

LA DEFINICION DEL ELECTRON EN LA MECANICA CUANTICA (*The electron's quantum definition*)

Juan Antonio VALOR*

Manuscrito recibido: 1997.8.1.

Versión final: 1999.3.15.

* Departamento de Filosofía, Universidad Europea de Madrid, CEES, V. de Odón, 28670 Madrid.

BIBLID [0495-4548 (1999) 14: 35; p. 339-369]

RESUMEN: En este trabajo presentamos una revisión de la definición cuántica del electrón en relación con el *principio de incertidumbre* de Werner Heisenberg.

Descriptores: electrón, mecánica cuántica, principio de indeterminación-incertidumbre.

ABSTRACT: *In this paper we present a revision of the electron's quantum definition in relation to the so called uncertainty principle by Werner Heisenberg.*

Keywords: *electron, quantum theory, uncertainty principle.*

SUMARIO

1. El principio de correspondencia y el modelo atómico de Bohr
 2. La mecánica matricial de Heisenberg
 3. La mecánica ondulatoria de Schrödinger
 4. Interpretación de Born de las funciones de onda
 5. Necesidad del recurso a los conceptos clásicos
 6. Interpretación de Heisenberg
- Bibliografía

Según el punto de vista de la mecánica clásica los electrones son o bien ondas o bien corpúsculos. El problema surge cuando los experimentos llevan a la conclusión de que el comportamiento de los electrones no es ni ondulatorio ni corpuscular. En tal caso parece lógico suponer que el mundo físico se extiende más allá de las ondas y los corpúsculos y que los electrones pertenecen a esos otros objetos hasta el momento absolutamente desconocidos. Sin embargo, la mayor parte de los físicos han defendido que las ondas y los corpúsculos son aspectos complementarios, dado que conjuntamente permiten la completa descripción del comportamiento de los electrones. ¿Cómo es esto posible?

Puesto que los aspectos corpuscular y ondulatorio son excluyentes en el contexto de la mecánica clásica, la afirmación anterior debiera ser rechazada. O dicho de otro modo: si se mantiene la idea de que ambos aspectos son complementarios es porque, o bien no se tiene en cuenta la lógica clásica, o bien se ha definido un nuevo contexto en el que no se da tal exclusión. Desde nuestro punto de vista ocurre lo segundo. En la mecánica cuántica el electrón es definido desde el significado de los conceptos de "onda" y "corpúsculo" una vez que se ha prescindido de la parte del significado que hace que ambos conceptos resulten opuestos. Este proceso de definición, desarrollado en el primer cuarto del siglo XX, se analiza en el siguiente artículo.

1. El principio de correspondencia y el modelo atómico de Bohr

Desde Galileo la pretensión de la física fue el análisis del equilibrio y del movimiento de los cuerpos a través de la determinación de su estado cinemático y dinámico, esto es, a través de la determinación de las coordenadas de cada cuerpo en el espacio y en el tiempo junto con la causa de las sucesivas modificaciones de esta coordinación. En sistemas físicos cerrados, la aplicación de la causalidad venía facilitada por los principios de conservación. Así las cosas, la física llegó a una división de los fenómenos naturales en dos grandes regiones: por un lado la materia, constituida por partículas, y por tanto con una estructura corpuscular y discreta y circunscrita a cierta región localizable del espacio; por otro lado los campos y las radiaciones, de naturaleza ondulatoria y continua, por lo que al menos idealmente debían pensarse extendidos por todo el espacio.

Cualquier fenómeno nuevo que surgía era incluido en una u otra región y estudiado a través de los principios correspondientes. La investigación finalizaba cuando las propiedades específicas del nuevo fenómeno eran deducidas de las propiedades generales de la región en la que había sido incluido. Sin embargo, como es bien sabido, las dificultades encontradas a comienzos del siglo XX para incluir ciertos fenómenos en alguna de las regiones clásicas acabaron revolucionando el conocimiento científico. La teoría de la relatividad, si bien contenía algunas afirmaciones que no eran fácilmente conciliables con las ideas precedentes, no alteró los supuestos de la física clásica: esencialmente materia y campo continuaron siendo dos cosas distintas. Dado que desembocaba en la eliminación de la acción a distancia, cosa que se había pretendido con la teoría del potencial y la teoría de Maxwell del campo electromagnético, podía entenderse como

el momento culminante de la mecánica clásica. Pero con la física cuántica la concepción del mundo se torna incierta.

En la reunión de la Sociedad Alemana de Física celebrada el 14 de diciembre de 1900, Max Planck leyó un artículo titulado 'La teoría de la ley de distribución de energías del espectro normal'. La fecha de su presentación es considerada como la fecha del nacimiento de la física cuántica, a pesar de que no fue hasta un cuarto de siglo después cuando Heisenberg, Schrödinger y otros desarrollaron la mecánica cuántica moderna. Fueron muchos los caminos, pertenecientes a todas las disciplinas de la física -mecánica, termodinámica, mecánica estadística y electromagnetismo- que convergieron hasta desembocar en la nueva teoría, cada uno de los cuales mostró distintas fallas de la teoría clásica. En 1900 el citado trabajo de Planck puso de relieve que la radiación emitida por un cuerpo negro al ser calentado sólo podía ser entendida cuando se trataba la energía como una variable discreta, en lugar de la variable continua que definitivamente es desde el punto de vista clásico; en 1905 Einstein explicó el efecto fotoeléctrico suponiendo que la fuente emitía pulsos de energía electromagnética discretos de contenido energético $h\nu$, donde h es la constante de Planck y ν es la frecuencia de la radiación. Todo ello implicaba la ruptura del cuadro clásico, sencillamente porque la energía ya no podía entenderse como algo continuo frente al carácter discreto de la materia.

Pero las dificultades del nuevo punto de vista que había surgido no se pusieron de manifiesto hasta que, alcanzada una formulación satisfactoria de los múltiples fenómenos cuánticos, se abandonó el *principio de correspondencia*. Aunque fue enunciado explícitamente por Bohr en 1923, implícitamente hizo posible desde el comienzo el desarrollo de la nueva física. El principio dice que las predicciones de la física cuántica respecto del comportamiento de cualquier sistema físico se deben corresponder con las predicciones de la física clásica en el límite en el cual los números cuánticos que especifican el estado del sistema se hacen muy grandes.

El principio está fundamentado sobre la división del mundo que propone la física clásica. En último término todos los fenómenos naturales no resultan más que de la agregación de ondas o corpúsculos. Ambos conceptos están claramente definidos en la mecánica clásica, y los experimentos muestran que efectivamente los fenómenos naturales tienen, o bien las propiedades que definen el término "onda", o bien las propiedades que definen el término "corpúsculo".

