INGENIO E INDUSTRIA. GUIA DE REFERENCIA SOBRE LA TESIS DE TURING-CHURCH†
(*Inventiveness and Skill. Reference Guide on Church-Turing Thesis*)

Enrique ALONSO*

Recibido: 1998.11.30.

* Departamento de Lingüística, Lenguas Modernas, Lógica y Filosofía de la Ciencia, Universidad Autónoma de Madrid, 28049 Madrid. E-mail: enrique.alonso@uam.es

BIBLID (0495-4548 (1999) 14: 35; p. 249-273)

RESUMEN: La Teoría de la Computación es un campo especialmente rico para la indagación filosófica. El debate sobre el mecanicismo y la discusión en torno a los fundamentos de la matemática son tópicos que están directamente asociados a la Teoría de la Computación desde su misma creación como disciplina independiente. La Tesis de Turing-Church constituye uno de los resultados más característicos en este campo estando, además, lleno de consecuencias filosóficas. En este ensayo se ofrece una guía de referencia útil a aquellos que desean prestar alguna atención a estos asuntos y carecen de la base técnica o histórica que se precisa. En primer lugar se ofrece un resumen de los principales problemas relacionados con la Tesis de Turing-Church para ofrecer a continuación información sobre sus aspectos más controvertidos. Se proponen algunos problemas no resueltos y se analiza su relevancia filosófica.

Descriptores: Teoría de la Computación, fundamentos de la matemática, lógica filosófica, Tesis de Church, mecanicismo.

ABSTRACT: *Computer Science is a field specially rich for philosophical inquiry. Mechanism and the discussion around foundations of mathematics are topics directly asociated to Computer Science for its very constitution as an independent discipline. Church-Turing Thesis is one of the most characteristic results in this field and is plenty of philosophicl consequences. In this article I offer a reference guide useful for those who are willing to pay some attention to these matters and ignore the technical and historical basis needed for this task. I resume the main topics related to Church-Turing Thesis and give some information about the most controversial aspects of this subject. Some open questions are settled for further investigation paying special attention to their philosophical importance.*

Keywords: *Computation Theory, foundations of mathematics, philosophical logic, Church's Thesis, mecanism.*

SUMARIO

El nacimiento de la Teoría de Computación en la década de 1930 es un excelente ejemplo de cómo combinar golpes de ingenio con un trabajo sistemático para dar lugar a resultados de amplia repercusión en numerosos ámbitos del saber. Uno de ellos, la Tesis de Turing-Church, ofrece un inmejorable pretexto para recordar unos acontecimientos módelicos en más de un sentido. Su comentario permite, además, un acceso directo a los fundamentos de una ciencia que, aunque áltamente tecnificada en la actualidad, aún muestra problemas y fisuras imposibles de ocultar si se hacen las preguntas correctas.

1. Prolegómenos. ¿Qué le importa a un filósofo?

Entre las muchas formas de interpretar la disciplina que hoy denominamos Teoría de la Computación hay una que resulta especialmente pertinente o estimulante para aquellos que nos hemos aproximado a sus contenidos desde una formación filosófica previa. Se trata de aquella según la cual esta disciplina ofrece una especie de análisis formal del significado del término "tarea efectiva" o "algoritmo". Esta acepción, más próxima seguramente a lo que son sus orígenes, es responsable de mi progresiva fascinación por sus contenidos y técnicas. Pero, ¿qué le puede interesar a un filósofo de la Teoría de la Computación? A mi juicio, esta disciplina ofrece al menos dos grandes fuentes de inspiración para la curiosidad de una mentalidad filosófica bien formada. La primera se refiere al modelo de actividad intelectual que sigue la Teoría de la Computación en su nacimiento en los años 30. La segunda versa sobre su contenido y por tanto, sobre sus objetivos y metodología.

La fascinación ante el tipo de esfuerzo intelectual, académico y científico del que nace la Teoría de la Computación es tan evidente en todo lo que sigue que resultaría francamente redundante abundar ahora en ello. Sin embargo, en una época en la que cada vez es más difícil compaginar medios y objetivos es difícil no ceder constantemente al encanto de un modelo que fue muy capaz de integar en su investigación valores realmente distintos. La relevancia de sus objetivos, una complejidad formal no inmersa en vanos tecnicismos y la comunicabilidad e inteligibilidad de sus resultados ilustran a la perfección lo que quiero decir. Me gustaría pensar que este ensayo puede contribuir con el relato de los acontecimientos de una época a abrir un debate cada vez más necesario en torno a estas y otras cuestiones de las que, no obstante, nada se dirá aquí.

En cuanto a su contenido, objetivos y métodos, la Teoría de la Computación posee aspectos que la convierten en un caso anómalo si se compara con otras disciplinas incluidas en el gran cuerpo de la Lógica o Matemática modernas. En primer lugar, sus contenidos poseen un valor epistemológico de directa aplicación en lo que puede resultar una aproximación rigurosa a la *Teoría del Conocimiento.* Sucede además que su estatus no se ajusta al que la mayoría de las doctrinas vigentes en Filosofía de la Ciencia atribuyen a la Matemática como disciplina: sus resultados no se entienden adecuadamante adoptando un estilo *convencionalista* de explicación. Finalmente, sus contenidos se refieren a *procesos* y no a entidades dadas.

Por fortuna existe un resultado muy capaz de resumir por sí solo el modo en que la Teoría de la Computación es relevante desde un punto de vista general o filosófico y por ello perfectamente adecuado para resumir todos mis comentarios anteriores. Me refiero en concreto a la denominada *Tesis de Church-Turing* -o Turing-Church como diré con más frecuencia. En una primera aproximación -a no confundir con una definición- la Tesis de Church-Turing -CTT- sostiene lo siguiente:

> *El modo en que operamos cuando procedemos de manera efectiva no difiere en nada del modo en que lo hace un ingenio mecánico ideal.*

Nos hallamos ante un resultado relevante, comunicable e inteligible cuyo estudio, como veremos más adelente, adquiere un nivel técnico exento de tecnicismos. Posee, además, un impacto epistemológico evidente e inmediato. Versa acerca de operaciones y sólo parece poder ser falsado o confirmado mediante la acumulación de datos empíricos, en otras palabras, tiene el aspecto de una ley natural inserta en el cuerpo de las ciencias formales.

Todo lo que sigue está destinado a ofrecer al lector una guía de referencia de la historia y avatares de esta tesis de tal modo que sea capaz de hacerse una idea del estado actual de la cuestión. Mi objetivo es facilitar el camino de aquellos que puedan compartir mi interés por este tipo de problemas ahorrándoles, si es que ello es posible, pérdidas innecesarias de tiempo.

2. *La formación del problema*

Pese a su presencia constante a lo largo de la historia del pensamiento, el estudio de la noción de tarea efectiva o algoritmo sólo adquiere naturaleza autónoma en los primeros años del siglo XX (Kleene 1981, p. 53). ¿Por qué? Es difícil interpretar este proceso sin tener en cuenta la influencia de la Lógica en los diversos programas de fundamentación de la Matemática. El principal, el denominado programa Formalista emprendido por D. Hilbert y P. Bernays, se plantea la posibilidad de utilizar la capacidad inferencial y la potencia expresiva de la Lógica para dotar a diversas teorías matemáticas -aritmética y geometría- de una sólida presentación. El efecto de este movimiento no es sólo, ni principalmente, estilístico. La posibilidad de resolver cualquier cuestión matemática concreta se supedita ahora al comportamiento inferencial del sistema lógico que formaliza la doctrina en que aquel se propone (Gandy 1987, p. 58). En otras palabras, la solubilidad de un cierto problema matemático deja de depender de su contenido específico para hacerlo de unos recursos inferenciales inespecíficos. La importancia de este nuevo planteamiento queda perfectamente reconocida en la formulación que Hilbert y Ackermann hacen del que ellos consideran uno de los principales problemas de la Matemática, el *Entscheidungsproblem* -Problema de la decisión:

