que toda teoría consistente de orden uno tiene modelo se basa en introducir constantes (los testigos) y utilizarlos para construir un modelo de términos constantes (términos sin variables). En principio no habría ningún problema en que estos términos constantes pertenezcan a L[52], el modelo interno de ZF más conocido, donde vale E, y que construyamos el modelo en L. Pero cuando quisiéramos probar la completud tendríamos que suponer que todo modelo puede formularse en L, supuesto que es más fuerte que E, con lo cual para prescindir de E en el nivel metateórico tendríamos que hacer suposiciones más fuertes. Cuando se utiliza la teoría de conjuntos en el nivel metateórico la cuestión no puede plantearse solamente en términos de poder expresivo de la teoría, porque se está considerando un cierto modelo con sus características semánticas.

En resumen, en lo que respecta a los submodelos privilegiados suceden cosas de lo más diversas con E: da resultados antiintuitivos en uno, resultados fundamentales en otro, ninguno en el caso del tercero y una forma débil parece bastar en el cuarto. Si sostenemos que la teoría de conjuntos debe ser la misma, tratemos con los objetos que tratemos, este criterio nos es de poca ayuda. Pero podría servir de aval para la tesis contraria.

4. La hipótesis generalizada del continuo

Cuando Cantor probó que el cardinal del conjunto de los números reales era mayor que el de los números naturales, le pareció que entre ambos cardinales no debía haber ninguno intermedio, enunciado que es comúnmente conocido como "Hipótesis del Continuo" (HC). Apoyaba esta conjetura el hecho de que ningún conjunto de objetos matemáticos usuales tales como números, puntos, funciones, rectas, etc. poseía un cardinal intermedio, sino que estos conjuntos o bien eran numerables, o bien tenían el cardinal de los reales, i.e. el continuo, o algunos pocos excedían este último. Cantor además había probado que $\mathcal{P}(\omega)$ tenía el cardinal del continuo y que para todo conjunto x, $\overline{\overline{x}} < \overline{\overline{\mathcal{P}(x)}}$, proposición conocida como el Teorema de Cantor. Si bien Cantor, y después de él muchos matemáticos intentaron probar la HC[53], sus esfuerzos fueron inútiles. Hausdorff propuso una generalización de HC, conocida como Hipótesis Generalizada del Continuo, abreviada HGC, que dice que para todo conjunto x, no existe un conjunto y tal que $\overline{\overline{x}} < \overline{\overline{y}} < \overline{\overline{\mathcal{P}(x)}}$. Para la teoría de los cardinales es casi indispensable suponer E, que es una consecuencia de HGC. En tal caso los cardinales infinitos quedan bien ordenados y pueden subindicarse con ordinales $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \ldots, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \ldots, \aleph_{\omega_1}, \ldots$ etc. de modo que la HC puede expresarse $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, y la HGC como $\forall\alpha\ (2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1})$.

Los esfuerzos realizados para probar o refutar HGC contrastan con la pobreza de los resultados obtenidos. Además del Teorema de Cantor, que hemos mencionado, König obtuvo tempranamente un resultado negativo: la cofinalidad de $2^{\aleph_\alpha}$ tiene que ser mayor que $\aleph_\alpha$.

En otras palabras $2^{\aleph_\alpha}$ no puede ser el resultado de la unión de menos que $\aleph_\alpha$ conjuntos, cada uno de los cuales tiene cardinal menor que $\aleph_\alpha$. Por ejemplo, en el caso del continuo $2^{\aleph_\alpha}$ no puede ser $\aleph_\omega$, porque este cardinal es la unión de todos los $\aleph_n$, para n natural. El otro resultado, mucho más reciente, se debe a J. Silver[54] y sólo se aplica a cardinales singulares: si la HGC vale por debajo de un cardinal singular no numerable λ, entonces vale para λ. Esto es

$$\forall\alpha < \lambda\ (2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1} \Rightarrow 2^{\aleph_\lambda} = \aleph_{\lambda+1})$$

Desde el punto de vista sintáctico, se ha probado que ZFE $\nvdash$ HGC y que ZFE $\nvdash$ $\neg$HGC. Pueden utilizarse negaciones más fuertes como, por ejemplo $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ y $2^{\aleph_1} = \aleph_5$. Desde el punto de vista intuitivo, nadie piensa, por ejemplo, que $2^{\aleph_0} = \aleph_{37}$, a pesar de que es consistente con ZFE, ni que tal afirmación tenga alguna utilidad. Si se aceptan hipótesis sobre la existencia de algunos grandes cardinales, como los inaccesibles (fuertes) I, los débilmente inaccesibles DI, o los medibles valuados en reales MVR[55], también existen resultados de consistencia como

$$\text{Con(ZF+I)} \Rightarrow \text{Con(ZF+I+HGC)}$$

o también

$$\text{Con(ZFE+DI)} \Rightarrow \text{Con(ZFE+"}2^{\aleph_0}\text{ es débilmente inaccesible")}$$

y

$$\text{Con(ZFE+MVR)} \Rightarrow \text{Con(ZFE+"}2^{\aleph_0}\text{ es medible valuado en reales")}$$

En geometría, siguiendo la senda de E, HC produce teoremas poco intuitivos. En tal caso valdría la discusión que hemos realizado respecto de E. También tiene consecuencias poco intuitivas en teoría de números reales, conjuntos perfectos[56], etc.

En teoría de modelos resulta útil pues simplifica construcciones, porque la inducción transfinita sobre los ordinales se transforma en inducción transfinita sobre el conjunto de partes. Recuérdense las definiciones de V y de L[57].

En la aritmética HGC no produce ningún nuevo teorema. En la teoría de las álgebras de Boole tiene la importante consecuencia de que dos álgebras de Boole completas y atómicas del mismo cardinal son isomorfas, puesto que en ZFE no se puede probar $\overline{\overline{\mathcal{P}(x)}} = \overline{\overline{\mathcal{P}(y)}} \Rightarrow \overline{\overline{x}} = \overline{\overline{y}}$.

HGC vale en un modelo interno, el universo constructible L, y aquí la discusión sigue los pasos de la que hemos hecho con E, aunque los ejemplos concretos nunca son tan claros como los que encontramos en el caso de E, como por ejemplo el teorema de completud del cálculo de predicados.