Puestas así las cosas, es decir, tomando como supuesto incuestionado esta ontología, si un fenómeno, como la radiación emitida por un cuerpo

negro al ser calentado, es explicado sin respetar las leyes clásicas que permiten la definición de las ondas y los corpúsculos, lo que hay que decir es que se trata meramente de una hipótesis instrumental, de una suposición matemática inventada para facilitar los cálculos que no se corresponde con la efectividad del mundo. Por esta razón afirma Planck que el tratamiento de la energía como una variable discreta es tan sólo un artificio matemático, y no una conclusión acerca de la naturaleza de la energía. Mantenía como supuesto incuestionado que la energía es continua, tal y como la define la física clásica, pero dado que las fórmulas clásicas sólo especifican la radiación térmica emitida a bajas frecuencias, veía necesario introducir como un recurso matemático que facilitaba la adecuación de los datos teóricos a los experimentales el requisito de la discontinuidad.

El principio de correspondencia exige la reducción de las predicciones de la física cuántica a la física clásica en el límite en el que los números cuánticos se hacen muy grandes. Es decir: exige el supuesto de la división clásica del mundo, pero dado que las predicciones clásicas no se ajustan a los datos obtenidos experimentalmente, el principio permite a la vez la introducción de números cuánticos como un mero recurso matemático capaz de ajustar los datos teóricos a los datos experimentales. Puesto que haciendo, en el caso de la energía, $h \rightarrow 0$ se reducen las fórmulas cuánticas a sus límites clásicos, se pensaba que lo que había que mantener era la división clásica del mundo y que lo que había que cambiar era la explicación matemática que hasta el momento se poseía. En esta tarea se empeñó Planck durante diez años.

Por tanto, la metodología que implica el principio de correspondencia es la siguiente: 1) se mantiene la ontología clásica; 2) ante un nuevo fenómeno se recurre para su interpretación a los conceptos y teorías clásicos, y a modo de ensayo y error se introducen las condiciones cuánticas pertinentes con el fin de lograr que los datos cuantitativos extraídos experimentalmente y los deducidos teóricamente coincidan¹. Por esta razón llama Heisenberg al principio de correspondencia el *método de la adivinanza*.

Esta manera de proceder en la investigación también fue utilizada para resolver el problema de la estructura del átomo. Haciendo un poco de historia veremos que las cosas son efectivamente así.

Hacia el año 1910 existía evidencia experimental -por ejemplo, la dispersión de rayos X, el efecto fotoeléctrico, etc.- de que los átomos estaban constituidos por electrones. A través de esos experimentos se estimaba que Z , el número de electrones por átomo, era igual a $A/2$, donde A es el peso atómico del átomo correspondiente. Dado que los átomos son neutros,

deben contener carga positiva igual en magnitud a la carga negativa que proporcionan sus electrones. El problema en 1910 consistía en averiguar la distribución de las cargas positivas y negativas del átomo.

Thomson no propuso una teoría, sino un modelo de descripción tentativa del átomo, según el cual los electrones cargados negativamente estaban localizados dentro de una distribución de carga positiva. Se suponía que esta distribución tenía forma esférica con un radio cuyo orden de magnitud era de 1 \AA . Debido a la repulsión mutua los electrones debían estar distribuidos uniformemente a lo largo de toda la extensión de la esfera. En un átomo en su estado de energía más bajo posible se considera que los electrones están fijos en sus posiciones de equilibrio, mientras que en átomos excitados se considera que los electrones deben vibrar alrededor de sus posiciones de equilibrio al tiempo que emiten radiación electromagnética.

En 1911 Rutherford obtuvo, a partir del análisis de la dispersión de partículas alfa, conclusiones que no podían ser conciliadas con el modelo de Thomson. Demostró que la carga positiva no estaba distribuida en todo el átomo, sino que por el contrario estaba concentrada en una región muy pequeña que podía ser considerada como el núcleo atómico, ya que su localización se correspondía con el centro del átomo. A partir de aquí, en 1913 propuso Bohr su modelo atómico; lo que pretendía era buscar una explicación que conectase el hecho de la existencia del núcleo con el hecho de la estabilidad atómica y con las leyes espectrales de Rydberg y Balmer.

El modelo de Bohr se basaba en una extraña mezcla de ideas clásicas y cuánticas recogidas en los siguientes postulados:

1) un electrón en un átomo se mueve en una órbita circular alrededor del núcleo bajo la influencia de la atracción de Coulomb entre el electrón y el núcleo, sujetándose a las leyes de la mecánica clásica;

2) el electrón no se puede mover en cualquier órbita, sino en aquella en la que su impulso angular L sea un múltiplo entero de la constante de Planck h dividida entre 2π ;

3) a pesar de que el movimiento del electrón en su órbita es acelerado, no emite energía electromagnética, permaneciendo constante su energía total E ; se trata de un estado estacionario discreto;

4) el electrón emite radiación electromagnética cuando pasa de una órbita E a otra órbita E' de menor energía; la frecuencia ν de la radiación emitida es igual a la cantidad $E-E'$ dividida entre la constante de Planck h .

Los cuatro postulados no pretendían ofrecer explicación alguna, sino tan sólo mostrar la relación entre algunos fenómenos aparentemente independientes². El primero era el hecho de la estabilidad del átomo: un átomo regresa siempre a su estado fundamental tras una perturbación física o química. En segundo lugar se contaba con la fórmula de Balmer, que representa la regularidad de las líneas espectrales del átomo de hidrógeno, y con las fórmulas de Rydberg para el espectro de átomos de elementos alcalinos; todas ellas se escribían como una diferencia entre términos que cabía entender como rasgos característicos de los átomos. Por último se contaba con los experimentos de Rutherford, que daban cuenta de la existencia de un núcleo atómico. Para conectar estos tres hechos se supone, por un lado, que el electrón se mueve en una órbita circular con arreglo a las leyes de la mecánica clásica y a la vez se mantiene la idea no clásica de cuantización del impulso angular, y por otro lado, que el electrón cumple algunas leyes del electromagnetismo clásico -la ley de Coulomb- y a la vez que no cumple otras -la emisión de radiación de todo cuerpo acelerado-. Tal esmerada mezcla entre la física clásica y la no clásica es justificada por la manera de proceder que implica el principio de correspondencia. Todo ello tenía una ventaja, y es que se aseguraba una reducción conceptual del mundo cuántico al mundo clásico tanto más coherente cuanto más se aproximaba el fenómeno al límite clásico definido por los valores $n \rightarrow \infty$, $v \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$.

