

VIDA EN COMUN, VIDAS SEPARADAS. SOBRE LAS INTERACCIONES ENTRE MATEMATICAS Y LOGICAS DESDE LA REVOLUCION FRANCESA HASTA LA PRIMERA GUERRA MUNDIAL

(Living together and living apart. On the interactions between mathematics and logics from the French Revolution to the First World War)

Ivor GRATTAN-GUINNESS*

* Middlesex University, Queensway, Enfield, Middlesex EN3 4SF, England.

BIBLID [ISSN 0495-4548 (1997) Vol. 12: No 28; p. 13-37]

RESUMEN: Este artículo presenta un amplio panorama histórico de las conexiones existentes entre ramas de las matemáticas y tipos de lógica durante el período 1800-1914. Se observan dos corrientes principales, bastante diferentes entre sí: la lógica algebraica, que hunde sus raíces en la *logique* y en las álgebras de la época revolucionaria francesa y culmina, a través de Boole y De Morgan, en los sistemas de Peirce y de Schröder; y la lógica matemática, que tiene una fuente de inspiración en el análisis matemático de Cauchy y de Weierstrass y culmina, a través de las iniciativas de Peano y de la teoría de conjuntos de Cantor, en la obra de Russell. Se extraen algunas conclusiones generales, con referencias relativas a la situación posterior a 1914.

Descriptores: Condillac, Legendre, Cauchy, Boole, De Morgan, Peirce, Schröder, Weierstrass, Cantor, Peano, Russell; álgebra, análisis; lógica algebraica, lógica matemática.

ABSTRACT: *This article contains a broad historical survey of the connections made between branches of mathematics and types of logic during the period 1800-1914. Two principal streams are noted, rather different from each other: algebraic logic, rooted in French Revolutionary *logique* and algebras and culminating, via Boole and De Morgan, in the systems of Peirce and Schröder; and mathematical logic, inspired by the mathematical analysis of Cauchy and Weierstrass and culminating, via the initiatives of Peano and the set theory of Cantor, in the work of Russell. Some general conclusions are drawn, with examples given of the state of affairs after 1914.*

Keywords: *Condillac, Legendre, Cauchy, Boole, De Morgan, Peirce, Schröder, Weierstrass, Cantor, Peano, Russell; algebra, analysis; algebraic logic, mathematical logic.*

1. Introducción

Lo que se trata de examinar aquí son los vínculos que mediaron entre la(s) lógica(s) y las ramas de las matemáticas a lo largo del s. XIX y hasta la Primera Guerra Mundial. Se hace constar el influjo de la "logique" sobre el álgebra en Francia durante la Revolución y su transmisión parcial a Inglaterra, donde Boole y de Morgan fundan aspectos de la lógica algebraica. Esta línea tuvo continuación en Peirce y en Schröder; pero, con el avance del siglo, se vio reemplazada por la lógica matemática que había nacido del creciente rigor aportado por Cauchy al análisis matemático y depurado aún más por Weierstrass y sus seguidores. Peano fue una figura clave en la "nueva" lógica -sin que los trabajos independientes de Frege fueran muy influyentes-, pero Russell la llevó a un punto álgido al

exponer durante la década de los 1900 su filosofía logicista de las matemáticas, en cuyo marco la matemática pura se hallaba fundada en -su versión de- la lógica. Esto, sin embargo, no determinó la unión entre la lógica y las matemáticas pues la mayoría de los matemáticos prestó poca atención a este desarrollo.

La historia resulta bastante complicada, incluso a juzgar por los patrones habituales en historia de las ideas. Pues desempeñaron su papel personajes menores de toda laya y las teorías mismas envolvían no sólo interacciones entre lógica y matemáticas sino conexiones ulteriores dentro de cada una de estas dos disciplinas así como entre ellas y otras ciencias, además de la filosofía e incluso la religión. Muchos de estos detalles quedarán elididos u omitidos y las referencias se limitarán a algunos títulos principales de la literatura primaria y secundaria. Se plantearán algunas cuestiones históricas abiertas y se darán indicaciones de la investigación en curso allí donde sea factible. De las fechas de nacimiento y defunción de las figuras principales queda constancia como coetilla de una representación esquemática de la historia, anexa a la sección final de este artículo.

2. La "logique" de la ideología

Cuando se abrió la *École Normale* en París, en 1795, a cada uno de los 1.200 estudiantes se le dio una copia de la *Logique* de Condillac (1780). La política no dejó de tener un papel en esta elección al tratarse de un texto que congeniaba con los *idéologues*, cuyo poder e influencia estaban entonces precisamente en alza dentro de los círculos académicos y educativos. El término "idéologue", antes de apuntar a la metodología general de la ideología con la que ahora es asociado, tenía un sentido más bien específico: enemigo de la metafísica, este movimiento adoptaba una epistemología cortada por el patrón de la sensación, en cuya psicología las experiencias sensoriales primaban sobre los procesos mentales internos. Parejamente, daba prioridad a la observación junto con su correlato mental: la experiencia de un signo de algún efecto (o de un fenómeno o de cualquier cosa) inspiraba las ideas en la mente. El término "idéologie" fue propuesto por Destutt de Tracy en 1796; se refería al estudio de las ideas y de sus leyes, orígenes y signos representativos.

Condillac fue un señero fundador de este ideario -que equivalía a una reelaboración más bien ingenua de partes de la filosofía de Locke; de ahí que su libro resultara un texto apropiado a efectos escolares. Lo que se seguía de esta filosofía para la lógica era el acento en la claridad de los signos, de modo que para nosotros esta lógica constituye una forma de semiótica. Una consecuencia para las matemáticas fue que el álgebra ganara preeminencia entre las diversas ramas de la materia. Tres años después de la distribución de su *Logique* en la *École Normale* -y casi tres años después de la clausura de esta infortunada institución-, se publicó póstumamente *La langue des calculs* (Condillac, 1798), como volumen 23 de la edición de sus obras, donde se elaboraba

con detalle una filosofía del álgebra elemental con el acento puesto sobre la claridad y la certeza de las teorías formales algebraicas. Aun así, su planteamiento no estaba claro ni resultaba siquiera bastante algebraico para el matemático Gergonne (véase Dahan, 1986). Gergonne es mejor recordado en lógica por su artículo (1817), en el que explora la lógica de los diagramas de Euler, y por su discusión (1818) de las definiciones implícitas.

Condillac murió en 1780 y así quedó a salvo del uso que se hizo de su filosofía durante la Revolución (sobre esto véase Albury, 1986). Pero menos suerte tuvo otra figura notable en este contexto: Condorcet, que murió en 1794, al parecer por su propia mano -y por haberse adherido a la agrupación política más débil, los Jacobinos-. Su filosofía era en algún respecto consistente con la de Condillac; por ejemplo, a propósito de la claridad del lenguaje, esperaba que se pudiera crear un lenguaje universal y relacionaba sus ideas con el álgebra (véase Granger, 1954). También compartía cierto interés por el "análisis", referido tanto a la descomposición de las teorías y nociones en sus componentes básicos como a la preferencia por los métodos algebraicos en matemáticas, que había empleado en el cálculo y en el tratamiento de ecuaciones diferenciales. Lacroix, el gran escritor de libros de texto en la Francia de principios del s. XIX, fue discípulo suyo y escribió tanto una glosa elogiosa de su vida y obra como un estudio del análisis y de la síntesis en matemáticas (Lacroix. 1813 y 1799 respectivamente).

3. Lagrange y sus álgebras

Aunque Condorcet era mejor matemático que Condillac, resultaba muy inferior a Lagrange, el principal matemático de finales del s. XVIII, que en efecto despreciaba sus obras matemáticas (véase mi 1985a, p. 760). Hay, sin embargo, mucho en común entre estos dos matemáticos; pues, en un nivel matemático superior, Lagrange también prefería los métodos algebraicos hasta el punto de intentar reducir el cálculo y la mecánica a manipulaciones algebraicas mediante la adopción de principios expresables de forma algebraica y la restricción al álgebra de los métodos de deducción. Aquí reviste importancia su tratamiento del cálculo, que fundaba en la asunción de que cualquier función $f(x+h)$ podía expandirse en una serie de Taylor en potencias de la variable incremento h para valores cualesquiera de h y de la variable base x . Popularizó este planteamiento en un manual (1797) basado en su enseñanza en la *École Polytechnique*, que se había abierto un poco antes que la *École Normale* -y que, por contraste con el precipitado fracaso de ésta última, ha durado hasta nuestros días-.

El planteamiento de Lagrange adolecía de falta de prueba en varios aspectos (véase Dickstein, 1899): su argumentación en favor del principio sólo consistía en una inducción -aun siendo éste un medio socorrido y aprobado de razonamiento matemático- y, para empezar, no mostraba cómo podía convertirse "cualquier" función en una serie, menos aún sin recurrir a los descartados

métodos alternativos de límites e infinitésimos. En la sección 6, más abajo, veremos la suerte conocida por el planteamiento de Lagrange; lo que interesa aquí son las dos nuevas álgebras que contribuyó a inspirar (véase mi 1979).