HGC tiene valor heurístico, cosa que comparte con pocas hipótesis de la teoría de conjuntos. Se procede del siguiente modo: se supone HGC y se demuestra un teorema, luego se trata de "eliminarla", es decir, se trata de probar el mismo resultado sin usar HGC. Como HGC puede interpretarse como si quitara, para cualquier conjunto x, los cardinales intermedios entre $\overline{\overline{x}}$ y $\overline{\overline{\mathcal{P}(x)}}$. Este hecho ha sido entendido de la siguiente manera: eliminando algunos conjuntos se llega a un resultado, que en realidad, como se prueba luego, valía para todos los conjuntos.

Si comparamos dos modelos *M* y *N* que tengan los mismos ordinales, de modo que en uno de ellos, digamos *M*, sea verdadera HGC y en el otro no, podemos entender que HGC introduce una gran cantidad de funciones biyectivas, de modo que todos los conjuntos que posee *N* cuyos tipos de orden están entre $\overline{\overline{x}}$ y $\overline{\overline{\mathcal{P}(x)}}$ tienen ahora el cardinal de x al haber introducido HGC biyecciones entre éstos y x. Como en un modelo cualquiera de ZFE ya existen en no poca cantidad funciones biyectivas, suponer HGC las aumenta muy notablemente[58]. Por este motivo HGC torna muy poderosos los métodos de construcción que utilizan los axiomas de reemplazo. Son precisamente estas características de introducción de funciones la causa de que muchas consecuencias de la HGC puedan obtenerse sin mención a la cardinalidad. Un ejemplo de esto es lo que ocurre con el Axioma de Martin, que abreviaremos AM[59]. El AM, sin conjeturar nada acerca del cardinal de $2^{\aleph_0}$ establece, para decirlo intuitivamente, que los cardinales menores que $2^{\aleph_0}$ se comportan de una manera muy similar a $\aleph_0$. Por ejemplo, si $2^{\aleph_0}=\aleph_2$ entonces es una consecuencia de AM que $2^{\aleph_0}=2^{\aleph_1}$. El AM se sigue trivialmente de HC, pero es consistente con $\neg$HC. Así, algunas consecuencias de HGC no se siguen de la mera hipótesis de cardinalidad, sino de nuevas combinatorias infinitas y de nuevas funciones introducidas por HGC, y que además son consistentes con ZFE, ya que en el caso del AM puede probarse que Con(ZFE) $\Rightarrow$ Con(ZFE+$\neg$HGC+AM). El método de *forcing* ha mostrado la gran cantidad de posibilidades que quedan abiertas respecto de HGC y sus consecuencias y negaciones. El AM ha sido rechazado explícitamente[60], pero hay algún comentario favorable acerca de un enunciado como $2^{\aleph_0}=2^{\aleph_1}$ (si es que la HC es falsa)[61]. Sin embargo parece poco intuitivo que siendo $\overline{\overline{x}} \neq \overline{\overline{y}}$ pueda darse $\overline{\overline{\mathcal{P}(x)}} = \overline{\overline{\mathcal{P}(y)}}$, porque sería extraño que la operación de partes trastocara de tal manera la cardinalidad. Si trasladamos esta afirmación otro terreno, habría álgebras de Boole completas y atómicas del mismo cardinal, pero no isomorfas. Esto puede ser interpretado en el sentido de que existe una biyección entre $\mathcal{P}(x)$ y $\mathcal{P}(y)$, pero que permuta de tal modo que no nos permite construir una biyección entre x e y. Sin embargo la biyección más natural entre $\mathcal{P}(x)$ y $\mathcal{P}(y)$ es la que se construye a partir de una biyección entre x e y, por lo que parece que se han introducido biyecciones extrañas sin introducir antes las que resultan más naturales. La HGC evita estas introducciones caprichosas de biyecciones, pero mediante el uso de la fuerza bruta al establecer la existencia de una gran cantidad de biyecciones. Nuevamente, como en el caso de E, la intuición nos da resultados disímiles con HGC.

5. El axioma de Gödel: V=L

Cuando Gödel probó la consistencia relativa de E y HGC, formuló el enunciado generalmente conocido como V=L, el axioma de constructibilidad[62] y probó primero la consistencia relativa del mismo, i.e. Con(ZF) $\Rightarrow$ Con(ZF+V=L), y luego que ZF+V=L $\Rightarrow$ E y que ZF+V=L $\Rightarrow$ HGC. L es la clase de los conjuntos constructibles y V el universo de los conjuntos, por lo que V=L dice "todo conjunto es constructible". L se define por inducción transfinita sobre todos los ordinales, mediante una función L(α), análogamente a la jerarquía acumulativa de Zermelo y von Neumann. La diferencia es que mientras la jerarquía acumulativa se define:

$$V(0) = \varnothing$$

$$V(\alpha+1) = \mathcal{P}(V(\alpha))$$

$$V(\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} V(\beta)$$

Si α es un ordinal límite

$$V = \bigcup_{\alpha\in On} V(\alpha)$$

Donde On es la clase de los ordinales. La jerarquía constructiva se define

$$L(0) = \varnothing$$

$$L(\alpha+1) = \mathcal{D}(L(\alpha))$$

$$L(\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} L(\beta)$$

Si α es un ordinal límite

$$L = \bigcup_{\alpha\in On} L(\alpha)$$

La diferencia reside que la función $\mathcal{D}(x)$ en lugar de tomar todas las partes de x como hace la función $\mathcal{P}(x)$, toma sólo las partes constructibles, es decir las partes que pueden ser separadas de x mediante un fórmula φ relativizada a x[63] y con parámetros en x, o lo que es lo mismo, que pueden ser definidas a partir de x y φ[64]. El problema mayor cuando se procede de esta manera es evitar las paradojas definicionales (como la "paradoja de Richard"), que provienen de no respetar la diferencia entre niveles de lenguaje. ZF es un lenguaje suficientemente poderoso como para formalizar no sólo su sintaxis sino también la relación de satisfacción, por lo que Gödel realizó un tratamiento formal de la idea que acabamos de esbozar. La manera que tuvo para evitar las paradojas fue el restringir la idea de "definible" a cada nivel de la jerarquía constructible, utilizando sólo conjuntos construidos anteriormente, evitando así la cuantificación sobre todos los conjuntos.