El problema surge cuando, pasados algunos años de investigación, se logra un formalismo totalmente independiente del formalismo clásico que da buena cuenta de los resultados observados. Esto propicia, como veremos, el abandono del principio de correspondencia y, consiguientemente, origina el problema de encontrar una interpretación del formalismo que haga de él una teoría física, y no tan sólo una teoría matemática.

En cualquier caso, lo que nos interesa poner de manifiesto con estas reflexiones acerca del principio de correspondencia es que el concepto "electrón"³ resulta definido desde la teoría clásica, dado que en último extremo se exige, mediante el principio de correspondencia, la reducción de las condiciones cuánticas a dicha teoría. Vemos que en los tres modelos considerados el electrón es definido como un constituyente de la materia, y por tanto, como una partícula que, además de poseer carga eléctrica negativa, posee una masa y una localización espacial y temporal claramente determinada, según el modelo de Bohr, mediante la ley de Coulomb y las leyes mecánicas de Newton. Además, el segundo postulado de Bohr introduce la cuantización del impulso angular; con ello se definen las posi-

ciones en las que se puede encontrar el electrón. Se entiende, por tanto, que el electrón es una partícula discreta circunscrita a una región localizable del espacio, es decir, que es una partícula clásica.

2. *La mecánica matricial de Heisenberg*

El modelo de Bohr, perfeccionado en 1919 por las reglas de cuantización de Wilson y Sommerfeld, funcionaba cuando se aplicaba al espectro del átomo de hidrógeno, dando cuenta incluso de la estructura fina relativista y de la escisión de las líneas en un campo eléctrico (efecto Stark). Había pues abundantes pruebas de que era correcto hablar de estados estacionarios discretos para el caso de los electrones en el átomo. Sin embargo, también había algunas dificultades:

1) En el modelo definido los electrones se mueven alrededor del núcleo como si de un sistema planetario se tratara. El electrón describe, por tanto, un movimiento periódico que tiene una determinada frecuencia. Pero esta frecuencia jamás se pone de manifiesto en las observaciones. Lo que sí se observa en el espectro son las frecuencias determinadas por el incremento de energía en las transiciones de un estado estacionario a otro, pero, ¿por qué la frecuencia del movimiento planetario del electrón no se pone de manifiesto en la frecuencia de la radiación emitida?, ¿es que los electrones dentro del átomo efectivamente no se mueven?, ¿pero cómo dejar de hablar de movimiento electrónico en el interior del átomo cuando las trayectorias de los electrones son visibles en la cámara de niebla?⁴

2) Las reglas de cuantización de Bohr-Sommerfeld son absolutamente satisfactorias en el caso del hidrógeno aun perturbado por campos electromagnéticos exteriores, pero en el caso de los átomos con más de un electrón aparecen dificultades insuperables. Para el átomo de helio, en el que dos electrones giran alrededor del núcleo, no es posible utilizar las reglas de cuantización porque caemos en el problema de los tres cuerpos, de difícil tratamiento matemático. Pero aun simplificando la situación y suponiendo dos núcleos fijos y un electrón, tal como ocurre en el ión H_2^+ , los valores de energía calculados por medio del modelo de Bohr-Sommerfeld no coinciden con los valores de energía hallados experimentalmente⁵.

El primer paso hacia la solución de las dificultades planteadas por el modelo de Bohr vino del problema de la dispersión atómica. Sobre la

formulación estadística de Einstein para predecir las transiciones inducidas por radiación entre los estados estacionarios de un átomo, Kramers consiguió en 1924 una fórmula general de dispersión que dependía, como las fórmulas de Einstein, de las energías de los estados inicial y final y de las probabilidades de transición espontánea entre ellos. El segundo paso importante vino del análisis que Kramers y Heisenberg hicieron de fenómenos de *scattering* en los que la frecuencia de la luz dispersada es distinta de la frecuencia de la luz incidente. Las fórmulas obtenidas para la deflexión a través del principio de correspondencia dependían de las probabilidades de transición de Einstein y de las amplitudes de transición. Tanto en el caso de la dispersión atómica como en el caso del *scattering* se había abandonado la idea de órbita electrónica y se había sustituido las componentes de Fourier de la órbita por los elementos matriciales correspondientes; no obstante, aún era necesario hablar de estado estacionario discreto⁶.

Todo ello parecía conducir a una nueva mecánica. Para comprobarlo se necesitaba encontrar una expresión para la energía que fuese constante en el tiempo y mostrar que la diferencia de los valores de la energía en distintos estados divididos entre la constante de Planck dan la frecuencia de la radiación emitida. Ambas condiciones eran satisfechas por el formalismo matemático; parecía que se había encontrado una *mecánica cuántica*. El resultado fue publicado en 1925 con el título 'Über quantentheoretischer Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen'⁷. Born y Jordan, y de manera independiente Dirac, encontraron pocos días más tarde que las condiciones adicionales que Heisenberg había atribuido a la multiplicación de matrices podían escribirse de la forma $pq - qp = h / 2\pi i$. De esta manera se lograba una sencilla relación que permitía deducir fácil y elegantemente las principales leyes del formalismo matemático⁸. Finalmente Born, Jordan y Heisenberg decidieron aplicar la nueva mecánica a los sistemas con varios grados de libertad, a la teoría de perturbaciones y a la teoría de la radiación. El trabajo se terminó en noviembre de 1925 y fue publicado el año siguiente⁹. Además, antes de noviembre Pauli ya había demostrado que la nueva teoría proporcionaba el espectro del átomo de hidrógeno y trataba con exactitud su comportamiento en campos eléctricos y magnéticos transversales.

La mecánica de Heisenberg conseguía evitar los dos problemas que, según hemos visto, planteaba el modelo de Bohr: por un lado, prescindía de las órbitas electrónicas al sustituirlas por estados estacionarios discretos definidos por medio de matrices; por otro, la satisfactoria explicación

del átomo de hidrógeno permitía suponer que finalmente se iba a lograr explicar el comportamiento electrónico con más de un electrón.

Según afirma el propio Heisenberg, la idea que orientaba la construcción de la mecánica cuántica era la de incluir en ella exclusivamente magnitudes observables. Puesto que la trayectoria de un electrón en el interior del átomo no era observable, había que prescindir de tal concepto y de los conceptos que lleva asociados, como son los de posición y velocidad. Observables eran tan sólo la energía, las intensidades, las frecuencias y las amplitudes, sencillamente porque se podían determinar a partir de las líneas espectrales, de las que se tiene experiencia sensible. Aunque el problema de los términos teóricos observables es central en física, no aparece en primer plano en las reflexiones de Heisenberg, por lo que, para nuestros propósitos, no hace falta entrar en análisis más detallados del tema¹⁰.