Una de ellas fue el álgebra de operadores diferenciales, donde D representaba d/dx , D^2 oficiaba de d^2y/dx^2 , la integral f se dejaba manipular como D^{-1} , y así sucesivamente. Como fruto de este tratamiento, Lagrange halló una representación simbólica de la serie de Taylor que relacionaba D con la diferencia finita $\Delta f(x)$ de una función $f(x)$:

$$\Delta f(x) = f(x+b) - f(x) = e^{bD} - 1 f(x) \quad (3.1)$$

Se internó además en los métodos de adición, donde cabía tomar el operador de adición como Δ^{-1} (véase Koppelman 1972). La otra álgebra fue la de funciones y sus propiedades mutuas; supuso un gran estímulo para el estudio de ecuaciones funcionales (véase Dhombres, 1986).

Algunos de los seguidores de Lagrange, especialmente Laplace, trataron de dar nuevas pruebas de estos resultados por medios más ortodoxos dentro del cálculo; pero otros desarrollaron el planteamiento simbólico mismo. Por ejemplo, Arbogast publicó un voluminoso libro en 1800 sobre el "cálculo de derivaciones", en el que la "derivación" de una función $f(x)$ era una generalización de la noción de una función derivada $f'(x)$ que satisface propiedades similares; y Servois (1814: 98), en el curso de su exploración de las ecuaciones funcionales, propuso los calificativos "distributiva" y "mutuamente conmutativa" para las propiedades

$$f(x+y+\dots) = f(x)+f(y)\dots \text{ y } f(g(x)) = g(f(x)) \quad (3.2)$$

Es interesante reparar en que algunos de estos autores hacían una distinción explícita entre un símbolo y su referente, de modo que las *letras* podían exhibir unas propiedades como las señaladas en (3.2).

4. Las álgebras inglesas y sus lógicas

Mientras la matemática francesa se desarrollaba con notable fervor durante la Revolución y aún después, Inglaterra estaba sumida en un profundo sueño, por más que la *Mécanique céleste* de Laplace (1799-1805) moviera a algunos matemáticos británicos a aprender diversos métodos continentales (véase Guicciardini, 1987, parte 3). Esta disposición hacia el cambio se avivó al mediar la década de 1810, cuando Babbage, Herschel, Peacock y otros formaron la "Analytical Society". Poco después ellos tres -jóvenes por entonces- traducían al inglés el manual más pequeño de Lacroix sobre el cálculo (Lacroix, 1816) y en su prefacio censuraban al autor por haberse apartado un poco del método "formalmente correcto" de Lagrange; luego, en sus propias

investigaciones, Babbage y Herschel llevaron el estudio de las ecuaciones funcionales a nuevas simas de abandono simbólico (véase Dubbey, 1978, con las cautelas apuntadas en mi 1979).

Es preciso hacer hincapié en dos características de estos desarrollos. En primer lugar, junto con algunos estudios ya hechos por Woodhouse, son un ejemplo de la chifladura por diversos tipos de álgebras que los matemáticos ingleses -no los británicos en general- habrían de mostrar a todo lo largo del siglo. En segundo lugar, aunque Babbage y Herschel siguieran y desarrollaran la matemática francesa con pleno conocimiento de causa, no adoptaron la filosofía gala; aun cuando en un ensayo de 1827 "sobre la influencia de los signos en el razonamiento matemático" Babbage citara con aprobación el libro de Dégérando (1800) "sobre los signos y el arte de pensar", no se establecieron los lazos entre las matemáticas y la *logique* que uno ve en Condillac y en Lacroix, por ejemplo. Dos matemáticos ingleses tejieron en cambio nuevos hilos de conexión a mediados de siglo: De Morgan y Boole.

Al principio de su carrera, avanzada la década de 1820, De Morgan se sumó al debate que tenía lugar en Inglaterra acerca de la filosofía del álgebra, especialmente en torno a la legitimidad de los números negativos y de los complejos, y en torno al "Principio de las formas permanentes" de Peacock. Este principio aseguraba básicamente que cuando una fórmula estaba establecida bajo ciertas condiciones, seguía siendo interpretable aún si las condiciones se relajaban. El principio y las posturas con él relacionadas dieron al álgebra inglesa un carácter acusadamente formal, con mayor énfasis puesto en los símbolos que en las cantidades (véase Pycior, 1987). Venía a ser un punto de vista similar a la postura de algunos franceses mencionados después de (3.1).

Sin embargo, todavía tiene más que ver con nuestra historia el hecho de que De Morgan publicara como su (1836) un larga entrada sobre el "Cálculo de funciones" en la *Encyclopaedia metropolitana*. Fue la primera panorámica comprensiva de las ecuaciones funcionales que cubría los casos tanto de una como de varias variables independientes, amén de incluir algunas cuestiones asociadas de la teoría de funciones y del análisis matemático; y habría de representar en cierto modo una especie de losa sobre este campo temático, pues sólo conoció desde entonces una vida lánguida hasta bien avanzado el siglo XIX. Con todo, puede haber tenido cierta relación con sus contribuciones a la lógica, como ahora veremos.

La lógica había cobrado nuevo interés en Inglaterra durante la década de 1820, a partir de la publicación de otro artículo en la *Encyclopaedia metropolitana*: el de Whately (1823) sobre "Lógica". Al paso de los años, vinieron a aparecer varias ediciones aumentadas con la forma de libro, bajo el título *Elements of logic*, y fueron bien conocidas. Aunque no fuera más allá de la estructura de la tradición silogística, ponía un nuevo énfasis en recalcar que la lógica es una ciencia interesada en la validez y la invalidez de los argumentos (véase van Evra, 1984).

La primera publicación de De Morgan ya ejemplificaba este punto de vista; pues en su folleto (1839) sobre "Primeras nociones de lógica (preparatorias para el estudio de la geometría)" daba cuerpo a la silogística subyacente en el "Tratado de aritmética" de Euclides (p. 2). Pero sus contribuciones capitales sólo aparecen de mediados de la década de 1840 en adelante, al rondar los 40 años. Escribió un libro titulado *Formal logic* (1847), en el que virtualmente reproduce el folleto (1839) como capítulo 1; y, en especial, publicó una serie de artículos, bajo el título general "On the syllogism", en el curso de la década de los 1860 -sustancialmente recogidos en la edición De Morgan (1960). Cuando aparecieron sus escritos principales sobre lógica a mediados de la década de 1840 y durante algunos años después, De Morgan se vio envuelto en una polémica con el filósofo escocés Hamilton. Los puntos en discusión más salientes tenían que ver con la teoría de \forall y con cuestiones de prioridad en punto a- la "cuantificación del predicado", que contemplaba la admisión de la cuantificación universal y particular tanto para los predicados como para los sujetos y, por ende, la admisión de formas del tipo de "todo A es algún B". Las contribuciones de De Morgan a la lógica se distinguían por su atención a una teoría general de la cópula, habida cuenta en especial de las modificaciones inducidas por la serie de formas lógicas ahora admitidas. También recalcó de nuevo la distinción entre la materia y la forma de los argumentos lógicos, en el contexto de su teoría del silogismo; e introdujo la idea de un universo de discurso para los objetos que podían hallarse involucrados en una proposición.

Pero, por encima de todo, en su cuarto artículo De Morgan (1860) desarrolló la primera teoría general de la lógica de relaciones binarias. Conviene advertir que el aparato habilitado en este trabajo guarda semejanza con las ecuaciones funcionales, pues incluye la inversa L^{-1} de una relación, la "relación compuesta" LM de dos relaciones L y M , y otras nociones por el estilo. Aunque no cita su ensayo (1836) sobre ecuaciones funcionales, debe de haberse percatado de estas similitudes y puede que ellas le ayudaran.

En la polémica de De Morgan con Hamilton a mediados de la década de los 1840 concurrían otras cuestiones, además de la cuantificación del predicado, y una de ellas era la virtud (De Morgan) o lo contrario (Hamilton) inherente al uso de las matemáticas y de los símbolos en lógica. Todos los puntos suscitados desempeñaron un papel estimulante para mover a Boole a publicar por entonces sus propias ideas sobre lógica (véase Laita, 1979). Boole, al principio de su treintena, ya había publicado una serie de trabajos en matemáticas, en especial sobre el cálculo de operadores diferenciales. En un trabajo publicado por la Royal Society (1844), en particular, había buscado fundamentos de ese "método general de análisis" y había propuesto que los operadores π y ρ -no necesariamente D , pero también por ejemplo el operador de variación δ - tuvieran como propiedades básicas la conmutatividad, la distributividad y una "ley del índice". Aplicadas a funciones u y v , estas propiedades revestían la forma

$$\pi \rho u = \rho \pi u, \quad \pi(u + v) = \pi u + \pi v, \quad \pi^m \pi^n u = \pi^{m+n} u \quad (4.1),$$

donde m y n eran enteros positivos. Luego, en su pequeño libro *A mathematical analysis of logic* (Boole, 1947), propuso estas tres leyes como las leyes básicas que los símbolos "electivos" (o lógicos) u, v, x e y debían asumir:

$$xy = yx, \quad x(u + v) = xu + xv, \quad x^2 = x \quad (4.2);$$

en otras palabras, debían atenerse a las dos mismas leyes primeras y a una tercera ley diferente de su correlato en (4.1) pero denominada así mismo "ley del índice". De este modo más explícito trazó el paralelismo entre una teoría matemática y su propia lógica, amén de interpretar su cálculo en los términos de una teoría extensional de conjuntos e incluso de operadores (véase Hailperin, 1984).