El modelo de Gödel es $<L,\in'>$, donde $\in'$ es la relación de pertenencia restringida a L: $x\in' y$ si y sólo si $x\in L \wedge y\in L \wedge x\in y$, pero se suele llamar a este modelo simplemente L. En L vale E, porque el conjunto de elección C siempre está incluído en $\bigcup\mathcal{F}$ y por la forma que se define L siempre existe una fórmula φ que nos permite separar el conjunto de elección C de $\bigcup\mathcal{F}$, con lo cual $C=\{x\in \bigcup\mathcal{F}: \varphi(x)\}$. En realidad se obtiene un enunciado más fuerte que E, puesto que L está bien ordenado y existen términos t y m, tal que dados dos conjuntos cualesquiera t nos dice cual está antes que el otro en el orden, y dada una clase cualquiera A, m nos dice cual es el primer elemento de la clase A. Ver intuitivamente por qué vale HGC en L no es tan sencillo como en el caso de E, pero suele decirse que la operación $\mathcal{D}(x)$ toma tan pocas partes de x, visto de afuera del modelo, que la operación partes interna de L no puede exceder el cardinal siguiente[65]. En L se logra el máximo control posible, porque los conjuntos constructibles se introducen en estrecha relación con el lenguaje, por la condición de la fórmula φ[66]. Este es el motivo por el cual V=L es muy poderoso para resolver problemas indecidibles en ZF o en ZFE.

Sin embargo ya el propio Gödel pensaba que V=L era sólo una herramienta para obtener pruebas finitistas de consistencia y otros resultados metamatemáticos, y no le otorgaba más crédito que ése[67]. En efecto, señala cómo argumentos infinitistas producen pruebas finitistas de consistencia[68]. Sin embargo, hay una afirmación de Gödel que llama la atención: "La sentencia A" (que ahora se denomina V=L) "añadida como axioma parece que completa de un modo natural a los axiomas de la teoría de conjuntos"[69], pues la expresión "completa de modo natural" puede entenderse como asertando la conveniencia de su incorporación a ZF. Pero por otra parte puede darse la siguiente interpretación. Con la excepción de extensionalidad y fundación, los restantes axiomas de ZF son existenciales, en el sentido de que o bien afirman la existencia de conjuntos con características especiales (v. gr. infinito), o bien permiten afirmar la existencia de nuevos conjuntos a partir de otros. Si interpretamos así es natural pensar en una operación de clausura que exprese la idea intuitiva "sólo existen los conjuntos cuya existencia está afirmada por los axiomas". Esta idea fue la que dio origen, al menos parcialmente, al axioma de fundación[70]. El axioma de Gödel impone una condición de clausura más fuerte[71]. En síntesis, si por "completar de un modo natural" se entiende imponer una condición de clausura a los axiomas, esto no atañe a la verdad o falsedad de V=L, sino al grado en que los modelos quedan determinados por los axiomas de ZF, de modo que la consistencia relativa de V=L sólo nos mostraría cuán incompleta es ZF y cuán indeterminado deja los modelos. Es cierto que también es posible que Gödel se haya engañado en un primer momento respecto a la interpretación intuitiva de V=L, como lo muestra la generalización errónea realizada a partir del hecho de que V=L permanece siendo consistente relativo si a la teoría se le agregan inaccesibles: "la prueba de consistencia de A" (i.e. V=L) "no deja de valer si se añaden a T axiomas de infinitud más fuertes (como, por ejemplo, la existencia de números inaccesibles). Por ello la consistencia de A parece ser en algún sentido absoluta"[72]. Sin embargo, cuando se agregan a ZF axiomas que expresan la existencia de cardinales medibles (o mayores) la prueba de consistencia relativa de V=L no puede ser realizada.

Lógicos actuales han afirmado cosas como V=L no es usualmente considerado verdadero[73]. Lo cierto es que a casi nadie le parece que V=L pueda ser verdad, ya porque desde una postura platonista piensa que los conjuntos existentes objetivamente no la obedecen, ya porque las confusas intuiciones no alcanzan para darle el estatus de axioma, o sino porque se rechazan los criterios intuitivos como suficientes para llamar verdadero a un enunciado.

Algunos lógicos actuales son de la posición de no considerar a L como el modelo fundamental de ZF, pero sí como una clase interesante que conviene estudiar en cuanto nos da información acerca de un tipo especial de conjuntos, los constructibles. O porque se pueden establecer relaciones con ciertas teorías de recursión transfinita. Pero los principales argumentos que sostienen quienes trabajan en ZF+V=L se apoyan en los resultados logrados en teoría de modelos para mostrar independencia o consistencia relativa[74].

En el terreno de la aritmética la adición de V=L a ZF no produce nuevos teoremas. Además L es un modelo interno, por lo cual vale para V=L lo dicho acerca de los enunciados que poseen esta característica. Llama la atención que para Gödel, mientras que la fertilidad de un axioma en la teoría de combinatorias infinitas no sea índice de nada, en cambio tenga un gran valor que un enunciado sea fértil en teoría de números. Esto nos lleva a pensar que para Gödel los números naturales son un modelo privilegiado, mientras que las combinatorias infinitas no. Esto puede fundamentarse, al menos en parte, en la posición pragmática que identifica la inducción en física y en matemática, debido a que en la aritmética es fácil obtener consecuencias verificables, pero no sabemos que sería una consecuencia verificable en combinatorias infinitas[75]. Sin embargo, si tomamos la absolutez como criterio para elegir modelos privilegiados, notamos que la aritmética tendría un carácter más absoluto respecto al poder expresivo de una teoría: debido a que AP basta para representar el lenguaje de ZF en ZF, podemos elegir una gran cantidad de maneras distintas de representar la aritmética. Pero si en cualquiera de éstas tomamos ZF+Con(ZF) tendremos nuevos teoremas de la aritmética, cualquiera sea la forma de representación que hayamos elegido. En cambio, no parece que las combinatorias infinitas posean esta absolutez, al menos mientras no introduzcan hipótesis de grandes cardinales. Por esto podemos concluir que hay más de una razón para considerar a la aritmética como modelo privilegiado y desestimar enunciados estériles en este terreno.