> Das Entscheidungsproblem ist gelöst, wenn man ein Verfahren kennt, das bei einem vorlegelegt logischen Ausdruck durch endlich viele Operationen die Entscheidung über die Allgemeingültigkeit bzw. Erfüllbarkeit erlaubt. (Hilbert, Ackermann 1928, p. 73)
> *[El Problema de la Decisión queda resuelto cuando se dispone de un procedimiento que permita decidir, en un número finito de operaciones, la validez, alternativamente, la satisfacibilidad de una expresión lógica (de primer orden) dada.]*

Sea cual sea la solución a este problema no cabe duda de su capacidad para elevar a un primer puesto la importancia concedida al asunto de la efectividad. Algo que llama, no obstante, la atención es el dominio sobre el cual se inicia el análisis de la efectividad de un procedimiento o rutina. Lejos de tratarse de algún sistema deductivo conocido, se localiza sobre un dominio en cierto modo tradicional: la teoría de las funciones numéricas. Una buena razón para explicar esta aparente anomalía es la inmensa experiencia que el álgebra ha ido acumulando durante el siglo XIX, incomparable desde luego, a los balbuceantes inicios de la Lógica matemática en los últimos años de ese mismo siglo. La expresión algebraica de funciones numéricas combina lo que son claros prototipos de funciones efectivamente calculables -suma, producto, etc- con métodos mucho menos fiables de definición (Gandy 1987, p. 91). La presentación de una función numérica mediante su correspondiente expresión algebraica, o de un conjunto numérico mediante una ecuación diofantina, combina dos operaciones distintas íntimamente emparentadas, la definición de un cierto objeto y la exposición de un procedimiento de cálculo asociado a su construcción. ¿Qué tipo de recursos son aquellos que podemos emplear para establecer definiciones que expresen al mismo tiempo construcciones -cálculos- efectivas de la entidad definida?

3. Gödel 1931

En *Über formal unenstcheidbare Sätze...*[1] Gödel presenta por primera vez una clase de funciones numéricas -definidas sobre los enteros positivos- cuya característica es la de calcular el valor de sus argumentos de un modo que cualquiera reconocería como efectivo. La clase obtenida, la de las *Funciones recursivas primitivas* -[Frp]- utiliza métodos ya conocidos en un contexto relativamente nuevo, el de la construcción inductiva de una clase de funciones numéricas. En otras palabras, es la primera vez que se intenta analizar el tipo de recursos que preservan la calculabilidad efectiva apreciada en ciertas funciones básicas. Estos recursos no son, sin embargo, una invención atribuible al ingenio matemático de Gödel. Al contrario, se trata de técnicas conocidas y empleadas con profusión aunque siempre de forma aislada, nunca como rasgo característico de una cierta clase de funciones. Esos procedimientos tienen una historia asociada al adjetivo que califica la clase de funciones definida por Gödel. La siguiente lista enumera los usos que podemos encontrar en autores de la época:

i. Dedekind 1888: *definition by induction* -esquema de recursión.
ii. Hilbert 1905: *rekurrente.*
iii. Hilbert 1923: *Rekursion.*
iv. Ramsey, 1928: *recursive.* (Gandy 1987, p. 67).

La descripción del tipo de efectividad que presentan las funciones incluidas en [Frp] no era, como es bien sabido, el objetivo principal de Gödel. A lo sumo se trata de un medio destinado a un fin mucho más específico: la construcción de fórmulas verdaderas indemostrables de la Teoría elemental de números. No obstante, tal vez sea inapropiado considerar un medio a algo que realmente es un *canon.* La clase de las funciones recursivas primitivas permitió fijar una interpretación razonable de la efectividad de un procedimiento útil, por ejemplo, para entender en qué sentido una demostración formal debía ser efectiva. Aplicado ese criterio a la demostrabilidad de una formalización suficientemente potente de la Teoría de números[2], el resultado fue, y pudo ser, el ya conocido: la existencia -la construcción de hecho- de fórmulas verdaderas aunque indemostrables. Desde esta interpretación del problema es fácil ver el inmediato impacto que el trabajo de Gödel tuvo sobre el programa Formalista. El aparato inferencial que aporta la Lógica a una doctrina matemática concreta no conduce a la demostración efectiva de todos sus teoremas. Al menos, si *efectivo* se interpreta en el sentido de [Frp] y la teoría en cuestión contiene suficiente potencia expresiva como para generar esa clase de funciones en su interior.

El uso que Gödel hace de [Frp] le permite soslayar abiertamente el problema generado por la existencia de funciones efectivamente calculables no incluidas en ella. De hecho, Gödel conoce perfectamente el caso asumiendo, por tanto, que [Frp] no constituye un modelo exhaustivo de la calculabilidad efectiva. De hecho, Ackermann define en 1928 (Gandy 1987, pp. 67-68) una función -conocida como función de Ackermann- la cual, aunque calculable de manera efectiva, no lo es mediante usos, digamos simples[3], del método de recursión. Gödel, al admitir sólo aquellos usos fiables de dicho procedimiento, y por tanto, simples, renuncia deliberadamente a abarcar en su tratamiento la función de Ackermann.

Aunque como modelo de lo que haya de entenderse por procedimiento efectivo la contribución de Gödel es sólo una primera aproximación es, al menos eso sí, la primera que se presenta en un contexto formal riguroso. Ese es su valor, y como no, el de mostrar a toda la comunidad científica el impacto que el problema de la efectividad va a tener a partir de entonces en el cuerpo de la Matemática moderna. Pocos asuntos pueden presumir de haber tenido una presentación en sociedad como éste que ahora nos ocupa.

4. Church 1929-34

Desde el inicio de su carrera docente en Princeton[4], Church demuestra una especial sensibilidad hacia el contenido y propósito del Problema de la decisión.

Tal vez porque su objetivo fue éste desde un principio, su obra se centra en el problema de la efectividad de un procedimiento, y no en usos particulares o aproximaciones parciales a esa noción -como hiciera Gödel. El contexto que se elige para estudiar el tópico de la efectividad es, de nuevo, el de las funciones numéricas definibles sobre los enteros positivos. Church observa cómo ciertas funciones numéricas son fácilmente definidas mediante instrucciones que permiten calcular de manera directa sus distintos valores. Otras, por el contrario, son definiciones que se limitan a lo que podríamos denominar un uso estipulativo del lenguaje simbólico empleado. La idea que cautiva a este autor consiste en proponer un tipo de notación, la *notación-λ*, capaz de garantizar que toda definición establecida con su concurso expresa un procedimiento efectivo de cálculo.

Según parece, la primera exposición de la notación-λ tiene lugar, tal y como recuerda Kleene (Kleene 1981, p. 53) en un curso sobre fundamentos de matemáticas impartido por Church en el otoño de 1931 y al que asisten Rosser y el propio Kleene. El análisis de la efectividad de una función numérica mediante el uso de la *notación-λ* se presenta ahora como el intento de *reducir* su definición explícita a notación-λ. Si se obtiene dicha reducción, entonces la función es *λ-definible*, y de ahí efectivamente calculable (Kleene 1981, p. 55) (Rosser 1984, pp. 338 y ss.). Una de las razones por las que esta idea resulta especialmente atractiva es por el tipo de problemas que propone: es la primera vez que el estudio de la efectividad de una función puede ser tratado de modo sistemático y con técnicas concretas. Dicho de otro modo, establecer si una función es λ-definible parece tener el aspecto del típico ejercicio que un alumno puede resolver en un curso de especialidad. Es la sistematización de esa tarea de cálculo lo que da lugar a la definición del llamado *cálculo-λ* en el periodo de 1932-33 a cargo, principalmente, de Church.