En su epistemología, sin embargo, Boole dio a la matemática prioridad sobre la lógica en punto a que había de emplearse la matemática para analizar "las leyes del pensamiento", por citar el título de su libro posterior y de mayor empeño (1854). El título significa lo que dice: su teoría es una psicología matemática, una teoría normativa del obrar de la mente (véase Richards, 1980, para el contraste con Mill). La teoría viene expuesta en un contexto sumamente amplio con un fuerte trasfondo religioso donde, por ejemplo, el Universo booleano 1 cobra la imagen del ecumenismo cristiano (véase mi 1982).

5. Lógica algebraica y teoría de la probabilidad

Boole y De Morgan publicaron sus primeros libros sobre lógica el mismo día del año 1847. Las lógicas que desarrollaron con el curso del tiempo vinieron a ser completamente diferentes, siendo la de Boole la que contenía las innovaciones más radicales¹; aunque ambos mantuvieron una correspondencia cordial (sus cartas están publicadas en Smith, 1982), ninguno de ellos se atuvo a las ideas del otro. En todo caso, las dos teorías se movían en la misma área, ahora conocida como "lógica algebraica", donde las ecuaciones algebraicas -o algún equivalente suyo- constituían un foco de interés principal y la teoría de conjuntos asociada consistía en alguna teoría extensional de colecciones (según Hailperin, 1987, ch. 2, se requiere también una teoría multiconjuntista en el caso de Boole). De las dos lógicas, la de Boole causó un mayor impacto y fue adoptada por Jevons y por Venn, en particular, a través de quienes llegó a ser ampliamente conocida y hasta enseñada; pero Jevons modificó su estructura en algunos detalles técnicos y los dos se desembarazaron de los ingredientes psicológicos y religiosos².

Las lógicas de Boole y de De Morgan se emplearon en los notables desarrollos subsiguientes de la lógica algebraica que tuvieron lugar desde finales de la década de 1860 en adelante, de la mano del científico y filósofo americano C.S. Peirce -quien por entonces se hallaba a finales de su

veintena- y un poco después también con el concurso del matemático alemán Schröder -algo más joven que Peirce-, junto con un pequeño grupo de seguidores respectivamente de cada uno de ellos. Peirce publicó en revistas americanas sobre todo y dejó mucho material manuscrito³. Schröder produjo una vasta serie de *Vorlesungen über die Algebra der Logik* entre 1890 y 1905, una de cuyas partes apareció póstumamente; su *Nachlass* fue destruido durante la Segunda Guerra Mundial⁴.

Los dos adoptaron formas del álgebra booleana, con las interpretaciones adecuadas para el cálculo proposicional y para una teoría de colecciones; pero ambos enriquecieron la teoría con lógicas de relaciones. Tanto el uno como el otro reconocieron la importancia de la cuantificación leyendo las formas universal y existencial en términos de conjunciones y disyunciones infinitas respectivamente y empleándolas en combinación con sus lógicas de relaciones. Tomaron incluso los símbolos ' Σ ' y ' Π ' de la teoría de series infinitas. De modo que también acariciaron la posibilidad de unas lógicas infinitarias, si bien Peirce no dejó de observar que debía concederse a los cuantificadores un estatuto por derecho propio, en calidad de operadores que ligan variables (véase Dipert, 1984).

Por más que las lógicas de Peirce y de Schröder fueran marcadamente simbólicas y desempeñaran su papel en el desarrollo de las álgebras abstractas, ninguno de los dos explotó a fondo teorías matemáticas ni aplicó su lógica en detalle a una rama de las matemáticas. Sin embargo, se forjó un vínculo interesante entre la lógica algebraica y la teoría de probabilidades. Las conexiones entre la(s) lógica(s) y la teoría de probabilidades han sido poco estudiadas desde el punto de vista histórico⁵; aquí se harán unas pocas observaciones de orden general.

En Condorcet y Laplace se daba una conexión de carácter semiótico; tal como la *logique* recalca la importancia de los signos en el desarrollo de la *idéologie*, así los valores de probabilidad indicaban la fuerza o la debilidad de los signos de prueba con respecto a la estructura del mundo (físico o social) -o, en la interpretación subjetiva de la probabilidad, a nuestro grado de confianza en dicha estructura-. Conviene tomar nota de que los estudiantes de la *École Normale* en 1795, armados de la obligatoria copia de la *Logique* de Condillac, habían oído a Laplace referirse a cuestiones de probabilidad en la última de sus lecciones (Laplace, 1795, Lección 10), referencias que en la década de 1810 vendrían a hacer eclosión en su influyente *Essai philosophique sur les probabilités* (ediciones a partir de 1814).

Aparte de esta conexión específica, la lógica y la probabilidad se vieron correlacionadas por diversos medios filosóficos genéricos. Por ejemplo, había una "lógica" del razonamiento dentro de la teoría de la probabilidad, el curso de las probabilidades desde las de las premisas hasta la de la conclusión en una línea de razonamiento. Además, entre los que contaban con la inclinación filosófica oportuna, la lógica bivalente se consideraba como el ámbito de los dos casos límite,

verdadero y falso, de una interpretación de la probabilidad en términos de grados de creencia, de modo que podía complementarse una lógica de la deducción con una lógica de la inducción. Así, por ejemplo, De Morgan dio a su libro *Formal logic* el título alternativo de "the calculus of inference, necessary and probable", e incluyó tres capítulos sobre probabilidad, "inferencia probable" e inducción (1847, chs. 9-11).

En su *The laws of thought* de 1854 -donde una vez más se hacía mención de la probabilidad en el resto del título-, Boole reforzó el vínculo entre lógica y probabilidad mediante la simbolización de eventos -o, a través de una equivalencia más bien casual, de proposiciones que expresan eventos- como variables que sólo toman dos valores (el ocurrir o el no ocurrir) y así pueden prestarse a la aplicación de las técnicas de su lógica algebraica. También consideró los eventos compuestos como combinaciones booleanas de los simples. Por estos y otros medios, fue capaz de calcular las probabilidades (como cantidades ortodoxas) de la ocurrencia de eventos a partir de unas probabilidades dadas bajo unas determinadas condiciones, y de emplear unas técnicas pertinentes (Boole, 1854, especialmente ch. 17). Siguió con el asunto en trabajos posteriores (que están recopilados en la edición Boole, 1952) y sus ideas se vieron tanto adoptadas como criticadas por otros, incluido Peirce (véase Hailperin, 1987, parte 2).

Sin embargo, la recepción de estos resultados fue menos cálida que la dispensada a la propia lógica de Boole. Al principio de esta sección 5 ya se mencionaba la circunstancia de que sus seguidores, Jevons en especial, vendrían a descartar los elementos psicológicos de su lógica. Boole, por cierto, se sirvió de esta misma filosofía en su tratamiento de la probabilidad, pero esto resultó de todo punto inaceptable para Venn -entre otros-, defensor (calificado) de su lógica. En el prefacio de su influyente tratado (1866) sobre teoría de la probabilidad, Venn anunciaba que "la consideración material de la lógica por oposición a su consideración formal o conceptualista" contaba con su aprobación y que el "peculiar tratamiento" de Boole de la probabilidad se dejaría de lado. Así pues, en buena medida, vino a desatarse este lazo de unión entre matemáticas y lógica.

6. Cauchy y el rigor del análisis matemático

Durante las últimas décadas del s. XIX, comenzaron a desarrollarse conexiones entre lógica y matemáticas con el crecimiento de la lógica matemática. Sus orígenes se remontan una vez más a los matemáticos franceses coetáneos de Lagrange y, en especial, a las reacciones contra su tratamiento del cálculo.

El rigor para un autor es ingenuidad para otro. Donde Laplace esperaba que los procesos formales algebraicos suministraran los principales métodos de prueba para el cálculo, Cauchy vino a ver que ese planteamiento adolecía, entre otras cosas, de falta de la debida atención a la lógica de las condiciones necesarias y suficientes. Cauchy también mostró en el trabajo (1822) que la

creencia de Lagrange en la posibilidad de expandir cualquier función $f(x + y)$ en una serie de Taylor de expansión sobre la base x para todos los valores de x y b se resentía de contraejemplos como $\exp(-1/x^2)$ para $x = 0$.

Por entonces Cauchy se había adentrado en una reformulación del cálculo conforme a su propio estilo. Graduado en la *École Polytechnique* en la década de 1800, fue profesor de análisis y de mecánica allí mismo durante la restauración borbónica entre 1816 y 1830 y desarrolló sus novedosas ideas al hilo de la enseñanza. Tanto el personal de la *École* como los estudiantes detestaban su labor docente (véase mi 1981a), pero gradualmente, con el curso de los años, fue granjeándose simpatías en Francia y en el extranjero.