Lo relevante es que a finales de 1925 se dispone de una nueva mecánica con la que se consigue un tratamiento estadístico coherente de los problemas atómicos que hasta entonces sólo habían sido accesibles por medio del principio de correspondencia.

La nueva mecánica consiste fundamentalmente en reemplazar las órbitas electrónicas por matrices que representan la radiación emitida o absorbida. Se considera, por tanto, que se trata de un formalismo matemático parcialmente interpretado, en la medida en que conceptos físicos como energía, intensidad, frecuencia o amplitud, generan una interpretación física de la estructura matemática¹¹. Ahora bien: el asunto es que se entiende que la interpretación es parcial, es decir, que la teoría así interpretada no permite aún explicar fenómenos que deben ser explicados. Heisenberg se refiere a esta situación en la siguiente cita:

El estado de nuestro conocimiento en Gotinga hacia finales de 1925 puede resumirse así: el formalismo matemático de la mecánica cuántica estaba claro, pero su desarrollo no era completo, como más tarde se comprobaría. Había juicios concretos acerca de cómo aplicar el formalismo a la experiencia, pero a la auténtica elucidación conceptual no se había llegado aún¹².

¿Por qué la interpretación de la mecánica cuántica se consideraba parcial, o conforme a las palabras de Heisenberg, por qué a la auténtica elucidación conceptual no se había llegado aún? La razón es que no se podía explicar un fenómeno tan fácil de observar como la trayectoria del electrón que atraviesa una cámara de niebla¹³. Puesto que en la interpretación del formalismo matemático se rechaza explícitamente el concepto de órbita, y de forma más general el concepto de trayectoria del electrón en el interior del átomo, el problema surge al observar en la cámara de niebla

que de hecho los electrones siguen una trayectoria. Parece absurdo, según indica Einstein, que la trayectoria del electrón exista en la cámara de niebla y no exista en el interior del átomo, como si la existencia o no de la trayectoria dependiese del tamaño del espacio en el que se producen los movimientos¹⁴. Vemos, por consiguiente, que hay un fenómeno que debe ser explicado por la mecánica cuántica y que no puede serlo debido a que la teoría carece de los conceptos necesarios, que son los de posición y velocidad; esta es la razón por la que se considera que la interpretación del formalismo matemático es sólo parcial.

Heisenberg, al hablar de "auténtica elucidación conceptual", apunta, sin embargo, un poco más lejos. Se puede decir que el electrón carece de trayectoria y, por tanto, a la pregunta de qué es el electrón se responderá que es una entidad con tal energía, tal intensidad, tal frecuencia y tal amplitud. Y nada más. Pero el asunto es que en la cámara de niebla vemos que el electrón se comporta como una partícula. ¿Es o no una partícula? ¿Cómo definir el electrón? Si lo definimos utilizando la nueva mecánica no es posible explicar lo que se observa fácilmente en la cámara de niebla, y si lo seguimos considerando como una partícula no evitamos los problemas que genera el modelo de Bohr. ¿Qué es, en fin, el electrón? Esta es la pregunta que subyace en el fondo de toda la cuestión y a la que se dirige Heisenberg.

Conviene insistir en el hecho de que en 1925 se disponía de un formalismo matemático -o estructura matemática- parcialmente interpretado que generaba una teoría física. Se disponía, por tanto, de una teoría física, y no sólo de una teoría matemática. Y así tiene que ser, porque los fenómenos naturales no se explican por teorías matemáticas exclusivamente, sino por teorías matemáticas que de alguna manera -total o parcialmente- han sido interpretadas. Es la interpretación a través de conceptos físicos de teorías matemáticas la que genera teorías físicas que explican la efectividad de la naturaleza. Por tanto, no es que en 1925 se tuviera un formalismo matemático que careciese de interpretación, sino que la interpretación del formalismo no se consideraba definitiva. Por el contrario, si no hubiese habido interpretación alguna del formalismo, el espectro del átomo de hidrógeno, el comportamiento atómico en campos eléctricos y magnéticos transversales, y otros fenómenos físicos, hubieran quedado sin explicación alguna.

Puesto que las teorías matemáticas no dicen nada del mundo de la experiencia sensible, ningún experimento puede cuestionar una teoría matemática. Lo que sí puede cuestionar un experimento es una determinada interpretación de la teoría matemática, es decir, la teoría física resultante.

Por esta razón el experimento de la cámara de niebla no cuestionaba el formalismo matemático, aunque sí hacía pensar que la interpretación de la que se disponía era sólo parcial. Heisenberg se refiere a ello de la siguiente manera:

Para mí era por aquel entonces absolutamente clara la enorme importancia de esa forma matemática, cerrada y bella, que Born y Jordan habían dado a la nueva teoría. Pero desde el principio me rondaba la sensación de que las mayores dificultades no estribaban en la matemática, sino en el punto donde ésta hay que aplicarla a la naturaleza. Al fin y al cabo queríamos describir la naturaleza, no hacer matemática pura, y yo intuía que con el trabajo de los tres hombres [véase Born, Jordan, Heisenberg (1926)] no quedaba resuelto el problema. Ciertamente se podía calcular la energía de los estados estacionarios o la intensidad de las líneas, pero cómo describir, por ejemplo, la trayectoria de un electrón en la cámara de niebla -trayectoria que es directamente visible- eso no lo sabíamos. Nos habíamos propuesto no hablar de trayectorias, pero al fin y al cabo las trayectorias pertenecían de un modo u otro a la realidad física¹⁵.

Debido a que en 1925 ya se posee una teoría física que explica buena parte de los fenómenos naturales que hasta el momento habían sido de difícil solución, Heisenberg exige el abandono del principio de correspondencia. Es decir: puesto que ya se tenía, independientemente de la teoría clásica, una teoría que ofrecía datos acordes con los datos experimentales, no se veía la necesidad de recurrir a los conceptos y teorías clásicos como punto de partida para introducir *ad hoc* las condiciones cuánticas que permitiesen obtener conclusiones coincidentes con los resultados experimentales.