El tránsito entre lo que empieza siendo un mero experimento notacional y un cálculo con problemas asequibles y concretos, hace que alumnos aventajados de la talla de Kleene o Rosser[5] empiecen a interesarse por el asunto de la efectividad. Es precisamente la reducción de la *función predecesor* obtenida por Kleene en febrero de 1934 la que constituye, según Rosser, uno de los primeros indicios que llevan a Church a pensar en la posible identificación de la noción de efectividad con la definibilidad de una función en el cálculo-λ (Rosser 1984, p. 345).

Pero todo cálculo padece, cuando se emplea de forma sistemática, avatares e infortunios. El que afectó al cálculo-λ no pudo ser peor: Rosser y Kleene consiguen establecer en la primavera de 1934 la inconsistencia de una primera versión completa de dicho cálculo (Kleene 1981, p. 57). Sin embargo, el grado de detalle con que se conoce ya su funcionamiento permite subsanar ese problema permitiendo que gane crédito una opinión cada vez más clara. Lo que durante estos años se había propuesto como un buen procedimiento para estudiar la efectividad de una función podría expresar, en realidad, todo el conjunto de técnicas que es posible utilizar cuando se quiere que una función sea efectiva. En otras palabras, empieza a ganar evidencia la conjetura que hace del cálculo–λ un sistema *completo* respecto a la clase de funciones numéricas efectivamente calculables, o equivalentemente, que toda función numérica efectivamente calculable es Λ-definible[6]. Según Rosser, esta tesis forma parte del ambiente ya en junio de 1933, aunque las primeras declaraciones explícitas de Church a tal efecto datan de los primeros meses de 1934 (Rosser 1984, p. 345), (Davis 1982, p. 8).

Uno de los procedimientos que permiten establecer cuándo un objeto de un determinado tipo *no* pertenece a una clase definida sistemáticamente -como la de las funciones λ–definibles- es el conocido *método de diagonalización*. Aunque no vaya a hablar de él, es bueno saber que su uso había conseguido una notable cosecha de resultados negativos y frustaciones. El último episodio de este periodo tiene lugar en el otoño de 1933 cuando Kleene lleva a cabo un intento concienzudo de diagonalizar sobre la clase de funciones λ–definibles tras oir la tesis de labios de Church. La resistencia del cálculo–λ al alcance de este método es entendida por Kleene como un resultado fundamental y decisivo a la hora de evaluar la exhaustividad del cálculo–λ respecto a la clase de funciones efectivamente calculables. La siguiente cita da buena cuenta de ello:

> When Church proposed this thesis, I sat down to disprove it by diagonalizing out of the class of λ–definable functions. But, quickly realizing that the diagonalization cannot be done effectively, I became overnight a supporter of the thesis. (Kleene 1981, p. 59)

5. Gödel 1934

La estancia de Gödel en Princeton a lo largo del curso de 1933-34 hace que la maduración de la Tesis de Church se acelere y adquiera una relevancia que tal vez no hubiera conseguido de otro modo.

Aunque Gödel parece no haber prestado una especial atención al tópico de la efectividad desde su contribución de 1931, la sugerencia del matemático J. Herbrand en una carta de ese mismo año (Kleene 1981, p. 59), es recordada algún tiempo después haciendo que Gödel recupere su interés, al menos momentáneamente. Así durante la primavera de 1934 Gödel imparte un curso en Princeton en el cual presenta una nueva clase de funciones, la clase de las *funciones recusivas generales* -[FRG] en lo sucesivo-, que constituyen su peculiar interpretación de la idea de Herbrand.

La clase, cuyos aspectos técnicos no interesan ahora, modifica el tratamiento que Gödel había dado del problema hasta entonces al ser propuesta con el objetivo explícito de incluir todas las funciones efectivamente calculables conocidas hasta la fecha. Sin embargo, esò no significa que Gödel acepte identificar su clase con la de las funciones efectivamente calculables, salvo bajo el elusivo expediente de considerar los métodos empleados como una *guía heurística* (Feferman 1984, p. 106), (Gödel 1934), (Davis 1982). Estas considerables reticencias contrastan abiertamente con el entusiasmo creciente demostrado por el grupo de Church en esas mismas fechas. Así, durante los primeros meses de 1934 éste comunica a Gödel sus expectativas sobre el alcance del cálculo–λ terminando la conversación en un abierto desacuerdo (Davis 1982, p. 9; carta de Church a Kleene de 29 de noviembre de 1935). La objeción en que Gödel basa su disenso no es, sin embargo, de aquellas que cabe atribuir a un conservadurismo esclerótico. Simplemente, niega que el cálculo–λ o [FRG] puedan expresar formalmente un concepto intuitivo, función efectivamente calculable, sin haber discutido antes las propiedades generales del término (Davis 1982, pp. 12-13). Sucede, además que, tal y como Gödel confiesa en carta a Davis de 1965 (Kleene 1981, p. 60), por aquel entonces le resultaba muy difícil aceptar que [FRG] permitiese expresar realmente todas las funciones reconocidas hasta la fecha como ejemplos de funciones efectivamente calculables.

En mitad de esta especie de enfrentamiento de voluntades y estilos, Church consigue apuntarse un tanto -sólo concedido con el tiempo- al mostrar una intuición superior para entender la esencia del problema que realmente se discute. Esta intuición se formula en términos de un desafío:

> I replied that if he would propose any definition of effective calculability which seemed even partially satisfactory I would undertake to prove that it was included in lambda-definability. (Davis 1982, p. 9)

6. *Episodio final. 1ª Parte: Kleene y Church, 1936*

El reto con que Church ataca las reticencias de Gödel va a convertirse en los próximos meses en una especie de directriz de trabajo para el grupo de Princeton. La sospecha de que la noción de calculabilidad efectiva está siendo capturada mediante aproximaciones distintas, al punto de convertirse en una especie de invariante formal y epistemológica, refuerza la búsqueda de resultados de equivalencia no siempre fáciles de obtener. Durante 1935, Kleene y Church emplean parte de su tiempo en establecer pruebas de equivalencia entre [FRG] y [λ-def] publicándose los primeros resultados en esa dirección de forma independiente en 1936 (Kleene 1981, p. 60). Para ser más exactos, lo que ambos establecen por separado es que [λ-def]⊆[FRG] siendo Kleene el único en demostrar la dirección restante, esto es, que [FRG]⊆[λ-def] (Davis 1982, p. 10; Kleene comunica ese resultado en un abstract fechado en julio de 1935).

Llama la atención que sea en este periodo de dudas en el que Church inicia la divulgación de su conjetura no esperando a consolidar resultados que sabe decisivos. De hecho, la primera presentación pública de sus posiciones tiene lugar en abril de 1935 -antes del abstract de Kleene de julio- en una reunión de la *American Mathematical Society* en Nueva York. Según Davis, esto permite explicar las fórmulas evasivas que Church emplea al no disponer aún de una demostración completa de la equivalencia entre [FRG] y [λ-def][7]. Otro hito importante que tiene lugar en ese momento es el sacrificio de la notación-λ en la discusión del tópico de la efectividad. Decepcionado por la mala recepción de este formalismo, Church propone su conjetura en el contexto de la definición de Herbrand-Gödel -[FRG]- sancionando así un abandono sólo muy tardíamente subsanado[8].

No obstante, lo que realmente importa de este episodio es la forma que Church elige para expresar su tesis. Con ello inagura una compleja relación entre lo que es, de una parte, un concepto intuitivo y por tanto informal, y de otra, una construcción matemática precisa. En esta ocasión, Church presenta sus ideas como una *propuesta de identificación* de dos nociones, una formal y otra intuitiva:

> And it is maintained that the notion of an effectively calculable function of positive integers should be identified with that of a recursive function, since other plausible definitions of effective calculability turn out to yield notions which are either equivalent or weaker than recursiveness. (Davis 1982, p. 10)

El texto íntegro de esta comunicación, revisado y aumentado, aparece meses más tarde en un artículo publicado en el *American Journal of Mathematics*, nº 58 de 1936. En esa ocasión, y de nuevo según Davis, Church puede adoptar un tono más enérgico debido a que en el intervalo ha podido acceder a las pruebas de equivalencia de Kleene entre [FRG] y [λ-def]. Esto hace que su propuesta de identificación evolucione hasta adoptar la forma de una *definición*[9] de un concepto intuitivo en términos de otro formal (Alonso, 1997a).