Las características principales y más pertinentes del planteamiento de Cauchy se dejan resumir como sigue⁶. En vez de reproducir el abanico de las formulaciones disponibles en el cálculo -planteamiento adoptado, por ejemplo, por Lacroix al estilo *encyclopédiste*-, se atuvo a un solo método. Consistía en un tratamiento basado en una doctrina sofisticada de límites -que ya habían sido usados por otros, aunque de forma tosca-; por este medio se introducían no sólo el cálculo sino la teoría de funciones y la convergencia de series en el seno de una disciplina que ahora llamamos "análisis matemático". En esta teoría, se sentaban definiciones comprensivas de nociones básicas como la de la continuidad de una función o la del valor límite mismo; y los teoremas se probaban por una vía deductiva que contrastaba con la inducción matemática desplegada por Lagrange y sus seguidores, estableciendo las condiciones necesarias y/o suficientes del modo más claro posible al tiempo que se examinaba la posibilidad de hacerlas más fuertes o más débiles. (La lógica de las condiciones necesarias y/o suficientes alcanzó así un nuevo nivel de relevancia.) Como ejemplo de singular importancia, la derivada y la integral indefinida tenían definiciones *independientes* entre sí -en vez de considerarse *automáticamente* que ésta última era la conversa de la noción básica en la versión del cálculo diferencial asumida. De este modo, por vez primera, el "teorema fundamental" llegó a ser un teorema, con las condiciones suficientes sobre la función requeridas para que su verdad quedara demostrada. No sólo había que evitar las inducciones algebraicas; también se prescindía de las intuiciones del pensamiento geométrico por estimarse poco fiables -punto este en el que Cauchy y Lagrange estaban de acuerdo-

Cauchy publicó varios libros de texto y artículos sobre estos temas -así como sobre su desarrollo concurrente del análisis de variable compleja, que aquí dejo aparte-; los dos más importantes fueron su *Cours d'analyse* (1821) y un *Résumé* (1823) de su enseñanza del cálculo en la *École Polytechnique*. Sus sucesores allí siguieron el mismo planteamiento -a pesar de las críticas suscitadas durante su reinado- y el análisis matemático devino una importante dedicación de la matemática francesa. Como consecuencia, declinó en Francia el interés post-lagrangiano por

las álgebras -el propio Cauchy (1827) había establecido muchos de los resultados en la integral de variable compleja de Fourier-. De modo que la vinculación entre la *logique* y la matemática se debilitó considerablemente.

Las ideas de Cauchy también se fueron difundiendo gradualmente por el extranjero con la publicación de traducciones de varios de sus libros de texto, especialmente al alemán. Sin embargo, como se ha sugerido antes, el proceso no fue rápido y ni siquiera la adopción de sus teorías resultó necesariamente cabal y completa. De Morgan es un buen ejemplo. En su manual (1835) sobre álgebra, proponía la definición de la continuidad de una función en términos -en realidad- de la existencia de un incremento δ sobre $f(x)$ para cualquier incremento ϵ sobre x -aunque Cauchy hubiera introducido estos dos símbolos griegos en el análisis matemático, había definido la continuidad en términos de pequeños cambios sucesivos de x y de $f(x)$ en común-. Así mismo, en su manual sobre el cálculo De Morgan concedía a los límites su anterior relieve, definía la derivada de una función como la noción básica del cálculo diferencial y daba una versión simplificada de la definición de Cauchy de la integral como el valor límite -si existiera- de una secuencia de sumas de particiones (De Morgan 1842: 8-11, 48, 97-99); tampoco dejaban de asomar por allí otras partes de la teoría de Cauchy.

Pero De Morgan no concedía a Cauchy una especial preeminencia por doquier -empleaba incluso la denominación euleriana "coeficiente diferencial" para la derivada- y en otros lugares seguía sus preferencias algebraicas. Por ejemplo, en su presentación de los operadores diferenciales y de las ecuaciones funcionales seguía en general a Lagrange, Arbogast, Babbage y Herschel (pp. 303-340), antes que la fundamentación de Cauchy de estas teorías en las integrales de variable compleja de Fourier. Parejamente, incluía un corto capítulo "sobre la transformación de desarrollos divergentes" (pp. 560-566), asunto sobre el que había escrito prolijamente en otro lugar pero que a Cauchy le habría parecido un tema patológico.

7. Weierstrass, Peano y la lógica matemática

La adopción generalizada de la nueva tradición de Cauchy se aceleró considerablemente desde la década de 1980 en adelante, cuando la estrella de Alemania ascendió en el universo matemático y Weierstrass, en particular, atraía a los jóvenes (y a una joven) del mundo a sus lecciones en Berlín. El desarrollo ulterior del rigor en el análisis matemático fue una de sus principales preocupaciones y tanto él como sus seguidores introdujeron diversas mejoras (véase mi 1970, cap. 6; o Dugac, 1973). Refinaron la teoría de límites, por ejemplo al distinguir el límite superior de la cota superior mínima, y propusieron definiciones de los números irracionales con el fin de evitarse problemas de petición de principio en torno a la existencia de límites. Crearon en buena parte la topología conjuntista de la línea y el plano, especialmente explotando la relación entre un conjunto y su

conjunto derivado; Cantor fue aquí la figura principal y consideró expresamente su *Mengenlehre* como una extensión del análisis matemático. Depuraron en alto grado las técnicas del análisis multivariado con distinciones entre modos de convergencia uniformes, cuasiuniformes y no uniformes. Por último y en buena medida bajo la presión inducida por la demanda de tales refinamientos, extendieron considerablemente el uso del simbolismo en el análisis, en orden a formular con claridad las diversas distinciones.

De estas contribuciones, la última es la que guarda una relación más directa con el nacimiento de la lógica matemática, pues Peano vio la necesidad de dar a este lenguaje simbólico un carácter completamente formal. Él es el vínculo entre el análisis matemático y la lógica matemática (véase mi 1986b); en varios libros y artículos vertió diversas partes de las matemáticas en forma simbólica mientras reducía deliberadamente al mínimo la proporción de prosa en sus páginas. Peano y sus seguidores de Turín hicieron una contribución capital a los estudios de fundamentos de matemáticas, no sólo por lo toca al análisis sino con respecto a la geometría.

Por añadidura, la *Mengenlehre* de Cantor alcanzó a tener mucho que ver con la lógica matemática⁷, a través no sólo de su vertiente topológica sino de la teoría más general en la que los números se definían como abstracciones de conjuntos, se inventaba la aritmética transfinita, se consideraban de nuevo las definiciones de continuidad y de infinito así como relaciones entre los números cardinales y ordinales, amén de otras contribuciones por el estilo (véase Dauben, 1979). Las cuestiones de este género no sólo atraían a los lógicos matemáticos -Peirce y Schröder, en particular, también escribieron sobre ellas-, sino que llegaron a constituir un lugar *central* para la lógica matemática, donde se desplegaban todas las técnicas de la teoría de conjuntos, con la distinción entre pertenencia e inclusión, el estatuto del conjunto vacío, las relaciones entre la teoría de conjuntos y el cálculo de predicados, y demás. Incluso se forjó otro vínculo general con las matemáticas en el que Peano también desempeñó un papel importante, a saber: el despegue de la axiomática, que llegó a ser toda una moda durante la última parte del siglo XIX, y no sólo en la lógica matemática sino también en las geometrías euclidiana y no euclidiana, así como en diversas álgebras abstractas (véase Cavaillès, 1937, caps. 1 y 2). Estos desarrollos y otros conexos revelaron así mismo ciertas primicias de la teoría de modelos, en especial esa propiedad de un sistema axiomático que hoy denominamos "categoricidad" (véase Corcoran, 1980).

8. Russell y el rompecabezas de su logicismo

La lógica matemática recibió su más importante estímulo durante la década de 1900 de los esfuerzos conjuntos de Whitehead y Russell. En 1900 Russell, avanzada su veintena, descubrió la obra de Peano y vio un medio de basar "toda" la matemática en la lógica matemática que Peano

había fundado en parte. Las líneas generales de esta historia son harto conocidas de modo que aquí sólo será preciso hacer una breve selección de puntos⁸.

Cayendo en la cuenta de que Peano había desarrollado unos pocos fragmentos de la lógica matemática de relaciones, Russell escribió rápidamente dos artículos fundamentales sobre este tema y así se convirtió en el cuarto fundador de la (de una) lógica de relaciones tras De Morgan, Peirce y Schröder. También leyó las obras de Frege y vio que una porción sustancial de su tesis logicista ya había sido anticipada. (Sin embargo, el logicismo de Frege sólo reclamaba para sí ciertas partes de las matemáticas y su lógica tenía un carácter diferente de la de Russell: Russell mismo, en sus propios escritos sobre Frege, reparó en lo primero pero no en lo segundo⁹.) Todo iba como una seda; pero en 1901 se topó con su paradoja de la teoría de conjuntos y empezó a reunir otras¹⁰, de modo que su estructura logicista se vio en la necesidad de una revisión general. Después de adelantar en líneas generales su posición en *The principles of mathematics* (1903) y de ensayar una serie de teorías, se decide por una teoría de los tipos que él y Whitehead diseñan parcialmente en los tres volúmenes de *Principia mathematica*, publicados en 1910, 1912 y 1913.

¿Qué matemática era la que de hecho abarcaba este programa? En principio, "toda"; en la práctica, increíblemente poca. Se daba una versión detallada de la aritmética finita y transfinita -vaciados los ordinales en una bella generalización de invención de Russell llamada "aritmética de relación"-, y de los números racionales y reales. Además se planteaba con claridad y se exploraba al hilo de estos estudios el uso del axioma de elección; este punto reviste una importancia mayor que la que pudiera parecer, porque el axioma no sale a la luz sino en el curso de la década de 1900 y Russell es de hecho un relevante pionero al analizar sus diversas formas y los lugares (lógico-)matemáticos en que parecía ser necesario (véase Cassinet y Guillemot, 1983; también Moore, 1982).

Ahora bien, al margen de estos temas, la presentación de las matemáticas en *Principia mathematica* resultaba mucho más precaria. Uno se encuentra con algunas porciones de topología conjuntista y con una teoría de las magnitudes con especificación de signo. Pero falta todo lo demás. ¿Por qué?