Como conclusión podemos decir que si tomamos en cuenta los usos más importantes, V=L queda reducido a una herramienta para probar resultados metateóricos, pero no se encuentra en el status de un principio aceptable para la teoría de conjuntos.

6. Grandes cardinales

En ZFE puede probarse la existencia de una sucesión infinita de cardinales infinitos $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$,... y también puede probarse la existencia de un límite de esta sucesión: $\aleph_\omega$. A partir de este último también hay una sucesión $\aleph_\omega$, $\aleph_{\omega+1}$, $\aleph_{\omega+2}$, $\aleph_{\omega+3}$,... cuyo límite es $\aleph_{\omega+\omega}$. Así se puede continuar encontrando límites más fuertes $\aleph_{\omega+\omega+\omega}$, $\aleph_{\omega 1}$, $\aleph_{\omega 2}$, $\aleph_{\omega_\omega}$,..., etc. Pero no toda sucesión tiene límite: si tomamos la de todos los cardinales la existencia de un límite no puede probarse en ZFE, y si agregamos como axioma el enunciado "toda sucesión tiene límite" creamos inconsistencia[76].

En este contexto surge la pregunta de si se pueden agregar a ZFE axiomas que afirmen la existencia de cardinales mayores que aquellos cuya existencia se puede probar en esa teoría: tales son los llamados grandes cardinales. Para abordar este tema, primero analizaremos los procesos de formación de cardinales infinitos en ZFE. Los dos procedimientos típicos para construir en ZFE conjuntos de mayor cardinalidad a partir de otros son:

a) el que utiliza el axioma del conjunto potencia.
b) el que usa los axiomas de unión y reemplazo.

Analizando el primer procedimiento, vemos que en ZFE puede probarse el teorema de Cantor, que afirma que para cualquier conjunto x vale $\overline{\overline{x}} < \overline{\overline{\mathcal{P}(x)}}$. Sin el axioma del conjunto potencia no podría probarse (con los demás axiomas de ZFE) que existen cardinales mayores que $\aleph_0$, por lo cual la definición de la función sucesor cardinal necesita dicho axioma. Usando este procedimiento puede probarse en ZFE la existencia de la sucesión $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$,... . El segundo procedimiento es el que, dada la familia de los A_i con $i \in I$ permite afirmar la existencia de $\bigcup_{i \in I} A_i$[77]. Así se procede para definir los límites de una sucesión, por ejemplo $\aleph_\omega = \bigcup_{n \in \omega} \aleph_n$. Aquí el uso del axioma del reemplazo es esencial: la existencia de $\aleph_\omega$ no puede probarse en base a los restantes axiomas.

Teniendo en cuenta lo dicho podemos plantear dos cuestiones. La primera es que el axioma del reemplazo y el de partes, al igual que el axioma de infinito, pueden ser entendidos como afirmando (entre otras cosas) la existencia de ciertos cardinales infinitos. La segunda es que si podemos idear un procedimiento que no sea subsumible bajo los descritos es probable que afirme la existencia de grandes cardinales, i.e. de cardinales cuya existencia no puede probarse en ZF. En efecto, supongamos que afirmamos la existencia de un cardinal $\lambda>\omega$ tal que

a) cada vez que un cardinal κ es menor que λ, el cardinal de las partes de κ también es menor que λ:

$$\kappa < \lambda \Rightarrow \overline{\overline{\mathcal{P}(\kappa)}} < \lambda$$

por lo cual no podríamos construir dicho cardinal con el primer procedimiento, es decir, usando el axioma de partes.

b) λ no es el cardinal de la unión de menos de λ conjuntos cada uno de los cuales tiene cardinal menor que λ. Es decir que λ no es la unión de κ cardinales $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_\alpha, \ldots$ con $\alpha<\kappa$ y $\mu_\alpha<\lambda$:

$$\kappa < \lambda \wedge \forall\alpha < \kappa(\mu_\alpha < \lambda) \Rightarrow \bigcup_{\alpha<\kappa} \mu_\alpha \neq \lambda$$

Cuando definíamos un nuevo cardinal κ por el segundo procedimiento κ era el cardinal de $\bigcup_{\alpha\in\lambda} \mu_\alpha$ siendo todos los conjuntos usados, esto es, λ y todos los μ_α, de cardinalidad menor que κ. Así, b) puede interpretarse en el sentido de que λ no puede construirse con el segundo procedimiento.

Es de hacer notar que ω tiene ambas características: por una parte si x es finito, el cardinal de partes de x también es finito, y por otra la unión de una cantidad finita de conjuntos finitos también es finita. Por este motivo, el problema es si existe algún λ mayor que ω con ambas características. Un cardinal así se llama inaccesible (fuerte) y su existencia no puede probarse en ZFE. Abreviaremos I el enunciado que dice "existe al menos un cardinal inaccesible" y ZFI a ZF+I, etc. Tenemos entonces:

$$\mathrm{Con(ZFI)} \Rightarrow \mathrm{Con(ZFEI)}$$

y

$$\mathrm{Con(ZFI)} \Rightarrow \mathrm{Con(ZFI+HGC)}$$

La consistencia relativa de I a ZFE plantea problemas, porque ZFI $\vdash$ Con(ZF). Si tuviéramos una prueba de Con(ZF) $\Rightarrow$ Con(ZFI) que fuera representable en ZFI, tendríamos que ZFI $\vdash$ Con(ZFI) y por el teorema de Gödel habríamos probado $\neg$Con(ZFI) y luego $\neg$Con(ZF). Por lo tanto ninguna prueba relativa de consistencia de tal tipo puede ser representada en ZFI.