> We now define the notion, already discussed, of an effectively calculable function of positve integers by identifiying it with the notion of a recursive function of positive integers (or of a λ-definable function of positive integers). This definition is thought to be justified by the considerations which follow, so far as positive justification can every be obtained for the selection of a formal definition to correspond to an intuitive notion. (Davis 1965, p. 100)

Kleene por su parte ha emprendido en ese mismo periodo, en realidad desde el verano de 1935 (Davis 1982, p. 10), una personal interpretación del problema que culmina en un nuevo formalismo, el de las *funciones recursivas por minimalización* -[Frμ], presentadas en (Kleene, 1936). La idea que subyace a este formalismo es la de enriquecer la definición original de Gödel de 1931 -[Frp]- mediante una nueva regla de formación de funciones, la denominada regla de minimalización. El objetivo de Kleene con este nuevo modelo no es proponer alternativas a lo ya existente, sino, en realidad, facilitar la comparación entre los formalismos que ya han sido descritos. Tal vez por eso, la presentación de [Frμ] se hace al tiempo que se establece uno de los teoremas más característicos de la aún nonnata Teoría de la Computación. Me refiero al denominado Teorema de Normalización que viene a establecer la equivalencia entre las funciones recursivas generales de Gödel-Herbrand y la clase [Frμ] recien propuesta. La importancia de este resultado, difícil de explicar sin un desarrollo formal explícito, reside en el uso de la potencia codificadora de las funciones aritméticas elementales en [Frp] para reproducir -vía códigos- cualquier expresión efectiva de una función calculable. Su efecto inmediato es apuntalar la invariancia de la clase de funciones obtenible con respecto al del procedimiento específico empleado en su definición. En otras palabras, si es posible reproducir en términos de un metalenguaje apropiado -un código es, en definitiva, un nombre- la definición de una función efectiva en [FRG], o en cualquier otro formalismo imaginable, entonces poco queda del aparato concreto que permite obtener la definición inicialmente considerada. En la personal revisión que Gödel hace años más tarde de las posiciones mantenidas en aquella época, ocupa un lugar destacado la importancia del resultado de Kleene al ser el primero que aporta evidencia positiva del carácter absoluto -independiente de formulaciones específicas- de la noción de calculabilidad efectiva (Webb 1980, p. 206).

El balance de ese auténtico *annus mirabilis* de 1936 no puede ser más espectacular. Se ha conseguido establecer la equivalencia de tres aproximaciones distintas al asunto de la calculabilidad efectiva, a saber, [FRG], [λ-def], y [Frμ]. Se ha ido acumulando una valiosa experiencia en la reducción de funciones efectivas a alguno de los procedimientos conocidos y se sabe, aunque no se aprecie totalmente su importancia, que tales clases no diagonalizan. Finalmente, Kleene se ha aproximado tanto como es posible a la demostración de un resultado de invariancia a través de su Teorema de Normalización. Sin embargo, y tal vez, recogiendo las críticas de Gödel, aún no se ha obtenido un procedimiento que ofrezca explícitamente el análisis formal riguroso de los componentes intuitivos de la noción subyacente (Kreisel 1987, p. 507). Pese a su brillantez formal, ninguna de las clases de funciones definidas en aquel entonces satisface un requisito tan trivial y evidente -para el lego- como el que acabo de mencionar. Pero 1936 no ha terminado todavía y lo mejor aún está por llegar.

7. Episodio final. 2ª Parte: Turing 1936

En 1935 Alan Turing se encuentra cursando estudios de postgrado en el King's College adscrito a la universidad de Cambridge, donde ha llegado gracias a una beca de cierta importancia. Cuenta con poco más de 23 años y sus intereses no parecen aún totalmente definidos. Durante ese año Turing va a asistir a un curso sobre fundamentos de Matemática impartido por el topólogo M.H.A. Newman que determina decisivamente los acontecimientos posteriores. Es ahí donde toma contacto con los resultados de Gödel de 1931 y con los contenidos y objetivos básicos del Programa Formalista, y muy especialmente, con el Problema de la Decisión -cfr. supra. Sin embargo, ni Newman ni Turing tienen noticia en aquellas fechas de las investigaciones del grupo de Princeton, ni de los nuevos esfuerzos que Gödel dedica por entonces al tópico de la efectividad (Feferman 1984, pp. 105-106).

Con la intensidad propia de quien ha sido cautivado por las perspectivas y dimensión de un auténtico problema, Turing inicia en el verano una investigación de carácter absolutamente personal orientada a ofrecer una respuesta negativa la Problema de la Decisión[10]. La opción elegida como guía heurística, una solución negativa, responde posiblemente al clima de escepticismo que a ese respecto ha empezado a extenderse desde algún tiempo atrás (Gandy 1987, pp. 63 y ss.), (Feferman 1984, p. 105). El resultado de ese esfuerzo toma forma en un borrador titulado *On computable numbers with an application to the Entscheidungsproblem* que Newman lee en abril de 1936 y en el cual se ofrece la prometida respuesta negativa al Problema de la Decisión. Tras un inicial asombro y no poco escepticismo -Turing resuelve de forma extraordinariamente simple un problema de indudable alcance- Newman anima a Turing a publicar inmediatamente el resultado.

En ese mismo mes de abril va a ver la luz el primer número de una revista convertida hoy en día en un clásico para la comunidad científica, el *Journal of Symbolic Logic*. En él aparece publicado un artículo de Church titulado 'A note on the Entscheidungsproblem' en el que se ofrece una respuesta también negativa al Problema de la Decisión. A diferencia de lo que sucede con el original de Turing, la solución no utiliza un aparato conceptual novedoso, sino que se obtiene a partir del que previamente ha venido desarrollando el grupo de Princeton. Es fácil imaginar la decepción de Turing al leer el artículo de Church y comprobar, no sólo su falta de oportunidad -ya no es el primero en proponer la solución al problema-, sino, además, al comprobar la existencia de técnicas muy elaboradas de las cuales no parece haber tenido noticia hasta ese mismo momento. El ánimo y, por qué no, la intuición de Newman son decisivas para que Turing supere sus dudas y remita finalmente su original. El artículo es recibido en mayo de 1936 en los *Proceedings of the London Mathematical Society* donde, según parece, Church actúa de informante. Tras un atento escrutinio, éste recomienda su publicación al observar las diferencias metodológicas que el propio Newman había sabido apreciar. El espaldarazo recibido es sufiente para que Turing emplee los próximos meses en analizar los métodos de Church consiguiendo finalmente una prueba de la equivalencia entre el cálculo-λ y su propia interpretación de la efectividad. Esa demostración se incorpora en forma de añadido -con fecha de agosto (Davis 1965, p. 149)- al original ya enviado y ven juntos la luz en los primeros meses de 1937.

Es difícil encontrar un ensayo que en tan poco espacio contenga aportaciones tan novedosas e influyentes. En otras palabras, hubiera bastado una sola de éstas para que el trabajo de Turing hubiera adquirido la categoría de un clásico, sin embargo, es posible encontrar hasta cuatro ideas de aquellas que justifican toda una carrera científica y académica. En primer lugar, se ofrece la definición de un ingenio calculador ideal, lo que ahora denominamos *máquinas de Turing*, que ofrece un nuevo modelo o interpretación de la noción de función numérica efectivamente calculable. En segundo lugar, se introduce la noción de *máquina universal*, esto es, el ancestro formal y abstracto de lo que en la actualidad son los sistemas operativos de nuestros ordenadores. Se discute y presenta el denominado *problema de parada*[11] y se aplica a la solución del Entscheidungsproblem. Y, finalmente, se identifican las clases de funciones [λ-def] y la de aquellas que son calculables en términos de máquinas de Turing [T-comp] -añadido de agosto de 1936.