Parte de la razón consiste en que Whitehead había proyectado un cuarto volumen sobre geometría, pero lo dejó a un lado tiempo después, tras haber escrito algunas partes. Esto explica el carácter un tanto disperso del final del tercer volumen, donde se presentaba material preparatorio para la geometría. Pero esta puntualización no da en absoluto una respuesta cabal a la pregunta: sabemos que Whitehead había planeado cuatro secciones sobre geometría proyectiva, descriptiva y métrica, y sobre la "construcción del espacio" (véase mi 1975b, p. 100), mientras que todo lo demás quedaba fuera. Por ejemplo, la geometría diferencial no se hallaba incluida pues no se hacía

ningún tipo de mención del cálculo diferencial e integral -y así, por descontado, se pasaban por alto las aplicaciones a la mecánica y a la física matemática. Parejamente, tampoco merecían consideración las álgebras abstractas, que mantenían un vivo desarrollo en la década de 1900; ni las probabilidades ni la estadística, algunas de cuyas cuestiones habían interesado a los lógicos matemáticos. Según todos los visos, al dar remate a *Principia mathematica*, ¡Whitehead y Russell no habían pasado revista siquiera a las -respetables- porciones de matemáticas tratadas en sus respectivas obras previas, *Universal algebra* de Whitehead (1989) y *The principles of mathematics* de Russell (1903)!

La cuestión se torna todavía más significativa en atención al hecho de que para Russell -aun si no para Whitehead¹¹ -el logicismo estribaba en la tesis de que lógica matemática abarcaba la matemática pura, consistiendo la matemática pura en la colección de las proposiciones con forma implicativa ' $p \rightarrow q$ '. Esta concepción conlleva el peligro de caer en la trivialidad -póngase todo cuanto se precise dentro de las p para que se sigan las q matemáticas-, y la decisión de Russell de seguir a Peano antes que a Frege significaba la ausencia de las principales distinciones entre teoría y metateoría, de modo que ciertas cuestiones fundamentales como la presente, *acerca de la teoría trazada en Principia mathematica*, no se dejaban plantear debidamente. El logicismo era en definitiva incoherente: ni la lógica ni la matemática estaban perfiladas con nitidez.

9. Lógica y/o matemáticas

Ha llegado el momento de sacar algunas conclusiones generales y *Principia mathematica* puede servir de punto de partida. Como la de Russell no era una causa probada, se quedaron sin establecer las relaciones epistemológicas entre las matemáticas y la lógica. Boole, en un extremo, había empleado la matemática para analizar (su forma de) la lógica; en el otro extremo, Russell alegaba que sólo (su forma de) la lógica era necesaria para analizar la matemática. Otras figuras representativas veían ambas disciplinas como si se solaparan de algún modo que no resultaba claro; la *Mengenlehre* cantoriana también era por cierto un factor significativo, pero su posición no tenía un emplazamiento terminante.

A pesar de esta indefinición, son muchas las vinculaciones fructíferas que se han explorado. La figura I resume de modo esquemático la historia aquí trazada, muestra que la conexión entre lógica y matemáticas ha sido de hecho más rica que lo que generalmente se reconoce. En particular, el eclipse de la lógica algebraica por la lógica matemática¹² ha relegado un tanto al olvido los vínculos forjados por la lógica algebraica con ciertas álgebras y con la teoría de probabilidades. Por añadidura, el vaciado finitario de la lógica matemática retrasó largamente hasta la década de 1940 el desarrollo de la lógica infinitaria, en la que Peirce y Schröder habían reparado al interpretar los cuantificadores. Ahí estaba además el uso de la axiomática compartido por algunas de estas lógicas y por ciertas

ramas de las matemáticas. Con todo, los contactos entre lógicas y matemáticas no han pasado de ser más bien discretos. De las figuras principales tratadas en este artículo, solamente Boole, De Morgan, Peano y Whitehead muestran un margen *sustancial* de solapamiento en la interacción entre su lógica y su matemática -ninguna de las cuales se deja identificar, por cierto, con la teoría de conjuntos o con la axiomática. No cabe contar a Russell entre ellos: cualquiera que fuese la estrategia seguida -si siguió alguna- en el diseño de su obra, una consecuencia de la escasez de matemáticas en sus copiosas páginas fue el hecho de que muy pocos matemáticos se tomaran algún interés en ella¹³. Así pues, la lógica todavía llevaba una vida más bien aparte de las matemáticas, aunque una de sus ramas era ahora «matemática» y una tradición dentro de esta rama vindicaba la matemática como su nido propio¹⁴.

La situación se ha mantenido hasta nuestro días, en buena medida a causa de la (falta de) recepción de *Principia mathematica*. Los lógicos, sean de filiación logicista o -como es mucho más probable- no lo sean, se encuentran hoy con mayor frecuencia en los departamentos de filosofía o de computación que en los de matemáticas. Los franceses, en concreto, se han alejado tanto de la cohabitación de la *logique* con el álgebra que hasta los años 1970, prolongando la línea general de los ataques de Poincaré al logicismo, la camarilla Bourbaki ha desterrado en gran parte la lógica de la instrucción en, y del seguimiento de, las matemáticas en su país. (Para colmo y a pesar de los pesares, ilos bourbakistas defienden un tratamiento "riguroso" de las matemáticas!) Hay, así mismo, hoy en día una industria internacional denominada "filosofía de la matemática"; pero se ocupa casi exclusivamente de lógicas y de teorías de conjuntos, y da casi por completo de lado el mundo real de las matemáticas.

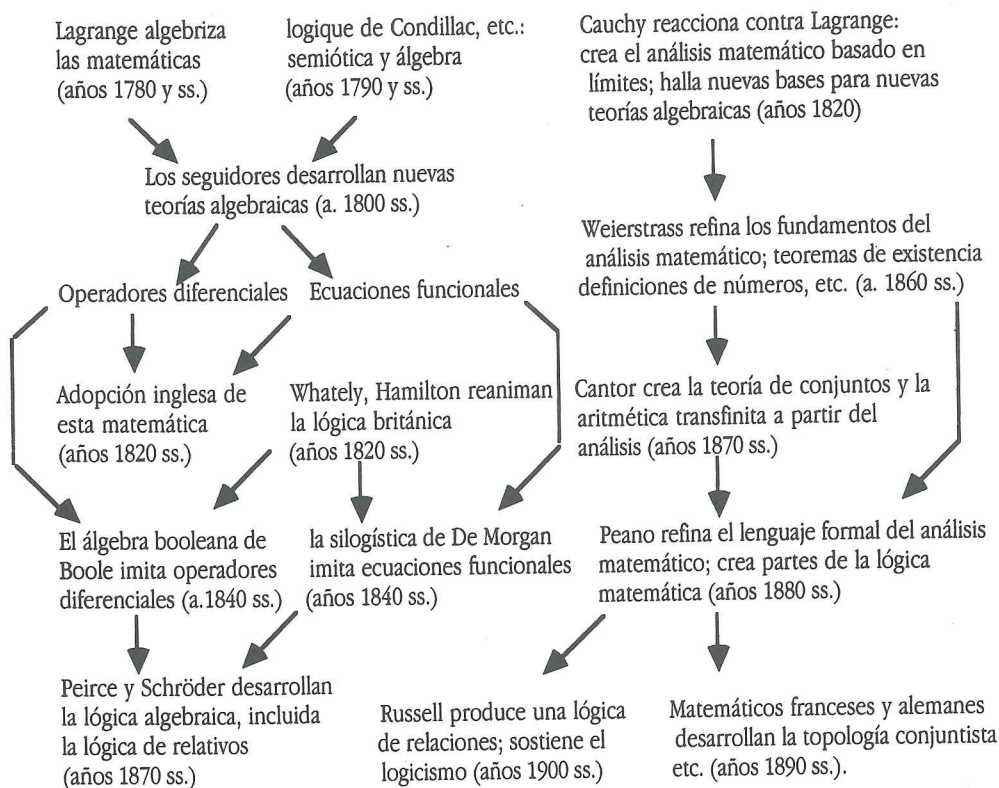
Será interesante observar dentro de una o dos generaciones si la creciente importancia de las ciencias de la computación cambiará la situación de forma sustancial, actuando como un agente matrimonial entre ambas colegas -al tiempo que, de paso, hace a los científicos de la computación más sensibles a los lógicos de lo que lo son ahora. Mientras tanto, las dos comunidades de los lógicos y los matemáticos viven en buena parte sus vidas por separado; y de este modo cada una de ellas sale perdiendo por falta de iluminación mutua. La historia se ha seguido repitiendo a sí misma.

Reconocimientos

Agradezco los comentarios de varias personas, en especial J. Corcoran, T. Hailperin, N. Houser y un árbitro anónimo.

Figura I

Conexiones entre lógicas y matemáticas,
entre los años 1780 y 1914.



Esta división entre las tradiciones algebraica y matemática se refiere en buena medida a los usos de partes de las matemáticas y a las versiones del cálculo de predicados; en otros sectores de la lógica no dejó de haber bastante terreno común.