Sin embargo, aún en este momento las cosas podían verse de otra manera. Manteniendo el principio de correspondencia, Heisenberg podía aceptar como supuesto incuestionable el dualismo ontológico clásico y entender la mecánica cuántica que él había desarrollado como un mero artificio matemático. En tal caso, la investigación posterior debiera encaminarse a encontrar una explicación verdadera de los fenómenos para abandonar cuanto antes la explicación instrumental que se poseía. Pero Heisenberg no percibe las cosas así. Hasta 1922, fecha en que conoce a Bohr, su apuesta fue la de abandonar por completo lo que hasta el momento se tomaba en buena parte de la comunidad científica como incuestionable, es decir, abandonar los conceptos y las teorías clásicos y elaborar una nueva teoría generadora de nuevos conceptos. Por la reconocida influencia de Bohr reconsidera esta posición y a la altura de 1925, fecha en que está desarrollada la nueva mecánica, defiende posiciones menos rotundas: afirma que la descripción del mundo que ofrece la mecánica clásica debe ser abandonada, si bien esto no

implica el abandono de los conceptos clásicos, y afirma además que hay que entender la nueva mecánica no como un instrumento, sino como una teoría que da cuenta de la efectividad del mundo.

Por tanto, la apuesta de Heisenberg era la de reconocer la mecánica cuántica como una teoría de la naturaleza, rechazar el principio de correspondencia y buscar una interpretación más completa del formalismo matemático apoyándose en los conceptos clásicos. Todo ello con la esperanza de encontrar finalmente una definición del electrón.

3. *La mecánica ondulatoria de Schrödinger*

En 1924 Louis de Broglie propuso en su tesis doctoral la existencia de ondas de materia. La hipótesis de de Broglie consistía en asignar un comportamiento dual a la materia, cosa que ya se le reconocía a la radiación. De la misma manera que un fotón tiene asociado una onda de luz que gobierna su movimiento, una partícula de materia -un electrón, por ejemplo- tienen asociada una onda de materia que gobierna su movimiento. Dado que el universo se entendía bien como radiación, bien como materia, la hipótesis de de Broglie supone una simetría en la naturaleza que le lleva a pensar que los aspectos ondulatorios de la materia están relacionados con los aspectos corpusculares en la misma forma cuantitativa que en el caso de la radiación. Por tanto, como para el caso de la radiación ya dejó claro Einstein que $E = h\nu$, la misma relación es válida para la materia, de donde resulta fácil deducir $\lambda = h/p$, que predice la longitud de onda λ de una onda de materia asociada con el movimiento de una partícula de impulso p .

En los experimentos de óptica geométrica no se manifiesta la naturaleza ondulatoria de la luz porque las dimensiones de los aparatos utilizados son muy grandes comparadas con la longitud de onda de la luz. Si a es la amplitud de una lente, espejo o rendija, y λ es la longitud de onda de la luz que atraviesa el montaje experimental, se está en el dominio de la óptica geométrica cuando $\lambda/a \rightarrow 0$, es decir, cuando a es mucho mayor que λ . Por esta razón en la óptica geométrica se estudia la propagación de los rayos de luz como las trayectorias del movimiento de las partículas clásicas. Pero se está en el dominio de la óptica física cuando a es comparable o menor que λ ; en este caso los efectos de difracción son fácilmente observables y la naturaleza ondulatoria de la luz es manifiesta. Por tanto, para observar las características ondulatorias de la materia se necesitan rendijas o aperturas del orden de la longitud de onda de de Broglie o más peque-

ñas. Si, de acuerdo con la propuesta hecha por Elsasser en 1926, tomamos como aperturas los espacios entre planos de átomos adyacentes en un sólido cristalino, que son del orden de 1 \AA , los electrones con una energía cinética del orden de 100 eV mostrarán su naturaleza ondulatoria. Efectivamente, esto fue confirmado por Davisson y Germer en Estados Unidos y un año más tarde, en 1927, por Thomson en Escocia, los cuales consiguieron difractar haces de electrones en cristales y comprobaron que la longitud de onda electrónica era la indicada por la ecuación de de Broglie.

Según el modelo atómico de Bohr el impulso angular está cuantizado y se puede escribir como $pr = nh / 2\pi$, donde p es la cantidad de movimiento del electrón en una órbita permitida de radio r . Si en esta ecuación introducimos la relación de de Broglie, entonces resulta que $2\pi r = n\lambda$, con $n = 1, 2, 3, \dots$ Esto quiere decir que las órbitas permitidas son justamente aquellas cuya circunferencia puede contener exactamente un número entero de longitudes de onda de de Broglie. Imaginemos un electrón moviéndose en una órbita circular con una velocidad constante y con la onda asociada de longitud de onda λ siguiéndolo. Entonces la onda se arrolla alrededor de la órbita circular. Si en cada viaje del electrón las ondas están perfectamente en fase, se juntan en órbitas que contienen un número entero de longitudes de onda de de Broglie. La condición para que esto suceda es que $2\pi r = n\lambda$. Esta descripción ondulatoria sugiere ondas estacionarias, para lo cual se necesita una onda que viaje en dirección opuesta. En el caso del átomo el requisito se satisface si se supone un electrón que puede viajar en cualquier dirección de la órbita y mantiene la longitud del impulso angular exigida por Bohr.

Por tanto, el postulado de de Broglie lleva a la conclusión de que el movimiento de una partícula está gobernado por la propagación de una onda asociada; ahora bien: no dice cómo se propaga la onda. También predice la longitud de onda que se infiere de las mediciones de los patrones de difracción que han de observarse en el movimiento de la partícula, pero sólo en los casos en los que la longitud de onda es constante.

Las cuatro comunicaciones presentadas por Schrödinger¹⁶ en la primera mitad de 1926 pretendían una generalización de las ideas de de Broglie que resolviese los problemas que aún quedaban pendientes. Schrödinger suponía que los electrones eran ondas de materia cuyo estado podía ser definido a través de una función de onda -o función de estado- Ψ , de tal manera que la mecánica de desplazamientos de puntos en el espacio era sustituida por una mecánica ondulatoria en un espacio de configuración. Por tanto, faltaba el concepto de órbita electrónica, y se hablaba de esta-

dos estacionarios discretos definidos por Ψ , siendo Ψ una solución propia de la ecuación de ondas fundamental, obtenida al considerar la hamiltoniana de un sistema de partículas eléctricas como un operador diferencial que actúa sobre una función de las coordenadas que definen la configuración del sistema.

El método de Schrödinger proporcionaba de forma sencilla las energías de los estados estacionarios del átomo de hidrógeno y explicaba la dispersión de radiación por los átomos. Pero además, la imagen del átomo con la carga eléctrica distribuida continuamente alrededor del núcleo de acuerdo con la función de ondas pretendía eliminar por completo los rasgos discontinuos de la teoría cuántica, especialmente los saltos cuánticos, así como recuperar una descripción de los procesos atómicos en el espacio y en el tiempo que permitiese la conexión de la física cuántica con la física clásica, y más concretamente, con el electromagnetismo. Con ello la noción de estado estacionario, que tan problemática había resultado en la teoría de Heisenberg, quedaba al parecer definitivamente aclarada.