La difusión de las máquinas de Turing entre la comunidad tiene el efecto de una pequeña conmoción que altera radicalmente el curso posterior de los acontecimientos, sobre todo en lo que se refiere a las actitudes de muchos de los protagonistas de aquellos años. La definición de Turing es reconocida de inmediato como un auténtico análisis del tipo de rutina que ejecutamos cuando procedemos de manera efectiva. Church es el primero que reconoce públicamente la superioridad intuitiva de la metodología adoptada por Turing:

> (...) has de advantage of making the identification with effectiveness in the ordinary (not explicitly defined) sense evident immediately -i.e. without the necessity of preliminary theorems. (Feferman 1984, p. 107)

Para que el lector no iniciado juzgue por sí mismo la proporción de las alabanzas, bastará una breve descripción informal de qué es una máquina de Turing. Se trata, grosso modo, de una cinta dividida en celdas sobre la cual se desplaza -sin limitaciones de espacio- una cabeza lectora. Esta escruta el contenido de una celda, es capaz de desplazarse por la cinta -una celda cada vez- hacia la izquierda o la derecha y puede escribir o borra una marca sobre una celda. Esas operaciones se ejecutan al leer un programa finito formado por una colección de instrucciones que indican qué debe hacer la cabeza lectora en función del contenido de la celda sobre la que se halla emplazada en cada instante. Como se ve de inmediato, el mecanismo no puede ser más simple. La idea de Turing es que toda rutina que seamos capaces de ejecutar con lápiz y papel como parte de una tarea puede ser expresada de forma equivalente en términos de su formalismo: Tesis de Turing[12].

Aunque sólo reconocido mucho más tarde, la aportación de Turing es una pieza de evidencia definitiva en el cambio que lleva a Gödel a abandonar su inicial especticismo (Davis 1965, pp. 71 y ss.). Así,

> Turing's work gives an analysis of the concept of "mechanical procedure" (alias "algorithm" or "computation procedure" or "finite combinatorial procedure"). (Feferman 1984, p. 107)

Durante los últimos meses de 1936 y primeros de 1937 se ha conseguido sumar a los recursos ya existentes un nuevo procedimiento equivalente a los anteriores y al que todos otorgan el carácter de un auténtico análisis de la noción informal subyacente, la de tarea efectiva, o, si se prefiere, el de función numérica efectivamente calculable. Algunas de las observaciones más atinadas sobre el proceso que tiene lugar en esta época son, como acabo de mencionar, las que se desprenden de la peculiar evolución experimentada por Gödel a lo largo de los años. Evolución que le lleva desde una posición de gran escepticismo, por la que se enfrenta con Church en el 34, hasta una aceptación, siempre crítica, de las posiciones de Turing. El primer episodio público que nos interesa se refiere al reconocimiento del carácter absoluto de la noción de calculabilidad efectiva, o como empezaré a denominarla cada vez con más frecuencia, *computabilidad*[13]. Esta observación se produce en un contexto en el cual Gödel parece considerar fenómenos independientes la citada invariancia y la traducción de una noción intuitiva que la justifique:

> Thus, the concept "computable" is in a certain definite sense "absolute", while practically all other familiar metamathematical concepts (e.g. provable, definable, etc.) depend quite essentially on the system with respect to which they are defined. (Davis 1982, p. 16)

Téngase en cuenta que el momento en que tiene lugar la formulación de la Tesis de Turing-Church, el periodo 1935-37, es poco propicio a concepciones unitarias o uniformes en el dominio de la Matemática. La imposibilidad, por ejemplo, de obtener una única representación formal de la Teoría de conjuntos, o la inexistencia de una versión axiomática de la Aritmética con potencia suficiente para derivar todas sus verdades, ha creado un clima de escepticismo que no favorece en nada la recepción de la Tesis de Turing-Church-CTT.

La segunda y más explícita manifestación de Gödel tiene lugar en 1946 en el contexto de la Princeton University Bicentenial Conference. Ahí reconoce abiertamente que el trabajo de Turing es el único que ha conseguido ofrecer la definición rigurosa de una noción epistemológicamente relevante. Llama la atención, no obstante, la perfecta distinción entre el fenómeno de invariancia observable en el concepto formal de computabilidad y lo que representa admitir la existencia de un análisis formal completo de una noción intuitiva compleja.

> It seems to me that this importance is largely due to the fact that with this concept one has for the first time succeeded in giving an absolute definition of an interesting epistemological notion, i.e. one not depending on the formalism chosen. (...) For the concept of computability however, although it is merely a special kind of demonstrability or decidability the situation is different. By a kind of miracle it is not necessary to distinguish orders, and the diagonal procedure does not lead outside the defied notion. (Davis 1965, p. 84)

Es difícil saber si la invariancia que tanto fascina a Gödel es concebida como una consecuencia de haber capturado una noción relevante, o son fenómenos hasta cierto punto independientes (Webb 1980, pp. 222 y ss.). Sea como fuere, la actitud cauta y recelosa que Gödel adopta y mantiene, aún cuando los demás se muestran entusiastas, es algo que inevitablemente mueve a reflexión. Tal vez, sólo tal vez, es posible que Gödel apreciase una diferencia tan profundamente instalada en nuestras intuiciones que sólo ahora, tras un justificado periodo de entusiamo, se esté viendo algo de lo que entonces él pudo intuir (Richman 1983).

8. *Epílogo*

Es imposible que una etapa tan breve e intensa como la que he descrito en estas páginas sea la única responsable del proceso en que se constituye y toma forma la Teoría de la Computación. Por lo menos hicieron falta otros diez años más para que los resultados que en la actualidad son el núcleo de esta disciplina vieran la luz. Esto afecta igualmente a la Tesis de Turing-Church, tanto por lo que se refiere al nombre con que hoy se la conoce, como a la importacia atribuida.

Como ya se ha dicho, Church nunca habló de una *tesis* a la hora de exponer su conjetura, sino, a lo sumo de una *definición* -cfr. supra. Turing, por su parte, ni siquiera expuso su contendio de forma separada, aunque es algo que se presupone constantemente en la trama de su artículo seminal. El primero que utiliza el término *tesis* para referirse a tales declaraciones es Kleene en un artículo de 1943 (Kleene 1943) en el que se ofrece un primer intento de exposición sistemática de la Teoría de la Computación junto con algunos nuevos resultados. Allí aparace como *Tesis I* (Davis, p. 274) y es atribuida simultáneamente a Church y Turing. La denominación más extendida durante algún tiempo, *Tesis de Church*, arranca de un texto bastante posterior, el conocido manual de Kleene de 1952, siendo ése el punto desde el que alcanza una mayor popularidad. La denominación actualmente más aceptada, CTT, es fruto del uso reiterado en la literatura científica y resulta difícil indicar un único responsable. Sea como fuere persisten aún otros usos y denominaciones justificables por otros motivos (Soare 1996, pp. 295-296).

Aunque lo usual es considerar que el acto fundacional de la Teoría de la Computación finaliza en los primeros meses de 1937, cada vez es más frecuente incluir también el periodo que se extiende hasta 1938 en atención a una contribución fundamental de Kleene: 'On notation for ordinal numbers', *Journal of Symbolic Logic*, 3. Ahí se presentan por primera vez conceptos y resultados hoy clásicos. Se eliminan, por ejemplo, ciertas condiciones de carácter no constructivo en la definición de función computable (recursiva) al admitir como término primitivo de análisis las *funciones parciales* (Soare 1996, p. 299) y no, como se hacía hasta entonces, las *funciones totalmente definidas*. Se demuestra, además, el *Teorema de Recursión* determinando el equilibrio existente entre autorreferencia, codificabilidad, y completa determinación de los valores de una función.