ZFI es una extensión fuerte en el sentido que todo lo que puede afirmarse en un modelo en base a ZF puede también hacerse con ZFI, pero no vale la recíproca. En particular, no existen modelos internos de ZF donde valga I. Esto da una cierta idea de que el agregado de I produce una especie de extensión absoluta en el poder expresivo de la teoría, absoluto en el sentido que este mayor poder expresivo no puede ser trucado por maniobras en las interpretaciones. Esto es muy significativo, por lo que es interesante detenerse en el siguiente ejemplo. El teorema de Gödel, que es aplicable a ZFE, prueba le existencia de un enunciado G, que dice "G no es demostrable en ZFE" y que finitísticamente (y, *a fortiori*, representable en ZFE) Con(ZFE) $\Rightarrow$ G, con lo cual, si ZFE es consistente entonces G no es demostrable: Con(ZFE) $\Rightarrow$ (ZFE $\nvdash$ G). Si la codificación de la sintaxis se ha hecho de la manera habitual G es equivalente a un enunciado aritmético A. Como ZFEI $\vdash$ Con(ZFE), tenemos ZFEI $\vdash$ G y ZFEI $\vdash$ A, con lo cual el agregado de un axioma de inaccesibles produce el efecto de que se puedan probar nuevos enunciados aritméticos[78]. Así, elegida una interpretación cualquiera de ZFI, siempre tenemos afirmaciones acerca del modelo cuya verdad está indecidida en ZF, pero decidida en ZFI. Hablando de manera intuitiva, dado cualquier modelo de ZFI, existen "conocimientos" acerca del modelo que no pueden darse usando ZFE bajo ninguna reinterpretación.

En base a estas circunstancias Gödel forjó la esperanza de que algún enunciado de grandes cardinales adquiriera el status de axioma de la teoría de conjuntos[79]. Esta concepción dio origen a una serie de investigaciones sobre nuevos axiomas de infinitud denominadas "programa de Gödel de los grandes cardinales"[80].

En otras ramas de la matemática I ha tenido poca o ninguna consecuencia. Existe algún resultado en análisis y Feferman formalizó la teoría de categorías en una teoría de conjuntos que contiene inaccesibles, pero incluso en teoría de modelos se trata de resultados aislados, quizás con una única excepción: el modelo más natural de ZF, la jerarquía acumulativa, tiene cardinal inaccesible.

Si llamamos I' al enunciado "existen al menos dos inaccesibles" y comparamos ZFI con ZFI' veremos una extensión del poder expresivo similar a la que sucede con ZF y ZFI. Esto da idea de que podemos analizar los enunciados "existen al menos *n* inaccesibles" para *n* número natural. Siguiendo en esta línea podríamos afirmar "existe una cantidad infinita de inaccesibles". Un nuevo salto se da con axiomas del tipo "existe una secuencia de inaccesibles de largo κ cuyo límite es precisamente κ": $\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_\omega,\ldots,\mu_\alpha,\ldots,\mu_\kappa=\kappa$, cardinales que se suelen llamar hiperinaccesibles. Este proceso de generación, basado en ideas intuitivas acerca de secuencias, límites de secuencias, funciones normales, etc.[81] pueden repetirse generando nuevos grandes cardinales cada vez. Pero luego se pensó en alguna manera de obtener cardinales más grandes que cualquiera de éstos, para lo cual se procedió de un modo diferente: se tomó alguna propiedad de ω que no tuvieran los cardinales logrados hasta el momento y se postuló la existencia de un cardinal mayor que ω con dicha propiedad. La justificación intuitiva de tal modo de proceder es débil, porque existen propiedades de ω con las cuales este procedimiento genera contradicción, como por ejemplo: "todo cardinal menor es finito".

Así el "paraíso que Cantor ha creado para nosotros" se incrementó considerablemente. Las ideas para formular grandes cardinales provinieron de diversos campos: la teoría de la medida, los lenguajes infinitarios, las álgebras de Boole, combinatorias infinitas y teoría de árboles, la teoría de modelos, etc. Así se formularon cardinales mucho más grandes que los primeros inaccesibles de los que hemos hablado: cardinales medibles, compactos, supercompactos, inefables, Ramsey, gigantes, extendibles, etc. Entre algunos de ellos se conoce cuáles son mayores: por ejemplo el primer inaccesible es menor que el primer medible. También se conocen resultados de consistencia relativa con respecto a los axiomas que hemos visto precedentemente. Por ejemplo, se sabe que Con(ZFI) $\Rightarrow$ Con(ZFI+V=L). Con respecto a los cardinales medibles, se sabe que su existencia es inconsistente con V=L: si M es "existe un cardinal medible", se sabe que $ZFM \vdash V \neq L$. Pero la HGC es consistente relativa a ZFM: $Con(ZFM) \vdash Con(ZFM+HGC)$.

El principal problema en cuanto a la aceptación de axiomas de grandes cardinales es la falta de tope en cuanto al concepto de "gran cardinal"[82]. Los más pequeños pueden ser avalados suficientemente, pero son muy poco poderosos. A medida que vamos avanzando hacia cardinales mayores aumenta su poder deductivo, pero las intuiciones se tornan menos claras, siendo el único tope efectivo la inconsistencia. Entre los más grandes incluso se desconocen resultados relativos de tamaño con lo que la elección se torna incierta. De este modo elegir un gran cardinal es análogo a estipular un límite en cantidades que se incrementan de manera continua, debido a lo arbitrario que resulta dicho límite.

Un modo de trabajo utilizado en teoría de modelos es, cuando hay algún problema abierto, recurrir a alguna hipótesis de grandes cardinales a ver si se resuelve. Luego se trata de eliminar tal hipótesis y si no se logra, de restringirla al cardinal más pequeño posible. Pero es dudoso que tal resultado tenga algo más que un mero valor heurístico, al menos mientras no se acepte algún axioma de grandes cardinales como formando parte de la teoría de conjuntos usual.

De este modo la investigación sobre grandes cardinales perdieron gran parte de su interés, y en la actualidad ni la evidencia ni los otros criterios analizados son considerados suficientes como para justificar el agregado a ZF de algún axioma de grandes cardinales.

7. Conclusiones

El análisis que hemos realizado de los distintos enunciados que podrían ser agregados a ZF, en base a criterios desarrollados en los últimos tiempos, no nos permite, en principio, dar con argumentos que avalen consecuentemente la adición de algún axioma que no sea de uso generalmente aceptado, como es el caso del axioma de elección.

Sin embargo, es posible que este estudio rinda sus frutos en otro terreno, pues este tipo de discusiones pueden servir como punto de partida para una crítica del concepto de conjunto, es decir, para una discusión filosófica más general que la presentada aquí. Un campo de interesantes investigaciones está abierto en tal sentido.

Manuscrito recibido, 4 de octubre, 1994.
Versión final recibida, 4 de mayo, 1995.

* Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência
Universidade Estadual de Campinas (Unicamp)
P.O. Box 6133
13081-000 Campinas SP
Brasil
E-mail: gonzal@cesar.unicamp.br

Notas

1 Ver, por ejemplo, Levy (1979).

2 Dentro de esta clase de trabajos podríamos incluir Maddy (1988).

3 Ver Mendelson (1987) para los axiomas de la Arimética de Peano en primer orden.

4 Para las nociones de teoría de modelos ver, por ejemplo, Chang, Keisler (1973).

5 La regla omega es una regla de dedución infinitista que permite deducir $\forall x\varphi(x)$ de infinitas premisas $\varphi(0)$, $\varphi(\sigma(0))$, $\varphi(\sigma\sigma(0))$,..., $\varphi(\sigma...\sigma(0))$,... (donde σ es la función sucesor). El significado intuitivo es: si tenemos infinitas fórmulas que dicen que una propiedad determinada vale para cada uno de los números naturales, entonces podemos afirmar con una fórmula que vale para todos. Suponiendo que es consistente, AP es omega incompleta, es decir, existen fórmulas $\varphi(x)$ tales que se puede probar $\varphi(0)$, $\varphi(\sigma(0))$, etc., pero no se puede probar $\forall x\varphi(x)$. El agregado de la regla omega a AP la transforma en una teoría completa, pero al aceptar deducciones de largo infinito no se puede establecer un procedimiento de decisión que permita decir si una secuencia (posiblemente infinita) de fórmulas es o no una deducción. Con regla omega o sin regla omega carecemos siempre de un procedimiento de decisión que nos permita establecer, para una fórmula dada cualquiera, si es o no teorema.

6 Para transformar a ZF en una teoría categórica no basta formularla en orden dos, sino que además se deben agregar axiomas, por ejemplo "no existen cardinales inaccesibles" (sobre el significado de "inaccesible" ver más adelante el apartado "Grandes Cardinales"). Cfr. con las afirmaciones de Kreisel en Lakatos (1967, p. 100).

7 Toda fórmula sin variables consta en el lenguaje original de AP de términos de la forma $\sigma...\sigma(0)$. Si introducimos una constante para cada término de ese tipo el resultado no cambia en absoluto. También sucede lo mismo con cualquier introducción de constantes que sean eliminables. Si tuviéramos conocimiento de lo que sucede con todos los términos de la forma $\sigma...\sigma(0)$, AP sería fácilmente completable.

8 Por ejemplo la Hipótesis del Continuo usa sólo constantes eliminables.

9 No es preciso que haya símbolos de función para el sucesor, la suma y el producto, ni constantes para el cero, sino que basta que estas operaciones y constantes puedan ser definidas de algún modo y que, bajo estas definiciones, sean teoremas los axiomas de Peano.

10 Como ocurre, por ejemplo, con la Hipótesis del Continuo.

11 Tal es la posición de Gödel: "es posible establecer medios para responder a una pregunta que es indecidible a partir de los axiomas usuales" (Gödel 1947, p. 348).

12 El capítulo 1 de Fraenkel, Bar-Hillel, Levy (1973) trata extensamente de las paradojas en la teoría de conjuntos.

13 Cfr. Borel (1905) y König (1905).

14 Cfr. Mirimanoff (1917) y Mirimanoff (1917a).

15 Cuando digamos en adelante "φ no se deduce de T" estaremos asumiendo tácitamente la hipótesis "T es consistente".

16 Gödel llamó la atención sobre este hecho. Cfr. la carta de Gödel a Hao Wang en Hao Wang (1974, p. 9).

17 No sólo pueden representarse los métodos habituales, sino también, por ejemplo deducciones transfinitas y fórmulas de largo infinito.

18 Esta clase puede ser entendida simplemente como una propiedad expresable en el lenguaje, de modo que $x \in$ M significa que x tiene la propiedad M.

19 Si φ es una fórmula, la relativización de φ a M, que escribiremos φ^M, es la fórmula resultante de reemplazar toda subfórmula $\exists y\psi$ por $\exists y(y \in \mathrm{M} \wedge \psi)$ y toda subfórmula de la forma $\forall y\psi$ por $\forall y(y \in \mathrm{M} \Rightarrow \psi)$. De este modo, si φ es una sentencia la verdad de φ^M está determinada por los objetos en M.

20 A. Levy, refiriéndose al axioma de Gödel denominado V=L dice: "this is not an axiom in the same sense that the axioms of ZF are axioms. While the axioms of ZF are assumptions about

the sets which mathematicians usually accept either as being "true" or as constituting a reasonable basis for the theory, the axiom of constructibility is a pivotal assumption about the universe of sets which is usually neither accepted as being true nor even as being one of the basic assumptions for the theory" (Levy 1979, p. 291).

21 Un modelo intuitivo, tal como aquí se entiende, es la concepción de un cierto dominio de objetos D, más o menos definidos, con algunas relaciones y operaciones sobre ellos que se conocen parcialmente, con el agregado de alguna noción intuitiva de consecuencia lógica.

22 Es interesante el comentario de Bar-Hillel 'The dangers of Platonistic modes of speech' en Lakatos (1967, pp. 114-115), pues expresiones como *la* noción de conjunto parecen remitir a un objeto existente en el cielo platónico.

23 Cabe hacer dos acotaciones: a) algunos axiomas de ZF fueron discutidos: unión, partes y separación. b) otras teorías de conjuntos son incompatibles con ZF, como es el caso de NF.

24 Kleene utiliza este criterio en la discusión acerca de la tesis de Church en el §52 de Kleene (1952).

25 Levy valora este criterio en la discusión acerca del axioma de elección: "these equivalences establish the "stability" of the axiom of choice, i.e., they show that the axiom of choice is not a random product of the historical development of mathematics but a fundamental principle which is not likely replaced by some other axiom which is not equivalent to it" (Levy 1979, p. 160).

26 Así puede ser interpretado el famoso slogan de Kronecker: "Die ganzen Zahlen hat die liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk".

27 La curiosa distinción de Hilbert entre entidades reales e imaginarias dada en Hilbert (1925), quizá pueda ser interpretada en este sentido.