En cuanto a la parte estrictamente matemática de la teoría, se mantenía la sospecha de que el formalismo de Heisenberg y el de Schrödinger eran equivalentes¹⁷. De hecho, la nueva formulación de la mecánica de Heisenberg desarrollada por Bohr y Wiener en 1925 conducía fácilmente a la mecánica de Schrödinger. Fue el propio Schrödinger, en marzo de 1926, el que halló la prueba de equivalencia. Los problemas que surgieron en torno a la mecánica ondulatoria no tenían que ver por tanto con el aspecto matemático, el cual suponía un gran avance en el tratamiento de los problemas atómicos, sino con la clarificación conceptual de la teoría. Al fin y al cabo lo que se pretendía era describir la naturaleza, no hacer matemática pura. En julio de 1926 Sommerfeld invitó a Schrödinger a Munich con el fin de exponer su mecánica y allí se encontró con la oposición de Heisenberg a la interpretación de la función de onda como una distribución continua de carga eléctrica en el espacio. En septiembre las discusiones continuaron en Copenhague, donde el punto de vista de Heisenberg fue defendido también por Bohr. Eran numerosas las dificultades a las que tenía que hacer frente la interpretación de Schrödinger¹⁸:

1) La ecuación de ondas fundamental contiene una i debido a que relaciona una primera derivada en el tiempo con una segunda derivada en el espacio. Por tanto, las funciones de onda Ψ que son solución de la ecuación de ondas también contienen una i , esto es, son funciones complejas, lo cual quiere decir que especifican simultáneamente dos funciones reales, una en su

parte real y otra en su parte imaginaria. Pero esto no es lo que ocurre en el caso de las funciones de onda de la mecánica clásica. Por ejemplo, una onda en una cuerda se puede especificar mediante una función real que da el desplazamiento de varios elementos de la cuerda en varios instantes del tiempo, relacionando una segunda derivada en el tiempo con una segunda derivada en el espacio. El hecho de que las funciones de onda de la mecánica de Schrödinger sean complejas impide su interpretación física, puesto que una cantidad compleja no se puede medir con ningún instrumento. Para el físico el mundo real es el mundo de las cantidades reales.

2) Además, cuando se estudian átomos con más de un electrón, o bien colisiones entre átomos y partículas eléctricas libres, las funciones de estado no están representadas en el espacio ordinario, sino en un espacio de configuración cuyo número de dimensiones depende del número de grados de libertad del sistema total. Así, dado un sistema de n partículas la función de estado viene representada en un espacio de $3n$ dimensiones.

3) Schrödinger entendía que era posible representar una partícula mediante un paquete de ondas; así explicaba el hecho de que la carga del electrón se encuentra en una región muy pequeña del espacio. Sin embargo, en los procesos de colisión y de difracción los paquetes de onda sufren una rápida dispersión a lo largo de una amplia región, lo cual impide, según demostró Heisenberg, una explicación satisfactoria de la concentración de la carga.

4) Sucede también que la dispersión debe invertirse instantáneamente cuando el electrón es localizado durante un proceso de medida. Ocurre entonces que la función de ondas se colapsa y cambia de forma discontinua a una nueva configuración, cosa inexplicable si efectivamente se trata de ondas físicas que se expanden continuamente en el espacio.

5) La imagen ondulatoria pretendía eliminar los rasgos discontinuos de la teoría cuántica, pero impedía explicar la ley de Planck de la radiación térmica. El problema se solucionaba cuando los valores propios de la ecuación de Schrödinger eran interpretados no sólo como frecuencias, sino también como energías. Pero con ello se recuperaba de nuevo la idea de saltos cuánticos de un estado estacionario a otro, y esto era algo que Schrödinger quería evitar.

6) Aceptados los saltos cuánticos, resultaba imposible describir mediante la mecánica ondulatoria la trayectoria de los electrones a través de la cámara de niebla. El electrón se representaba mediante un paquete de

ondas cuyo movimiento debía proporcionar la trayectoria del electrón. Pero en su movimiento el paquete de ondas debía agrandarse hasta alcanzar un diámetro superior a un centímetro, hecho que no se correspondía con lo observado experimentalmente.

A pesar de todas estas dificultades, desde nuestro punto de vista lo más interesante de la teoría de Schrödinger es que aporta una nueva interpretación física del formalismo matemático y, consecuentemente, una nueva definición del electrón. Ahora el electrón se entiende como una onda. Lo que el control experimental debe demostrar es que esta definición resulta verificada, esto es, que en la naturaleza realmente existe un objeto, el electrón, que es tal y como la teoría dice que tiene que ser. O dicho de otra forma: considerando el electrón como una onda, y por tanto, definido su estado a partir de una función de ondas deducida de una ecuación más general, se debe obtener los datos numéricos hallados experimentalmente. Sólo entonces diremos que la interpretación del formalismo es completa y que la definición del electrón es adecuada.

Sin embargo, lo problemático de la teoría es que, por un lado, el significado de la definición resulta demasiado ancho, lo que impide su completa verificación, y por otro lado resulta demasiado estrecho para dar cuenta de la diversidad de fenómenos observados. Es decir: el objeto presente en la naturaleza no es tal y como teóricamente se dice que tiene que ser. Y esto por dos razones. En primer lugar, hay aspectos del significado que no son susceptibles de verificación alguna, y por tanto, no se puede saber si lo referido por ellos tiene existencia física o no. Así, las funciones de onda Ψ son funciones complejas, a diferencia de lo que ocurre con las funciones de onda que expresan el estado de una cuerda vibrante, de un péndulo, etc.; por otro lado, el estado de todos los elementos viene representado por funciones en un espacio de tres dimensiones; sin embargo, las funciones de onda están representadas en el espacio de configuración, cuyo número de dimensiones depende del número de grados de libertad del sistema total. En segundo lugar, fenómenos como la concentración de la carga, el colapso de la función de ondas en los procesos de medida, la trayectoria del electrón a través de la cámara de niebla, y leyes como la ley de Planck de la radiación térmica, no pueden ser explicados, es decir, nada en el significado del concepto "electrón" se refiere a estos hechos.

Por tanto, la definición del electrón como una onda no resulta verificada en su totalidad, lo cual quiere decir: el objeto así definido teóricamente no existe en la naturaleza, eso que es designado con el término "electrón" no es una onda, o no es sólo una onda, porque si bien es cierto que esta defi-

nición explica algunos fenómenos -las energías de los estados estacionarios del átomo de hidrógeno, la dispersión de la radiación, etc.- no es menos cierto que deja otros fenómenos sin explicación alguna -la concentración de la carga, el colapso de la función de ondas, etc.-. Nos encontramos, por tanto, ante una interpretación parcial de la estructura matemática, lo cual genera una definición del electrón que no puede ser admitida a la luz de los resultados experimentales.