Otro hito a tener en cuenta es la contribución de un protagonista menor, por su impacto, que no por su capacidad, al tema de la computabilidad. E. Post en su tesis doctoral, que data de 1920, analiza y propone aspectos fundamentales de lo que luego serían los *sistemas normales* de Post (Davis 1982, p. 18). A finales de 1936 consigue publicar una contribución en la que se propone un trabajo de similar calado al de las máquinas de Turing, obtenido, además, de forma independiente. No contiene otros resultados anejos aunque sí presta apoyo a la propuesta de definición de Church, de la cual sí es conocedor (Davis 1965, pp. 289-291). Por desgracia sus contribuciones no disfrutaron de la aprobación de las revistas especializadas y su trabajo fue rechazado en 1941 consiguiendo sólo una difusión parcial en 1943. En la actualidad su obra es perfectamente conocida por su originalidad y en cierto modo por haber anticipado resultados posteriores.

9. Aceptación y críticas

La intensa historia experimentada por la CTT en el período 1935-38 ha dejado un complejo *sistema de variantes*, poco o mal descrito en la literatura, que eventualmente puede dar lugar a errores conceptuales -una exposición sistemática de este aspecto del problema queda fuera del alcance de este ensayo. Si se reserva el término *función numérica efectivamente calculable* para referirnos al componente intuitivo del problema, y *función numérica computable (recursiva)* para el correlato formal -donde *función* significa *función parcial*-, se obtiene la siguiente formulación:

> (CTT *genérica*): La clase de las funciones numéricas efectivamente calculables coincide con la clase de las funciones computables.

Es ésta la que finalmente se está imponiendo como versión canónica al evitar pronunciarse sobre cualquier posible opción de tipo formal[14].

Durante este tiempo la CTT ha conseguido instalarse de forma inusualmente dulce como un principio universalmente aceptado. Las críticas habidas nunca han conseguido prosperar ni dar lugar a corrientes heréticas de importancia. Ese proceso es paralelo al progresivo arrinconamiento que esta tesis ha sufrido a medida que la Teoría de la Computación avanzaba en complejidad y alcance. Sólo de cuando en cuando -con motivo, por ejemplo, de su 50 aniversario- se recupera el interés por sus contenidos y consecuencias dando lugar a oleadas de contribuciones más o menos eruditas.

Pero, ¿cómo ha conseguido la CTT alcanzar ese grado de aceptación? Por lo general, hay dos fuentes de evidencia que siempre se mencionan cuando se plantea esta pregunta. En primer lugar, la equivalencia extensional mostrada por una multitud de variantes formales de la computabilidad -de las cuales aquí sólo he mencionado las históricas- debe responder a algo. Y eso sólo puede ser el tipo de principio que enuncia CTT. En este mismo apartado se suele incluir también una mención a las propiedades de clausura que presenta esa clase: resistencia a la diagonalización, enumerabilidad efectiva, contención de la autorreferencia en los límites de la codificación, etc. En segundo lugar, en todo este tiempo no se ha ofrecido un ejemplo de función efectivamente calculable que no pudiera ser expresada en términos de cualquiera de las interpretaciones formales vigentes. Esto significa algo más concreto de lo que a primera vista se lee. Supone, de hecho, que todas las funciones que han sido diseñadas con tal propósito, o bien, no han resultado definiciones en ningún sentido, o bien, se ha podido mostrar que su presentación era contradictoria.

Las dos fuentes de evidencia que se ofrecen se refieren a hechos relativos a nuestra experiencia formal. Esto hace que la CTT adquiera un estatus anómalo a juzgar por su contenido: se presenta como una tesis empírica en el dominio de las ciencias formales.

No obstante, el carácter empírico de la CTT no es algo que convenza por igual a toda la comunidad. Existe una interpretación de carácter convecionalista que considera la CTT como una enunciado tautológico poco explícito (Shanker 1987, p. 625). El argumento se apoya en que, al menos en el caso de Turing, el modo en que entendemos la calculabilidad efectiva de una función -término informal del problema- constituye una definición implícita el término formal de función Turing-computable. De este modo, refutar la CTT es imposible, ya que cualquier función efectiva admitida a trámite es ya de hecho, Turing-computable. En un sentido más general, se puede decir que la refutabilidad de la CTT siempre va a depender de nuestra flexibilidad para interpretar la efectividad de un procedimiento. Sólo si aceptamos un juicio independiente de lo que se oculta bajo la efectividad de una rutina, podemos preservar el auténtico carácter empírico de CTT. De otro modo, sólo nos quedaría la considerable sorpresa de que todos los métodos descritos hayan coincidido desde un punto de vista extensional, sorpresa que ahora tal vez hubiera que explicar por la pertinacia del concepto intuitivo subyacente.

Si revisamos las críticas más renombradas -las que mayor eco han obtenido- comprobaremos que nunca han llegado a ofrecer un caso concreto de función efectivamente calculable que no resulte computable[15]. No obstante, no es ahí donde reside su fuerza. Las dos que presento a continuación, la de Kalmar y la de Lucas, tienen interés en la medida en que ofrecen pautas que han sido ilustradas por numerosas variantes, al punto de representar auténticos estilos de crítica.

El primer tipo de argumento es el que ofrece L. Kalmar en 'An argument against the plausibility of Church's Thesis' (Heyting 1959, pp. 72-80) expuesto inicialmente en el Amsterdam Colloquium de 1957 ante la comunidad internacional (Kleene 1987a, p. 494). Como ya he dicho, no se ofrece una función efectivamente calculable no computable (Kalmar 1959, p. 72), sino que se obtiene una consecuencia implausible a partir del estudio de un resultado negativo obtenido previamente por Kleene -(Kleene 1936, en Davis 1965, p. 215).

Kalmar considera el siguiente esquema de definición de funciones numéricas:

> $\Psi(x)=\mu_y(\varphi(x,y)=0)$, esto es, el menor de los números naturales para los que sucede $\varphi(x,y)=0$ si existe alguno,
> 0 en otro caso,
> donde $\varphi(x,y)$ es una una función computable totalmente definida.

Es bien sabido (Kleene 1936, Teorema XIV, en Davis 1965, p. 251) que la clausura de [FRG] bajo esa regla supone admitir que la función característica del conjunto K es recursiva, donde K={x/$\varphi^x(x)$ está definida}. Sin embargo, un razonamiento independiente permite establecer la no computabilidad de dicha función con lo que el esquema de Kalmar no es universalmente aplicable. Kalmar saca partido de ese resultado liberalizando las condiciones bajo las cuales se llega a la conlcusión de que $\neg\exists y[\varphi(x,y)=0]$. En concreto, admitiendo cualesquiera medios *efectivos* para establecer dicho enunciado. La conclusión de Kleene supone ahora admitir la existencia de una función $\varphi(x,y)$ para la cual $\neg\exists y[\varphi(x,y)=0]$ y no existe además ningún procedimiento admisible que permita establecer dicho resultado. Según

Kalmar eso supone admitir la existencia de una "(...) absolutely undecidable proposition (...)" (Kalmar 1959, p. 75).

Se sigue del argumento que para evitar esa extraña consecuencia es preciso admitir la calculabilidad efectiva de $\Psi(x)$ fuera del marco de la computabilidad formal.

El segundo tipo de argumento que interesa exponer es el sostenido por Lucas (Lucas 1961) a partir de una peculiar interpretación de los resultados de incompletitud de Gödel.

El primer teorema de incompletitud, según Lucas, da un ejemplo de una expresión verdadera formalmente indemostrable en PA -Peano Arithmetic. El modo en que llegamos a establecer la verdad de ese enunciado -el punto fijo de Gödel, o eq. CON_{PA}- pondría de manifiesto la capacidad de la mente para anticiparse con procedimientos no mecánicos a las sucesivas extensiones de PA. Tal y como Putnam señala, lo que Gödel demuestra no es la verdad de un enunciado indemostrable, sino que establece el siguiente teorema $\vdash_{PA} G \rightarrow \neg Pr([G])$. donde *G* es el enunciado de Gödel, y *Pr([.])* es el predicado de prueba de PA.