28 El ejemplo prototípico es la Urintuition de los números naturales. Ver Fraenkel, Bar-Hillel, Levy, pp. 252-254.

29 Por ejemplo, el teorema de Gödel se aplica a toda teoría capaz de representar la AP, independientemente del modo particular de representación.

30 El término "inductivo" tampoco es feliz, debido a que en matemática se aplica a razonamientos válidos.

31 Cfr. Gödel (1935).

32 "Mais on ne peut pas appliquer une infinité de fois une loi arbitraire avec laquelle à une classe on a fait correspondre un individu de cette classe" (Peano 1890, p. 210).

33 Zermelo (1904).

34 Ver nota 13.

35 El enunciado equivalente al que haremos referencia es "Todo conjunto puede ser bien ordenado" (un buen orden es un orden total tal que todo subconjunto no vacío tiene primer elemento).

36 Estas equivalencias fueron recopiladas en Rubin, Rubin (1985).

37 Además de las formas débiles inmediatas, como podría ser restringir el axioma de elección a familias numerables, tendremos en cuenta: a) El teorema del ultrafiltro: todo filtro en álgebra de Boole puede ser extendido a un ultrafiltro. b) Todo conjunto puede ser linealmente ordenado. Para los conceptos sobre álgebras de Boole que utilizaremos basta conocer un desarrollo como el capítulo VIII de Levy (1979).

38 Fraenkel (1922a).

39 El axioma de completud de Hilbert para la geometría, que establece que el dominio de individuos debe ser lo más abarcante posible.

40 La afirmación de que en Hilbert "existencia es sinónimo de no contradicción" se basa fundamentalmente en esta concepción.

41 Zermelo (1908).

42 Introducido en Mycielski, Steinhaus (1962).

43 E implica, por el contrario, que hay subconjuntos de la recta real que no son medibles (*a fortiori* no son medibles de Lebesgue), hecho considerado antiintuitivo.

44 En Hao Wang (1974, p. 198) se dice: "Gödel notes a current fashion against the appeal to intuition and a consequent lack of practice in the conscious use of intuitions. He points out that intuition does not at all mean what first comes to mind but can and should be cultivated".

45 "Todos comienzan, como dijimos, asombrándose de que las cosas sean como son, como ocurre con lo títeres que se mueven por sí solos, con los solsticios y con la inconmensurabilidad de la diagonal" (sc. y el lado del cuadrado) "Parece asombroso a quienquiera que aún no haya escrutado la causa, que una cantidad no admita ser medida por la unidad más pequeña. Pero es menester arribar al temple de ánimo contrario y, según el proverbio, al mejor, como ocurre cuando se comprenden los ejemplos mencionados. Pues nada provocaría más admiración a un geómetra que si la diagonal se tornara mensurable". Aristóteles: *Metafísica*, 983a12-21. De esta cita bien podemos concluir que lo que nosotros llamamos evidencia tiene para Aristóteles un carácter dinámico, dependiente del conocimiento.

46 Gödel ha expresado: "en muchos casos (...) la apariencia extraña puede ser explicada por una falta de concordancia entre nuestros conceptos geométricos intuitivos y los conceptos de teoría de conjuntos que aparecen en los teoremas" (Gödel 1947, p. 354). En el mismo sentido Kreisel dijo: "It should be noted that the consequences of the axiom of choice which are usually found to be paradoxical, affect principally the identification of the notions of (i) *geometric figure* and (ii) *arbitrary set of points*" (Lakatos 1967, p. 103).

47 Cfr. Mostowski (1939).

48 "Todo conjunto puede ser linealmente ordenado".

49 "Todo conjunto puede ser bien ordenado".

50 Es un modelo de ZF salvo el axioma de fundación.

51 Con un alfabeto numerable.

52 Ver el apartado V=L donde se define L.

53 Fue el primer problema de Hilbert, según figura en Hilbert (1901, pp. 298-9).

54 El resultado de Silver es más general que el que damos aquí, pero más difícil de entender sin un conocimiento técnico apropiado.

55 Ver el apartado "Grandes Cardinales."

56 Gödel interpreta estos resultados en el sentido de que la HGC implica que conjuntos que intuitivamente parecen de pocos puntos tendrían el cardinal del continuo. También Hao Wang (1974, p. 198) es de esta opinión.

57 Ver más adelante el apartado V=L.

58 Recordar que la composición de funciones biyectivas produce nuevas funciones biyectivas.

59 El axioma de Martin fue introducido en Martin, Solovay (1970).

60 Análogamente a la nota 20 Levy dice: "Martin's axiom is not an axiom in the same sense that the axioms of ZFC are axioms. While the axioms of ZFC are assumptions about sets which mathematicians usually accept either as being "true" or as constituting a reasonable basis for set theory, Martin's axiom is an assumption which nobody seems to be taking seriously as expresing "true" or acceptable statement about the state of affairs in set theory." (Levy 1979, p. 280).

61 Kunen expresa: "It is commonly felt (...) that all infinite cardinals $\leq 2^{\aleph_0}$ behave similarly to ω" (Kunen 1983, pp. 51-52). Esta afirmación parece oponerse a la de Levy citada en la nota anterior.

62 Introducido en Gödel (1939).

63 Para la definición de fórmula relativizada puede verse la nota en página 31.

64 En otras palabras, $y \in \mathcal{D}(x)$ significa que existe una fórmula φ y $z_1 \in x, \ldots, z_n \in x$ tales que $y = \{u \in x : x \models \varphi[z_1, \ldots, z_n, u]\}$ ($z_1, \ldots, z_n$ son llamados parámetros).

65 Alguna evidencia en ese sentido puede estar dada por el hecho de que, si existe un cardinal medible, en L sólo hay una cantidad numerable de reales.

66 El buen orden de L puede ser interpretado como siendo inducido por el orden del lenguaje (i.e. el orden dado por la numerabilidad del conjunto de fórmulas).

67 Drake (1974, p. 131) dice: "Most set theorists regard it" (i.e. V=L) "as a restriction which may prevent one from taking every subset at each stage, and so reject it (this includes Gödel, who named it)".