4. Interpretación de Born de las funciones de onda

Entretanto Born, involucrado en la mecánica de Heisenberg, se encontraba estudiando procesos de colisión. Advirtió que el formalismo de Schrödinger se muestra más adecuado para el análisis de estos procesos cuando se postula que la densidad de probabilidad $P(x,t)$ -que especifica la probabilidad por unidad de longitud del eje x de encontrar la partícula en la vecindad de la coordenada x en el tiempo t - es igual a $\Psi^*(x,t) \Psi(x,t)$, siendo $\Psi^*(x,t)$ el complejo conjugado de $\Psi(x,t)$ ¹⁹. Esto se justifica si se considera que el movimiento de una partícula está conectado con la propagación de una función de onda asociada -la conexión de de Broglie- de tal manera que ha de encontrarse en algún sitio en el que la onda tenga una amplitud apreciable. Por tanto, $P(x,t)$ debe tener un valor apreciable donde $\Psi(x,t)$ tenga un valor apreciable. Puesto que $P(x,t)$ es real y no negativa y la función de onda es compleja, no es posible igualar $P(x,t)$ con $\Psi(x,t)$; pero sí se puede igualar con $\Psi^*(x,t) \Psi(x,t)$, ya que este producto es siempre real y no negativo. Por supuesto, existen otras funciones que se pueden generar a partir de $\Psi(x,t)$ y que son reales, tales como el valor absoluto $|\Psi(x,t)|$, pero todas ellas conducen a un comportamiento no físico de $P(x,t)$.

Aunque la posición de Born a propósito de la naturaleza de las partículas subatómicas evolucionó a partir de 1927 por la influencia de Bohr y Heisenberg²⁰, en un primer momento defendió que el producto $\Psi^*(x,t) \Psi(x,t) dx$, igual a $|\Psi(x,t)|^2 dx$, mide la probabilidad de que la partícula esté en un determinado lugar, la observemos o no. Por consiguiente, en la interpretación de Born las ondas materiales de Schrödinger resultan ser "ondas de probabilidad", esto es: representan nuestro conocimiento del estado de un sistema de partículas. Se trata de "ondas de conocimiento parcial", y no de ondas físicamente reales que se propagan en el espacio²¹.

Asimismo, Born defendía que el modelo de partículas no podía abandonarse, y esto por dos razones: porque era posible contar las partículas mediante el contador Geiger y porque era posible fotografiar su trayecto-

ria en una cámara de Wilson. Aunque consideraba que las ondas no eran algo físicamente real, atribuía realidad a las partículas según el sentido clásico. Es decir, con anterioridad a 1927 Born entendía las partículas sencillamente como masas puntuales con una posición y una cantidad de movimiento determinables en todo tiempo.

Suponer que las ondas representan nuestro conocimiento del estado de un sistema de partículas eliminaba alguna de las dificultades generadas por las ondas de materia de Schrödinger: el problema en torno a la naturaleza no física del espacio de configuración y el problema de la dispersión de los paquetes de onda dejan de plantearse, y respecto a la reducción del paquete de ondas y el colapso de Ψ se puede entender ahora que la nueva configuración representa un cambio de nuestro conocimiento del sistema como resultado de una medida²². No obstante, aún quedaban pendientes problemas de difícil solución:

1) La idea de Born de no asignar un significado físico a la función de ondas, sino a su cuadrado, entendiéndolo como la probabilidad de encontrar una partícula en un espacio y en un tiempo determinados, fue aclarada con la teoría de la transformación de Dirac y Jordan. En ella se podía transformar $\Psi(q)$ en $\Psi(p)$ y era natural suponer que $|\Psi(p)|^2$ era la probabilidad de encontrar el electrón con momento p . Pero nadie sabía cómo se representaba en el formalismo de la mecánica cuántica un fenómeno tan fácil de observar como la trayectoria de un electrón en una cámara de niebla²³.

2) Experimentalmente se observa que la materia tiene propiedades de interferencia y difracción, lo cual lleva a pensar que efectivamente estamos ante la presencia de las ondas de materia que imaginó Schrödinger. Si, como afirma Born, se trata de "ondas de conocimiento parcial", ¿qué sentido tiene decir que dichas ondas producen fenómenos de interferencia y difracción?

De nuevo nos encontramos con una interpretación parcial del formalismo matemático que resuelve algunos problemas pero deja otros sin resolver. El modelo corpuscular propuesto por Born tampoco aportaba una definición adecuada del electrón.

5. Necesidad del recurso a los conceptos clásicos

Podemos resumir lo que llevamos dicho de la siguiente manera. Desde el punto de vista de la mecánica clásica, que entiende los fenómenos físicos

como siendo bien ondas, bien corpúsculos, ante el problema de la naturaleza de los electrones, o en general de las partículas subatómicas, no hay más salida que reconocer que se trata o de una cosa o de otra. El intento de entender los electrones como ondas de materia es llevado a cabo por Schrödinger, pero fracasa por dos motivos: porque las funciones de onda complejas, representadas en un espacio de configuración, no son susceptibles de ser comprobadas experimentalmente en el contexto teórico planteado, y porque numerosos fenómenos cuánticos continúan careciendo de explicación. Sin salir del marco conceptual de la mecánica clásica, la otra alternativa consiste en entender los electrones como corpúsculos. Este es el intento que desarrolla Born con anterioridad a 1927. Sin embargo, se ve forzado a negar la realidad física de las ondas y a reducirlas a meras "ondas de conocimiento parcial", lo cual impide explicar fenómenos como la trayectoria del electrón en la cámara de niebla, la interferencia y la difracción.

Si mantenemos fielmente y hasta el final el marco conceptual de la mecánica clásica, dado que ésta divide la totalidad del mundo en dos regiones disjuntas, a saber, las ondas y los corpúsculos, decir que los electrones no son ni una cosa ni otra significa tanto como decir que los electrones no son fenómenos físicos. Algunos autores no han descartado esta posibilidad. Hay, sin embargo, otras dos salidas: la primera consiste en afirmar que se trata de fenómenos físicos y que el error está en dividir la totalidad de dichos fenómenos en tan sólo dos regiones; quizá haya otras regiones con propiedades distintas a las ya conocidas y, por tanto, regiones a las que hemos de referirnos con términos no clásicos; la segunda salida consiste en afirmar que los conceptos clásicos de onda y corpúsculo pueden ser compatibles, esto es, que sus significados no se oponen necesariamente, sino bajo ciertas condiciones; en tal caso se trata de hallar las condiciones que hacen posible que estos conceptos puedan predicarse a propósito del mismo objeto. Pero tanto en un caso como en otro nos salimos del punto de vista de la mecánica clásica; en primer lugar porque son admitidas más regiones que las reconocidas clásicamente y en segundo lugar porque las condiciones clásicas definen los corpúsculos y las ondas en relación de oposición.