Una variante interesante de este argumento es el que utiliza la insolubilidad del problema de parada -cfr supra.- en lugar de los teoremas de incompletitud de Gödel (Webb 1980, pp. 230 y ss.). Según eso la inexistencia de una máquina capaz de resolver el problema de parada mostraría la existencia de método efectivos de demostración más allá de la computabilidad formal.

En el caso de Kalmar, el problema parece localizarse en el uso de demostraciones por reducción al absurdo en el contexto de resultados acerca del carácter constructivo de nuestra intuición matemática. En el caso de Lucas, lo que se dirime es una potencial confunsión entre el contenido de ciertos resultados negativos y su demostrabilidad por medios efectivos. En ambos casos, la crítica depende de interpretaciones acerca del contexto en que se opera con la noción intuitiva de efectividad de un procedimiento y no de la construcción de contraejemplos concretos.

10. Un posible futuro

No todo lo que cabe hacer con la CTT es refutar o confirmar su contenido. Hay aspectos periféricos ligados a su formulación que potencialmente pueden llegar a convertirse en problemas de considerable interés. Me limito a mencionar algunos que de un modo u otro ya han recibido alguna atención a lo largo de estos años.

Las reticencias mostradas por Gödel al admitir una plena adecuación intuitiva al análisis formal de la calculabilidad efectiva contrasta, como ya he dicho, con el pronto reconocimiento del carácter absoluto de la noción. Esto plantea la siguiente hipótesis:

> ¿Es posible enunciar algún postulado -afín a CTT- que prescinda de forma creible de cualquier alusión a contenidos intuitivos tales como *calculabilidad efectiva*?

En definitiva, lo que se propone es analizar la posibilidad lógica de juzgar por separado la invariancia extensional de la noción formal identificada y su adecuación a alguna noción intuitiva subyacente. Webb (Webb 1980, pp. 179 y ss.) sugiere considerar la teoría de las funciones efectivamente calculables como una doctrina acerca de las condiciones de clausura de dicha clase. Esa misma idea aparece desarrollada en Richman (Richman 1987, p. 797) aunque bajo un enfoque próximo a posiciones intuicionistas. Es cierto que la invariancia demostrada por la computabilidad siempre puede ser explicada por la intención explícita de cada una de las clases definidas de capturar todos los procedimientos efectivos conocidos. En otras palabras, hay convergencia porque implícitamente se intenta capturar el mismo concepto informal. Lo que se quiere sugerir es la posibilidad de explicar esa invariancia mediante nociones más básicas, y el deseo de que las clases definidas no diagonalicen -alternativamente, que posean condiciones de clausura razonables. La noción más básica aludida podría ser la de *codificación unívoca* en la aritmética elemental, la cual, como es sabido, se representa en [Frp]. Sin embargo, esto sólo debe tomarse como una conjetura.

Otro problema de cierta importancia es aquel que afecta al uso que se hace del adjetivo *computable* cuando se predica de conjuntos numéricos. Kleene (Kleene 1987b, p. 17) propone de forma abierta apartar del tratamiento de la genuina computabilidad todo lo referente a conjuntos numéricos finitos, cuya recursividad queda garantizada de forma trivial. Siguiendo esa sugerencia, propongo distinguir dos aspectos muy distintos de la noción intuitiva de tarea efectiva. Uno se refiere al modo de *reconocer* si un entero positivo pertenece a una lista finita previamente obtenida por cualesquiera medios y el otro lo hace al modo de *construir* un conjunto de enteros positivos a partir de una rutina en la cual no hay mención explícita o implícita a ningún conjunto finito de enteros positivos. Esta investigación -desarrollada en (Alonso, 1997b)- guarda una estrecha relación con el tratamiento de la noción de conjunto arbitrario o aleatorio que se maneja en la *random information theory* a partir de las contribuciones de Chaitin, Kolmogorov y Solomonoff. Aunque la propuesta tiene un cierto aire de trivialidad, es inmediato ver que no es lo mismo hablar de conjuntos finitos computables que hacerlo de conjuntos no finitos. Separar desde los fundamentos mismos de la Teoría de la Computación, y no de modo externo, uno y otro sentido no es fácil, ni desde luego, trivial.

El último problema que quiero mencionar merece sin duda una atención especial. De todos los que he podido ver hasta la fecha en la literatura científica, éste es, probablemente, el que mayor potencial desestabilizador posee. Su tema versa esta vez acerca de la relación existente entre la efectividad de una rutina y las posibles modificaciones que ésta puede experimentar a lo largo de su ejecución. Kleene (Kleene 1987a, p. 494) sostiene, por ejemplo, la profunda contradicción existente entre la noción de *algoritmo* y su modificabilidad, que entraña, en definitiva, su no completa determinación. Gödel, por contra, siempre apoyó de forma más o menos abierta la posibilidad de mejorar rutinas en curso preservando los objetivos y sin salir, por tanto, del contexto de la efectividad (Kleene, ibidem), (Webb 1980, pp. 222 y ss.). La mención a los objetivos declarados en un algoritmo y la posibilidad de mejorar su ejecutoria en función de aquellos, nos sitúa ante cuestiones de indudable alcance. ¿Hasta qué punto es posible admitir que un algoritmo persigue o responde a un objetivo? Si lo hace, ¿es posible mejorar el procedimiento preservando el objetivo dentro de rutinas también mecánicas? (Shanker 1987, p. 638). Finalmente, ¿no es necesario admitir que en la medida en que un algoritmo persigue optimizar el logro de un objetivo sus estados pueden no estar completamente definidos (Goodman 1987, p. 483)?

A través de esta discusión se perfila una distinción incipiente entre la noción de algoritmo y, tal vez, la de tarea efectiva. La primera es esencialmente semántica y permite expresar y por tanto, preservar sus objetivos declarados, mientras que la segunda es puramente sintáctica e incapaz de admitir precisiones ulteriores o mención alguna a los objetivos perseguidos.

Estos y otros problemas indican que pese al espectacular avance de la Teoría de la Computación en estos años, sus fundamentos, son, como en tantos otros casos, lo menos presentable de su doctrina. Son, así me lo parece, un ámbito más para el estudio y no tanto un capítulo cerrado sin remedio a la especulación rigurosa. Sobre todo a la de quienes no necesitamos rendir pleitesia a los beneficios de ciencias cuyo buen nombre no nos protege de nada.

Notas

† Este trabajo ha sido subvencionado por el proyecto Lógica y Parcialidad en Inteligencia Artificial PB96-1301-c05-02. Aprovecho la ocasión para agradecer el ánimo que María Manzano y Angel Nepomuceno me han dado en la publicación de este trabajo.

1 La referencia completa es 'Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandeter Systeme I', *Monatshefte für Mathematik und Physik* 38, 1931, 173-198. Esta obra contiene los resultados de incompletitud sobre los que se sustenta la justa fama de Gödel.

2 PA -Peano Arithmetic- en el trabajo original de Gödel.

3 El problema surge porque la función de Ackermann sólo es definible por recursión doble, esto es, mediante una aplicación de la regla de recursión sobre dos variables de recurrencia. Esta opción está expresamente excluída en la definición de [Frp] de Gödel.

4 A. Church obtuvo el grado de Doctor en Princeton en 1927. Dos años después ingresa en esa misma universidad en calidad de *Associate Professor*. Su relación con Princeton se prolonga hasta 1967, año en que la abandona trasladándose a UCLA (Enderton 1995, pp. 486-7).

5 Para tener idea del impacto de Church como maestro de toda una generación véase (Enderton 1995, p. 488)

6 La conversa, esto es, el enunciado que sostiene que toda función λ–definible es efectivamente calculable es trivial y suele omitirse.

7 Un reciente trabajo histórico a cargo de Sieg (Sieg 1997), refuta la opinión de Davis a este respecto. No obstante, éste parece ser un punto sobre el que vamos a ver una cierta polémica.