68 Cfr Gödel (1947, pp. 350 y 359-361).

69 Gödel (1981, p. 193).

70 La idea de un "Beschränktheitsaxiom" de Fraenkel (1922, p. 234).

71 Sin embargo, permanecen indecidibles importantes cuestiones, como la existencia de inaccesibles.

72 Gödel (1981, pp. 193-194).

73 Ver nota 20.

74 En particular es muy poderoso en combinatorias infinitas. Por ejemplo, utilizando V=L se puede resolver el problema de Suslin.

75 Cf. Gödel (1947, pp. 350 y 359-61).

76 Entendiendo sucesión como clase definible, no como conjunto.

77 En ZF la existencia en general de $\bigcup_{i\in I} A_i$ se prueba en dos pasos: primero, usando el axioma del reemplazo, se prueba la existencia de $\{A_i : i\in I\}$, y luego se hace la unión de este conjunto.

78 Gödel hizo incapié en esto en '¿Qué es el problema del continuo de Cantor?', cfr. Gödel (1947, p. 349). En realidad, como tanto G como A dependen de la codificación aritmética elegida, puesto que dos codificaciones distintas suelen dar distintos G y A. Por esto I aumenta el poder expresivo de la teoría independientemente de la codificación empleada.

79 Cfr. Gödel (1946, p. 332).

80 Cfr. Hallett (1984, pp. 99-104).

81 Ver, por ejemplo Drake (1973, Cap. 4).

82 Gödel esperaba que se descubriera algún tipo de propiedad máxima sobre el universo de los conjuntos, pero hasta el momento nada así ha sido hallado, y quedan pocas esperanzas de que pueda hallarse. Cfr. Gödel (1946, p. 332).

BIBLIOGRAFIA

La paginación de las obras de Gödel se refiere siempre a Gödel (1981).

Borel, E.: 1905, 'Quelques remarques sur les principes de la théorie des ensembles', *Mathematische Annalen* 60, 194-195.

-- 1928, *Leçons sur la théorie des fonctions*, Paris, Gauthier-Villars.

Chang, C.C., Keisler, H.J.: 1973, *Model Theory*, Amsterdam, North Holland.

Fraenkel, A.: 1922, 'Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre', *Mathematische Annalen* 86, 230-7.

-- 1922a, *Der Begriff "definit" und die Unabhängigkeit des Auswahlaxiom*, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, physikalische-mathematische Klasse, 253-257.

Fraenkel, A., Bar-Hillel, Y.: 1958, *Foundations of Set Theory*, Amsterdam, North Holland.

Fraenkel, A., Bar-Hillel, Y., Levy, A.: 1973, *Foundations of Set Theory*, Amsterdam, North Holland.

Gödel, K.: 1931, 'Über Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit', *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums* 3, 12-13. In 1981, pp. 92-94.

-- 1935, 'Über die Länge von Beweisen', *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums* 7, 23-24. In 1981, pp. 189-190.

-- 1938, 'The consistency or the axiom of choice and the generalized continuum hypothesis', *Proceedings of the National Academy of Sciences USA* 24, 556-557. In 1981, pp. 192-194.

-- 1939, 'Consistency-proof of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum-hypothesis', *Proceedings of the National Academy of Sciences USA* 25, 220-224. In 1981, pp. 197-203.

-- 1946, 'Remarks before the Princeton Bicentenial Conference on Problems in Mathematics', in 1981, pp. 331-335.

-- 1947, 'What is Cantor's Continuum Problem?', *American Mathematical Monthly* 54, 515-525. In 1981, pp. 340-362.

-- 1981, *Obras Completas*, Madrid, Alianza.

Hallett, M.: 1984, *Cantorian Set Theory and Limitation of Size*, Oxford, Clarendon Press.

Hao Wang: 1974, *From Mathematics to Philosophy*, London, Routledge and Kegan Paul.

Hilbert, D.: 1901, 'Mathematische Probleme', *Archiv für Mathematik und Physik,* 3. Reihe, 1, 44-63. In 1970, III, pp. 290-329.

-- 1925, 'Über das Unendliche', *Mathematische Annalen* 95, 161-190.

-- 1970, *Gesammelte Abhandlungen*, New York-Berlin-Heildelberg, Springer Verlag.

Kleene, S.C.: 1952, *Introduction to Metamathematics*, Princeton, D. Van Nostrand Co.

König, J.: 1905, 'Zum Continuumproblem', *Mathematische Annalen* 60, 177-180.

Lakatos, I.: 1967, *Problems in the Philosophy of Mathematics*, Amsterdam, North Holland.

Levy, A.: 1979, *Basic Set Theory*, New York-Berlin-Heildelberg, Springer Verlag.

Maddy, P.: 1988, 'Beliving the axioms I', *Journal of Symbolic Logic* 53, 481-511.

Martin, D.A., Solovay, R.M.: 1970, 'Internal Cohen extensions', *Annals for Mathematical Logic* 2, 143-178.

Mendelson, E.: 1987, *Introduction to Mathematical Logic*, 3th Edition, Belmond, Wadsworth and Brooks.

Mirimanoff, D.: 1917, 'Les antinomies de Russell et de Burali-Forti et le problème fondamental de la théorie des ensembles', *L'Enseignement Mathematique* 19, 37-52.

-- 1917a, 'Remarques sur la théorie des ensembles et les antinomies Cantoriennes (I)', *L'Enseignement Mathematique* 19, 208-217.

Mostowski, A.: 1939, 'Über die Unabhängigkeit des Wohlordnungssatzes von Ordnungsprinzip', *Fundamenta Mathematicae* 32, 201-252.

-- 1967, 'Recent Results in Set Theory', in Lakatos 1967, pp. 82-96.

Mycielski, J., Steinhaus, H.: 1962, 'A Mathematical Axiom Contradicting the Axiom of Choice', *Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences, Série des sciences math. astr. et phys.* 10, 1-3.

Peano, G.: 1890, 'Demonstration de l'integrabilité des équations differentielles ordinaires', *Mathematische Annalen* 37, 182-288.

Rubin, H., Rubin, J.E.: 1985, *Equivalents of the Axiom of Choice II*, Amsterdam, North Holland.

Zermelo, E.: 1904, 'Beweis daß jede Menge wohlordnet werden kann', *Mathematische Annalen* 59, 514-516.

-- 1908, 'Neuer Beweis für the Möchlichkeit einer Wohlordnung', *Mathematische Annalen* 65, 107-128.