Fechas correspondientes a las principales figuras citadas en el artículo:

Boole, G. (1815-1854)
 Cauchy, A.L. (1789-1857)
 Condillac, E. Bounot, abbé de (1714-1780)
 Condorcet, M.J.A.N. Caritat, Marquis de (1743-1794)
 De Morgan, A. (1806-1871)
 Jevons, S. (1835-1882)

Lagrange, J.L. (1736-1813)
 Peano, G. (1858-1932)
 Peirce, C.S. (1839-1914)
 Russell, B.A.W., Lord (1872-1970)
 Schröder, F.W.K.E. (1841-1902)
 Venn, J. (1834-1923)

Notas

- 1 La lógica de Boole influyó incluso en química, pues el químico inglés Brodie intentó reproducir -sin éxito- un cálculo similar en la década de 1860 (véase Brock, 1967). Se da un paralelismo curioso (aun si no estrecho) con la *logique* de Condillac, que desempeñó un importante papel en los esfuerzos de Lavoisier por mejorar la nomenclatura de la química ya muy avanzado el s. XVIII (véase Albury, 1986).
- 2 Las controversias entre los lógicos y filósofos británicos llegaron a ser por entonces bastante agudas y los puntos en discusión incluyeron la competencia entre las formas implicativa y ecuacional en lógica. No es infrecuente que la literatura se encuentre en fuentes inesperadas u oscuras, como *Nature*, *The educational times* y *The Athenaeum*. A falta de literatura secundaria satisfactoria, la *Pure logic* de Jevons (1864) y la *Symbolic logic* de Venn (1881) pueden servir de fuentes de información tanto por mor de su participación como en atención a sus comentarios. Véase también la nota 12, más abajo.
- 3 La fuente más importante para Peirce es la selectiva edición en curso de sus escritos *Chronological edition* (Indiana U.P.), donde se adjunta una generosa proporción de sus manuscritos lógicos a sus publicaciones. Los sedicentes *Collected papers* de la década de los 1930 (Harvard U.P.) son una abominación desde el punto de vista académico, incluso habida cuenta del rescate parcial alcanzado por los dos volúmenes adicionales publicados a finales de los 50. Varios autores han glosado los desarrollos de su lógica: Michael (1974) explora sus primeras ideas sobre relaciones -que parecen habersele ocurrido con independencia de De Morgan-, mientras que Brink (1978, ch. 4) recalca las diferencias entre su lógica de "relativos" y la lógica de "relaciones" de Schröder. Se echa en falta un estudio de la interacción entre su lógica y su matemática.
También es digno de mención el hecho de que Peirce reavivara las conexiones entre lógica y semiótica, que habían quedado más bien dormidas después de la *logique* de Condillac, mediante la aplicación de su teoría de las relaciones a una teoría general de los signos. En este sentido, fue un pionero de algunas tendencias modernas en semiótica (véase Zellweger, 1982). Con todo, sus otras actividades científicas y matemáticas no parecen haber ejercido una gran influencia sobre su trabajo en lógica.
- 4 V. Peckhaus (Universidad de Erlangen) sigue estudiando actualmente a Schröder y su influencia -con investigación de archivos incluida, véase Peckhaus (1990). Por el momento, Dipert (1980) proporciona una útil introducción. Ibragimoff (1978) describe la relación de su obra con el desarrollo de grupoides (conjuntos de elementos con una conectiva \bullet tal que si $a \bullet b = c$, entonces dos elementos cualesquiera del trío identifican unívocamente el tercero). Mehrtens (1979, ch. 1) la sitúa en el contexto de origen de la teoría de redes.
- 5 El rastreo a través de diversas historias de la lógica y del cálculo de probabilidades arroja un escaso reconocimiento de las conexiones entre ambas disciplinas. Por fortuna, este asunto no ha dejado de atraer la atención de T. Hailperin (Universidad de Lehigh); véase Hailperin (1988).
- 6 Véanse mi (1970) y Grabiner (1981) para las interpretaciones de la obra de Cauchy. Mi (1980a) depara un amplio marco histórico (desde Leibniz hasta Lebesgue), mientras que Bottazzini (1986) da cuenta también del desarrollo concurrente del análisis de variables complejas por parte de Cauchy.
- 7 Es digno de atención el hecho de que la expresión «mathematical logic» se deba a De Morgan, en el tercero de sus artículos sobre el silogismo, en 1858 (véase 1960, p. 78). Él, empero, estaba pensando en las lógicas simbólicas que guardan una conexión genérica con las matemáticas, no en las versiones ulteriores aquí descritas. En el curso de su desarrollo, el uso de la expresión fue variopinto, envuelto en vagas sinonimias con "symbolic logic", "new logic" y otras denominaciones por el estilo. En este artículo empleo la expresión "lógica matemática" en su sentido moderno.

- 8 Pero esto no equivale a negar que haya todavía mucho que aprender acerca de las contribuciones de Russell a la lógica. La masa de manuscritos lógicos de su Nachlass en la Universidad de Mac Master, Hamilton, Canadá, es importante y deberá ir apareciendo ahora en la edición de sus *Collected Papers* (Routledge). Hay un panorama de las conexiones entre su logicismo y su desarrollo de las matemáticas en mi (1977); sobre las influencias positivas y negativas ejercidas sobre él por Cantor, véase mi (1980b). Entre la literatura creciente en torno a su concepción de la lógica, véanse especialmente Vuillemin (1968) y Griffin (1980).
- 9 Límite a esta nota algunas observaciones curiosas sobre Frege. Aunque había adoptado una versión del logicismo antes de Russell y se había ganado cierto reconocimiento por parte de unos pocos matemáticos y filósofos entre los últimos años de la década de 1880 y los primeros de la década de 1900, cayó luego en el olvido (sospecho que debido, en parte, a verse eclipsado por Russell), y resulta difícil determinar el alcance de su influjo por aquella época. Una apreciación similar debe hacerse de Bolzano. Investigando en diversas áreas del análisis matemático, en formas de la teoría de conjuntos y en lógica, antes de y al mediar el siglo XIX, sólo alcanzó a tener cierta circulación en las últimas décadas y aun entonces ejerció poca influencia directa. Hoy cuenta con un círculo internacional de admiradores: algunos de ellos trabajan en la *Gesamtausgabe* en curso (Frommann).
- 10 Este punto tiene que ver con nuestra historia mucho más de lo que pudiera saltar a la vista; pues antes de su conversión a la lógica matemática de Peano y a una filosofía realista, Russell era un adepto típico de la filosofía neohegeliana inglesa, en cuyo marco la búsqueda de paradojas teóricas venía a ser una actividad de importancia, condicionamiento que le había puesto en una buena predisposición antes de 1900. Dicho de otro modo, por más que abandonara la epistemología y la ontología neohegelianas, Russell retenía este aspecto de su metodología. Mi (1986a) explora las diferencias entre su logicismo y las concepciones de la lógica (neo)hegelianas y otras en circulación por entonces, así como el *largo tiempo* que se tomó su declive hasta resultar sustancial.
- A lo que se me alcanza, las filosofías kantiana y hegeliana no tuvieron durante el s. XIX una incidencia significativa sobre el cultivo de las matemáticas. No obstante, dejaron su impronta en algunos tratamientos de la aritmética y de la geometría (véase Voss, 1914, para algunas indicaciones de utilidad en relación con su fecha sobre este y otros varios puntos planteados en el presente artículo).
- 11 Para Russell el logicismo era la meta; para Whitehead era un paso esencial hacia una visión más amplia de las matemáticas que había empezado a desarrollar en conexión con la lógica algebraica -una de las álgebras de su (1898) mal llamada *Universal algebra*. Como muestra de estas diferencias, cuando ambos solicitaron a la Royal Society una subvención para sufragar los gastos de impresión de *Principia mathematica*, Russell adjetivó tres veces las referencias expresas de Whitehead a las "matemáticas" con el calificativo "puras" (véase mi 1975b, pp. 95-98). Sobre la posición de Whitehead, véase Lowe (1975).
- 12 Por lo que concierne a la literatura que compara la lógica algebraica y la matemática, así como sus historias, véanse especialmente Jourdain (1910-1913), que contiene artículos sobre Boole, MacColl y Jevons, de una parte, y sobre Frege y Peano de la otra; Jørgensen (1931), que distingue entre el «álgebra de la lógica» y la «lógica»; mi (1975a), sobre la tesis doctoral inédita de Wiener de 1913 acerca de las lógicas de relaciones de Schröder y de Russell; Couturat (1983), una colección de ensayos sobre la obra de Couturat, que escribió sobre la lógica algebraica y la matemática; Putnam 1982, sobre algunos eslabones desde Peirce hasta Russell. Prior (1955) trata a la manera de un manual las lógicas matemática y tradicional, con notas históricas anexas.

Por entre la lógica algebraica y la matemática se mueve en cierto modo Husserl, que se tomó un serio interés en las consecuencias de su teoría para algunas áreas de las matemáticas. Rosado Haddock (1973) ha explorado algo este terreno; hay más trabajo en curso, en parte al hilo de la edición de las *Gesammelte Werke* de Husserl (en Martinus Nijhoff).

- 13 Durante estos años estaban dando sus primeros pasos otras tres iniciativas que habían de tener profundas implicaciones para los fundamentos de matemáticas y, parejamente, para la lógica: la metamatemática de Hilbert; la axiomatización de la teoría de conjuntos de Cantor por parte de Zermelo; la teoría de conjuntos y la lógica intuicionistas de Brouwer (véase Cavaillès 1937; algunos de los textos principales están recogidos en inglés en van Heijenoort, 1967). Sin embargo, sus desarrollos principales sólo comenzaron después de la Primera Guerra Mundial; las propuestas de Hilbert y de Brouwer se habían gestado inicialmente en términos bastante oscuros. Para una visión panorámica de estos y otros desarrollos entre las dos guerras mundiales, juntos con una extensa bibliografía de literatura secundaria, véase mi (1981b).
- 14 Otro ejemplo notable de las escisiones que tienen lugar en el periodo de entreguerras es el proporcionado por Polonia. Recién establecida como nación en torno a 1920, produjo importantes escuelas de lógica y de matemáticas -ésta última, además, muy interesada en la topología conjuntista. Pronto empezó a publicarse una revista, con el título *Fundamenta Mathematicae*, a la formación de cuyo consejo editorial contribuyeron miembros de ambas escuelas. Pero en seguida dominaron el cotarro los matemáticos y apareció el tipo habitual de división. Ha continuado hasta hoy.