8 La única monografía íntegramente dedicada al cálculo–λ es la de Barendregt de 1981. En la actualidad se reconoce la influencia de este formalismo en el diseño de algunos lenguajes de programación, Prolog en concreto y ha vuelto a recuperar una cierta actualidad.

9 Aunque la falta de espacio me obligue a omitir casi por entero este debate, interpretar la CTT como una definición, como una tesis o, incluso, como un teorema, son opciones que modifican drásticamente lo que de ella se pueda decir -si es una definición no es ni verdadera ni falsa, por ejemplo. Todas estas opciones, y algunas más, han tenido y previsiblemente seguirán teniendo reflejo en la literatura.

10 Opción que supone descartar la existencia de un procedimiento mecánico capaz de determinar toda fórmula verdadera del la Lógica de Primer Orden.

11 El *problema de parada -halting problem-* consiste, evitando una exposición técnica, en la discusión de si todo procedimiento mecánico es, por el hecho de serlo, capaz de concluir cualquier cómputo ofrecido arrojando un resultado apropiado.

12 Gandy (Gandy 1987, pp. 76-77) sostiene que, a diferencia de lo que sucede con la conjetura de Church, cuando Turing trata las ideas que acabo de mencionar, lo hace mediante un auténtico teorema, Teorema de Turing. En este caso, el espacio para una tesis de carácter empírico no desaparece del todo, sino que cede parte de su contenido a un re-

sultado formal específico. La limitación de espacio impide que se juzge aquí el estatus epistemológico de la Tesis/teorema/definición de Turing-Church, asunto que por sí mismo ya es merecedor de una *tesis*.

13 Siguiendo así las elecciones terminológicas adoptadas por el propio Turing.

14 Esta expresión difiere de la versión histórica al referirse a funciones parciales y no sólo a funciones totalmente definidas. De hecho, la expresión original se obtiene ahora como una versión especial de la CTT genérica. Sin embargo, su significado no es exactamente el mismo.

15 R. Sylvan y J. Copeland anuncian en el abstract de su contribución a la *Australasian Association for Logic 30th Anniversary Conference* de 1995 una solución en ese sentido, pero desconozco su contenido íntegro. No obstante, todo parece indicar que la propuesta no ha sido aceptada.

BIBLIOGRAFIA

Alonso, E.: 1997a, *Turing que estás es los Cielos...*, texto de la comunicación impartida en el curso del Seminario Semántica Filosófica celebrado en el Instituto de Filosofía (CSIC) durante el mes de mayo de 1997.

Alonso, E.: 1997b, 'Juegos con dados, cómputos numéricos', pendiente de publicación en *Indoxa.*

Barendregt, H.P.: 1981, *The Lambda Calculus*, Amsterdam, North-Holland.

Davis, M.: 1965, *The Undecidable. Basic Papers on undecidable propositions, unsolvable problems, and computale functions*, N. York, Raven Press.

Davis, M.: 1982, 'Why Gödel Didn't Have Church's Thesis', *Information and Control* 54, 3-24.

Enderton, H.B.: 1995, 'In memoriam: Alonzo Church, 1903-1995', *The Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 1, nº 4, 486-489.

Feferman, S.: 1984, 'Turing in the Land of O(z)', in R. Herken (ed.): *The Universal Turing Machine*, N. York, Springer-Verlag, pp. 103-134.

Gandy, R.: 1987, 'The confluence of ideas', in R. Herken (ed.): *The Universal Turing Machine*, N. York, Springer-Verlag, pp. 51-102.

Gödel, K.: 1934, 'On undecidable propositions of formal mathematical systems', in M. Davis: 1965, *The Undecidable*, N. York, pp. 39-74.

Goldricht, O.: 1984, 'Randomness, Interactive Proofs, and Zero-Knowledge- A survey', in R. Herken (ed.): 1994, *The Universal Turing Machine*, N. York, Springer-Verlag, N. York, pp. 349-376.

Goodman, N.: 1987, 'Intensions, Church's Thesis, and the Formaliations of Mathematics', *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 28, nº 4, 473-489.

Heyting, A.: 1959, *Constructuiity in Mathematics, Proceedings of Colloquium, Amsterdam, 1957*, Amsterdam, North-Holland.

Hilbert, D., Ackerman, W.: 1928, *Grundzuge der theoretischen Logik*, Berlin.

Kalmar, L.: 1957, 'An argument against the plausibility of Church's thesis', in A. Heyting: 1959, *Constructuiity in Mathematics, Proceedings of Colloquium, Amsterdam, 1957*, Amsterdam, North-Holland, pp. 72-80.

Kleene, S.: 1936, 'General recursive functions on natural numbers', *Mathematische Annalen* 112, 727-742. Reproducido en (Davis, 1965, pp. 237-254).

Kleene, S.: 1936, 'Recursive, Predicates and Quantifiers', *Transactions of the American mathematical Society*, vol. 53, nº1, 41-73. Reproducido en (Davis 1965, pp. 255-291).

Kleene, S.: 1981, 'Origins of Recursion Theory', *Annals of the History of Computing*, vol. 3, nº 1, 52-67.

Kleene, S.: 1987a, 'Reflections on Church's Thesis', *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 28, nº 4, 490-498.

Kleene, S.: 1987b, 'Turing's Analysis of Computability, and Major Applications of It', in R. Herken (ed.): 1994, *The Universal Turing Machine*, N. York, Springer-Verlag, pp. 15-50.

Kreisel, G.: 1987, 'Church's Thesis and the Ideal of the Informal Rigour', *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 28, nº 4, 499-519.

Lucas, J.R.: 1961, 'Minds, machines and Gödel', *Philosophy* 36, 112-127.

McCarty, D.: 1991, 'Incompleteness in Intuitionistic Metamathematics', *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 32, nº 3, 323-358.

Nelson, R.J.: 1987, 'Church's Thesis and Cognitive Science', *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 28, nº 4, 581-614.

Post, E.: 1936, 'Finite combiatory processes-formulation I', *Journal of Symbolic Logic* 1, 103-105. Compilado en (Davis 1965, pp. 288-291).

Richman, F.: 1983, 'Church's Thesis without Tears', *Journal of Symbolic Logic*, vol. 48, nº 3, 797-803.

Rosen, R.: 1984, 'Effective Processes and Natual Law', in R. Herken (ed.): 1994, *The Universal Turing Machine*, N. York, Springer-Verlag, pp. 485-498.

Rosser, B.: 1984, 'Highlights of the History of the Lambda-Calculus', *Annals of the History of Computing*, vol. 6, nº 4.

Shanker, S.G.: 1987, 'Wittgenstein versus Turing on the Nature of Church's Thesis', *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 28, nº 4, 615-649.

Sieg, W.: 1997, 'Step by recursive step: Church's analysis of effective calculability', *The Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 3, nº 2.

Soare, R.: 1996, 'Computability and Recursion', *The Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 2, nº 3.

Traktenbrot, B.A.: 1984, 'Comparing the Church and Turing Approaches: Two Prophetical Messages', in R. Herken (ed.): 1994, *The Universal Turing Machine*, N. York, Springer-Verlag, pp. pp. 557-582.

Webb, J.: 1980, *Mechanism, Mentalism, and Metamathematics*, Dordrecht, Reidel.

Enrique Alonso es profesor asociado de Lógica y Filosofía de la Ciencia de la Universidad Autónoma de Madrid. Sus áreas de interés son los fundamentos de teoría de la computación, historia de la computabilidad, mecanicismo, lógicas no-clásicas y filosofía de la ciencia. Entre sus publicaciones se encuentran el libro *Curso de Teoría de la Computación* (Universidad Autónoma de Madrid, 1996) y los artículos 'Al Cuidado de la Ciencia' (*Claves*, Abril 1997) y 'Juegos con dados, cómputos numéricos' (*Éndoxa. Series de Filosofía* 10, 1998).