BIBLIOGRAFIA

- Albury, W.R.: 1986, 'The order of ideas: Condillac's method of analysis as a political instrument in the French Revolution', in J.A. Schuster & R.R. Reo (eds.): *The politics and rhetoric of scientific method*, Dordrecht, pp. 203-225. Véase también Condillac, 1780.
- Arbogast, L.F.A.: 1800, *Du calcul des dérivations*, Strasbourg.
- Babbage, C.: 1827, 'On the influence of signs in mathematical reasoning', *Trans. Cambridge Phil. Soc.* 2, 325-378.
- Boole, G.: 1844, 'On a general method in analysis', *Phil. trans. Royal Soc. London* 134, 225-284.
- Boole, G.: 1847. *The mathematical analysis of logic, being a essay towards a calculus of deductive reasoning*. Cambridge. [Reimpreso en 1952, pp. 49-124, con adiciones.]
- Boole, G.: 1854, *An investigation of the laws of thought, on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities*. Cambridge/London. [Varias reimpresiones.]
- Boole, G.: 1952, *Studies in logic and probability*, London, Edic. de R. Rhees.
- Boole, G.: 1997, *Selected manuscripts on logic and its philosophy*. Basel, Edic. de I. Grattan-Guinness y G. Bornet. Véase también Smith, 1982.
- Borga, M., Freguglia, P., Palladino, D.: 1985, *I contributi fondazionali della scuola di Peano*. Milano.
- Bottazzini, U.: 1986, *The higher calculus: A history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass*, Berlin.
- Brink, C.H.: 1978, *The algebra of relations*, Cambridge University Ph.D.

- Brock, W.H. (ed.): 1967, *The atomic debates...*, Leicester.
- Cassinet, J. & Guillemot, M.: 1983, *L'axiome du choix dans les mathématiques de Cauchy (1821) à Gödel (1940)*, 2 vols., Université Sabatier, Toulouse, *doct. d'état*.
- Cauchy, A.L.: 1882-1974, *Works. Oeuvres complètes*, Paris, Edic. Académie des Sciences, 12 + 15 vols.
- Cauchy, A.L.: 1821, *Cours d'analyse...*, Paris. [Reimpreso en *Works*, ser. 2, vol. 3.]
- Cauchy, A.L.: 1822, 'Sur le développement des fonctions en série...', *Bull. sci. Soc. Philom. Paris*, 49-54. [Reimp. en *Works*, ser. 2, vol. 2, pp. 276-282.]
- Cauchy, A.L.: 1823, *Resumé des leçons données à l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal*, Paris. [Reimp. en *Works*, ser. 2, vol. 4, pp. 5-26.]
- Cauchy, A.L.: 1827, 'Sur l'analogie des puissances et des différences', *Exer. de math.*, vol. 2, pp. 159-209. [Reimp. en *Works*, ser. 2, vol. 7, pp. 198-254.]
- Cavaillès, J.: 1937, *Méthode axiomatique et formalisme*, Université de Paris, *doct. d'état*. [Reimp. en tres partes, 1938, Paris.]
- Condillac, abbé de: 1780, *La logique*. Paris. [Reimp. con notas y traducción inglesa de W.R. Albury, 1980, New York.]
- Condillac, abbé de: 1798, *La langue des calculs*, Paris. [Reimp. con introducción y notas de S. Auroux y A.M. Chouillet, 1981, Lille.]
- Corcoran, L.: 1980, 'Categoricity', *Hist. Phil. Logic* 1, 187-207. [Véanse también las pp. 231-234.]
- Couturat, L.: 1983, *L'Oeuvre de Louis Couturat (1868-1914)... de Leibniz à Russell...* [sic], Paris.
- Dahan, A.: 1986, 'Une texte inédite de philosophie mathématique de Gergonne...', *Rev. d'hist. sci.* 39, 98-126.
- Dauben, J.W.: 1979, *Georg Cantor...*, Cambridge (Mass.).
- Dégérando, J.M. de: 1800, *Des signes et de l'art de penser*, Paris. 4 vols.
- De Morgan, A.: 1835, *The elements of algebra...*, London.
- De Morgan, A.: 1836, 'Calculus of functions', *Encyc. metrop.*, vol. 2, pp. 305-392. [Fechado por la separata; el volumen lleva la fecha '1845' del año de su terminación.]
- De Morgan, A.: 1839, *First notions of logic (preparatory to the study of geometry)*, London. [Reimp. en 1840.]
- De Morgan, A.: 1842, *The differential and integral calculus*, London. [Fecha de su terminación; publicado como serie desde 1836.]
- De Morgan, A.: 1847, *Formal logic; or, the calculus of inference, necessary and probable*, London. [Reimp. con notas de A.E. Taylor, 1926, London.]

- De Morgan, A.: 1860, 'On the syllogism, IV, and on the logic of relations', *Trans. Cambridge Phil. Soc.* 10, 331-358. [Reimp. en 1960, pp. 208-246.]
- De Morgan, A.: 1960, *On the syllogism, and other logical writings*, London, Edic. de P. Heath. Véase también Smith, 1982.
- Dhombres, J.: 1986, 'Quelques aspects de l'histoire des équations fonctionnelles liés à l'évolution du concept de fonction', *Arch. hist. exact sci.* 36, 91-181.
- Dickstein, S.: 1899, 'Zur Geschichte der Prinzipien der Infinitesimalrechnung. Die Kritiker der «Théorie des fonctions analytiques» de Lagrange', *Abh. Gesch. Math.* 9, 65-79.
- Dipert, R.R.: 1980, 'Ein Karlsruher Pionier der Logik. Ernst Schröders Beitrag zur Logik und den Grundlagen der Mathematik', *Fridericiana* (Karlsruhe), n° 27, pp. 23-44.
- Dipert, R.R.: 1984, 'Peirce, Frege, the logic of relations, and Church's theorem', *Hist. Phil. Logic* 5, 49-66.
- Dubbey, J.: 1978. *The mathematical work of Charles Babbage*. Cambridge.
- Dugac, P.: 1973, 'Éléments d'analyse de Karl Weierstrass', *Arch. hist. exact sci.* 10, 41-176.
- Garcíadiago, A.R.: 1992, *Bertrams Russell and the origins of the set-theoretic 'paradoxes'*, Basel.
- Gergonne, J.D.: 1817, 'Essai de dialectique rationnelle', *Ann. math. pures appl.* 7, 189-228.
- Gergonne, J.D.: 1818, 'Essai sur la théorie des définitions', *Ann. math. pures appl.* 9, 1-35.
- Grabiner, J.V.: 1981, *The origins of Cauchy's rigorous calculus*, Cambridge (Mass.).
- Granger, G.G.: 1954, 'Langue universelle et formalisation des sciences. Un fragment inédit de Condorcet', *Rev. hist. sci.* 7, 179-219.
- Grattan-Guinness, I.: 1970, *The development of the foundations of mathematical analysis from Euler to Riemann*, Cambridge (Mass.).
- Grattan-Guinness, I.: 1975a, 'Wiener on the logics of Russell and Schröder...', *Ann. sci.* 32, 103-132.
- Grattan-Guinness, I.: 1975b, 'The Royal Society's financial support of the publication of Whitehead and Russell's *Principia mathematica*', *Notes rec. Royal Soc. London* 30, 89-104.
- Grattan-Guinness, I.: 1977, *Dear Russell - Dear Jourdain...*, London/New York.
- Grattan-Guinness, I.: 1979, 'Babbage's mathematics in its time', *Brit. J. Hist. Sci.* 12, 82-88.
- Grattan-Guinness, I. (ed.): 1980a, *From the calculus to set theory, 1630-1910. An introductory history*, London.
- Grattan-Guinness, I.: 1980b, 'Georg Cantor's influence on Bertrand Russell', *Hist. Phil. Logic* 1, 61-93.
- Grattan-Guinness, I.: 1981a, 'Recent researches in French mathematical physics of the early 19th century', *Ann. Sci.* 37, 663-690.

- Grattan-Guinness, I.: 1981b, 'On the development of logics between the two world wars', *Amer. Math. Monthly* 88, 495-509.
- Grattan-Guinness, I.: 1982, 'Psychology in the foundations of logic and mathematics: The cases of Boole, Cantor and Brouwer', *Hist. Phil. Logic* 3, 33-53. [También en M. Ranchetti (ed.): 1983, *Psicoanalisi e storia della scienza*. Firenze, pp. 93-121.]
- Grattan-Guinness, I.: 1985a, 'A Paris curiosity, 1814: Delambre's obituary of Lagrange, and its «supplement», in C. Mangione (ed.): 1985, *Scienza e filosofia. Saggi in onore di Ludovico Geymonat*, Milano, pp. 664-677. [También en M. Folkerts & U. Lindgren (eds.): 1985, *Mathemata. Festschrift für Helmut Gericke*, Munich, pp. 493-510.]
- Grattan-Guinness, I.: 1986b, 'Bertrand Russell's logical manuscripts: An apprehensive brief', *Hist. Phil. Logic* 6, 53-74.
- Grattan-Guinness, I.: 1986a, 'Russell's logicism versus Oxbridge logics, 1890-1925...', *Russell*, n.s. 5, 101-131.
- Grattan-Guinness, I.: 1986b, 'From Weierstrass to Russell: A Peano medley', in *Celebrazioni in memoria di Giuseppe Peano nel cinquantenario della morte*, Torino, pp. 17-31. [También en *Rev. Stor. Sci.* 2, 1985 (publ. 1987), 1-16.]
- Grattan-Guinness, I.: 1990, *Convolution in French mathematics, 1800-1840*, Basel/Berlin, 3 vols., Capítulos 3-4, 10-11.
- Grattan-Guinness, I.: 1991, 'The correspondence between George Boole and Stanley Jevons, 1863-1864', *Hist. Phil. Logic* 12, 15-35.
- Grattan-Guinness, I. (ed.): 1994, *Companion Encyclopaedia of the history and philosophy of the mathematical sciences*, London, 2 vols., Partes 3-6.
- Griffin, N.: 1980, 'Russell on the nature of logic (1903-1913)', *Synthese* 45, 117-188.
- Griffin, N.: 1991, *Russell's idealist apprenticeship*, Oxford.
- Guicciardini, N.: 1987, *The development of the Newtonian fluxional calculus in the eighteenth century*, C.N.A.A. (Britain) Ph.D. Guillemot, M. Véase Cassinet y Guillemot.
- Hailperin, T.: 1984, 'Boole's abandoned propositional logic', *Hist. Phil. Logic* 5, 39-48.
- Hailperin, T.: 1987, *Boole's logic and probability*, Amsterdam.
- Hailperin, T.: 1988, 'The development of probability logic from Leibniz to MacColl', *Hist. Phil. Logic* 9, 131-191.
- Hill, C.O.: 1991, *Word and object in Husserl, Frege, and Russell*, Athens (Ohio).
- Ibragimoff, S.G.: 1978, 'O logiko-algebraicheskikh rabotakh Ernsta Shreda, predboskhitibshikh teoriyu kvazigrupp', in *Kubernetika i logika...*, Moksva, pp. 253-313. [Véase también el artículo de las pp. 153-252.]

- Jevons, W.S.: 1864, *Pure logic, or the logic of quality apart from quantity*, London.
- Jørgensen, J.: 1931, *A treatise of formal logic*, Copenhagen/London, vol. 1. [Reimp. New York, 1962.]
- Jourdain, P.E.B.: 1910-1913, 'The development of the theories of mathematical logic and the principles of mathematics', *Qu. J. Pure Appl. Maths.* 41 (1910), 324-352; 43 (1912), 219-314; 44 (1913), 113-128.
- Jourdain, P.E.B.: 1991, *Selected essays on the history of set theory and logics (1906-1918)*, Bologna, Edic. e introducción de I. Grattan-Guinness.
- Koppelman, E.: 1972, 'The calculus of operations and the rise of abstract algebra', *Arch. Hist. Exact Sci.* 8, 155-242.
- Lacroix, S.F.: 1799, 'De la méthode en mathématiques', in *Éléments de géométrie...*, Paris, Reimp. entre 1802, 2^a edic., y 1804, 4^a edic; luego en *Essais sur l'enseignement en général...*, Paris, 1805, 1838 4^a edic.
- Lacroix, S.F.: 1813, 'Notice historique sur la vie et oeuvre de Condorcet', *Mag. enc.*, vol. 6 (correspondiente a 1813), pp. 54-77.
- Lacroix, S.F.: 1816, *An elementary treatise on the differential and integral calculus*, Cambridge. [Trad. de C. Babbage, G. Peacock y J.F.W. Herschel.]
- Lagrange, J.L.: 1797, 'Théorie des fonctions analytiques...', *J. École Polyt.* (1)3, *cab.* 9, 277 pp. [También publicado en 2^a edic. como libro, Paris, 1813.]
- Laita, L.M.: 1979, 'Influences on Boole's logic: The controversy between William Hamilton and Augustus De Morgan', *Ann. Sci.* 36, 45-65.
- Laplace, P.S.: 1795, 'Leçons de mathématiques données à l'École Normale en 1795', in *Séances Écoles Normales, passim*. [Numerosas reimpresiones, en particular en *Oeuvres complètes*, vol. 14, Paris, 1912; pp. 10-177.]
- Lowe, V.: 1975, 'A.N. Whitehead on his mathematical goals: A letter of 1912', *Ann. Sci.* 32, 85-101.
- Mangione, C., Bozzi, C.: 1993, *Storia della logica da Boole ai nostri giorni*, Milano.
- Mehrtens, H.: 1979, *Die Entstehung der Verbandstheorie*, Hildesheim.
- Merrill, D.D.: 1978, 'DeMorgan [sic], Peirce and the logic of relations', *Trans. C.S. Peirce Soc.* 14, 247-284.
- Merrill, D.D.: 1990, *Augustus De Morgan and the logic of relations*, Dordrecht.
- Michael, E. 1974, 'Peirce's early study of the logic of relations, 1865-1867', *Trans. C.S. Peirce Soc.* 10, 63-75.
- Moore, G.H.: 1982, *Zermelo's axiom of choice: its origins, development, and influence*, New York.

- Panteki, M.: 1992, *Relationships between algebra differential equations and logic in England: 1800-1860*, C.N.N.A. (London) PhD.
- Peckhaus, V.: 1990, *Hilbertprogramm und Kritische Philosophie. Das Gottinger Modell interdisziplinärer Zusammenarbeit zwischen Mathematik und Philosophie*, Göttingen.
- Prior, A.N.: 1955, *Formal logic*, Oxford. [1962, 2^a edic.]
- Putnam, H.: 1982, 'Peirce the logician', *Hist. Math.* 9, 290-301.
- Pycior, H.: 1987, 'British abstract algebra: Development and early reception 1750-1850', ei I. Grattan-Guinness (ed.): *History in mathematics education...*, Paris, pp. 152-168.
- Richards, J.: 1980, 'Boole and Mill: Differing perspectives on logical psychologism', *Hist. Phil. Logic* 1, 19-36.
- Roberts, D., Houser, N., van Evra, J. (eds.): 1996, *Studies in the logic of Charles S. Peirce*, Bloomington (Indiana).
- Rodríguez-Consuegra, F.A.: 1991, *The mathematical philosophy of Bertrand Russell: origins and development*, Basel.
- Rosado Haddock, G.E.: 1973, *Edmund Husserls Philosophie der Logik und Mathematik im Lichte der gegenwertigen Logik und Grundlagenforschung*, Bonn Univ. Dissert.
- Russell, B.A.W.: 1903, *The principles of mathematics*, Cambridge. [Reimp. con una nueva introducción, London, 1937.]
- Servois, F.J.: 1814, 'Essai sur un nouveau mode d'exposition des principes du calcul différentiel', *Ann. math. pures appl.* 5, 93-140.
- Smith, G. (ed.): 1982, *The Boole-De Morgan correspondence 1842-1864*, Oxford. [Cf. la reseña de J. Corcoran en *Hist. Phil. Logic* 7, 65-5.]
- Toepell, M.-M.: 1986, *Über die Entstehung von David Hilberts «Grundlagen der Geometrie»*, Göttingen.
- van Evra, J.: 1884, 'Richard Whately and the rise of modern logic', *Hist. Phil. Logic* 5, 1-18.
- van Heijenoort, J. (ed.): 1967, *From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic*, Cambridge (Mass.).
- Venn, J.: 1866, *The logic of chance*, London. [1876, 2^a edic.; 1888, 3^a edic.; reimp. New York, 1970.]
- Venn, J.: 1881, *Symbolic logic*, London. [1894, 2^a edic.; reimp. New York, 1970.]
- Voss, A.: 1914, 'Über die mathematische Erkenntnis', in F. Klein (ed.): *Die mathematische Wissenschaften*, Berlin, 3^a parte, 148 pp.
- Vuillemin, J.: 1968, *Leçons sur la première philosophie de Russell*, Paris.

- Whately, R.: 1823, 'Logic', *Enc. metrop.*, vol. 1, pp. 193-240. [Fecha un tanto incierta. Varias ediciones posteriores. Reproducción de la 1ª edición, con introducción y al cuidado de P. Dessì, Bologna, 1988.]
- Whitehead, A.N.: 1898, *A treatise on universal algebra with applications*, Cambridge, vol. I (y único). [Reimp. New York, 1960.]
- Zellweger, S.: 1982, 'Sign-creation and man-sign engineering', *Semiotica* 38, 17-52.

[Versión española del editor]

Ivor Grattan-Guinness es profesor de la School of Mathematics and Statistics, en la Middlesex University, Londres. Sus intereses y trabajos de investigación no sólo se han centrado en la obra de Peirce y de Russell y en la lógica británica del s. XIX, sino que han cubierto otros campos de la filosofía de las matemáticas y de la ciencia, y vienen dedicando especial atención a la historia y a la educación en matemáticas, con numerosas publicaciones especializadas. Ha sido el primer editor de *History and Philosophy of Logic*. También ha editado y dirigido: *From the calculus to set theory, 1630-1910. An introductory history* (1980) [*Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica*, Madrid, Alianza, 1984]; *Convolution in French Mathematics, 1800-1840*, Basel/Berlin, Birkhäuser/ Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1990, 3 vols.; *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, London/New York, Routledge, 1994, 2 vols.