Como ya hemos señalado, con anterioridad a 1922 Heisenberg pensaba que lo importante para la construcción de una teoría física era encontrar un formalismo matemático coherente, esto es, un formalismo sin contradicciones que ofreciese los resultados numéricos hallados experimentalmente, y que sólo desde él se podía alcanzar un lenguaje adecuado a los hechos que

fuera a la vez preciso. La cuestión es si este lenguaje, que necesariamente debe referirse a fenómenos cuánticos, ha de hacer uso de conceptos nuevos o por el contrario ha de recurrir, bajo ciertas condiciones, a los conceptos clásicos. La influencia de Bohr a partir de 1922 le llevó a reconocer, por un lado, que el formalismo cuántico no constituye por sí mismo una teoría física, sino que para ello necesita ser interpretado a través de conceptos físicos, y por otro lado, que la interpretación no puede prescindir de los conceptos clásicos, a pesar de que éstos no permiten una descripción exacta del mundo atómico. Los argumentos que Heisenberg ofrece en favor de esta posición son esencialmente dos, y coinciden con los ofrecidos por Bohr. Son los siguientes:

1) Necesitamos el lenguaje clásico para expresar y comunicar el resultado de nuestras observaciones y experimentos porque los aparatos de medida utilizados son objetos clásicos mesofísicos. A pesar de que la constante de Planck impide reconocer en el mundo subatómico la separación entre el objeto y el aparato de medida, lo cierto es que aquí también se pretende una descripción espacial y temporal a través de instrumentos clásicos, con lo que la descripción alcanzada sólo puede venir expresada a través de conceptos clásicos²⁴.

2) El desarrollo y aceptación del lenguaje es un proceso histórico, por lo que un lenguaje creado independientemente de este proceso está condenado al fracaso. Por la misma razón hemos de concluir que sólo los conceptos clásicos históricamente desarrollados tienen éxito; ni se ha desarrollado ni se necesita un lenguaje más preciso²⁵.

Si lo que quiere decir el primer argumento es que, dado que los instrumentos y los aparatos de medida son clásicos, la descripción física alcanzada ha de ser una descripción clásica, entonces el argumento no es correcto. La razón es que instrumentos mecánicos permiten descripciones de fenómenos eléctricos o magnéticos, instrumentos ópticos permiten descripciones de fenómenos mecánicos, etc. Por ejemplo, en el siglo pasado se estableció la especificidad de los fenómenos eléctricos respecto de los mecánicos a partir de experimentos mecánicos que pusieron de manifiesto fuerzas repulsivas, fuerzas dependientes de la velocidad, etc., las cuales no aparecían en mecánica. Ello permitió afirmar que se trataba de fenómenos nuevos, y fueron explicados por medio de una teoría que, aun utilizando instrumentos mecánicos, no se reducía a la mecánica. De la misma manera, el empleo de instrumentos clásicos permite localizar en la física cuántica

anomalías que muestran que se está ante un fenómeno de naturaleza distinta. Y se puede construir -de hecho se ha construido- una nueva teoría, utilizando instrumentos clásicos, que explique estos fenómenos, reconociendo al mismo tiempo la especificidad de la teoría respecto de la mecánica clásica. Por tanto, de modo general ocurre que es posible determinar la naturaleza -eléctrica, cuántica, etc.- de los fenómenos físicos mediante aparatos e instrumentos de naturaleza distinta.

Ahora bien, si con el primer argumento lo que se pretende señalar es que el uso de aparatos e instrumentos clásicos obliga a utilizar conceptos clásicos, el caso ciertamente es así. La razón es que el empleo de un instrumento obliga a la aceptación previa de una teoría que dice cómo debe ser utilizado el instrumento, y consecuentemente, a la aceptación de los conceptos empleados en tal teoría. Por tanto, si usamos un instrumento como instrumento clásico es porque aceptamos la teoría clásica y sus conceptos. Sin embargo, hay que decir también que la aceptación de los conceptos clásicos no impide que la descripción física resultante sea no clásica. Por ejemplo, la aceptación de conceptos mecánicos hace posible una teoría nueva, como es el electromagnetismo, la aceptación de conceptos de óptica hace posible la mecánica, etc.

Por tanto, la conclusión final en este punto es que, si en la investigación son utilizados instrumentos clásicos, no es posible abandonar los conceptos clásicos, pero esto no impide que la descripción resultante sea no clásica. Indudablemente algunas modificaciones habrá que introducir para que, aun utilizando los viejos conceptos, se obtenga una nueva teoría. Veremos más adelante qué modificaciones han de imponerse a los conceptos clásicos para que finalmente resulte la teoría cuántica.

Analícemos ahora el segundo argumento utilizado por Bohr y Heisenberg. Aquí se afirma que no es posible hablar de la naturaleza independientemente del lenguaje que históricamente ya se ha sedimentado, es decir, independientemente de los conceptos de las teorías físicas vigentes. El argumento a favor se obtiene por reducción al absurdo: en el caso de que prescindiésemos de estos conceptos, tendríamos que definir conceptos nuevos; para prescindir por completo de los conceptos físicos vigentes, la definición de los conceptos nuevos se tiene que realizar a partir del formalismo matemático; pero en tal caso el resultado obtenido es la duplicación de la teoría matemática, y no su interpretación física. Por consiguiente, si deseamos la interpretación física del formalismo matemático hemos de recurrir a los conceptos clásicos, dado que éstos son los únicos conceptos físicos disponibles.

El asunto relevante aquí, precisamente lo que hizo cambiar la opinión de Heisenberg, es que es posible utilizar los conceptos clásicos para la interpretación de la teoría matemática y obtener una teoría física distinta de la mecánica clásica. Si no es en los conceptos, entonces, ¿en qué radica la diferencia entre la mecánica clásica y la mecánica cuántica? La respuesta es: en la estructura matemática. Ahora bien: ¿cómo puede la estructura matemática determinar una teoría física?

Para responder a esto lo primero que hay que tener claro es que toda estructura matemática no es más que la explicitación, a través de la fórmulas correspondientes, de un conjunto de relaciones. Se trata nada más que de relaciones formales que se expresan utilizando signos vacíos de contenido, de la misma manera que las ecuaciones de la aritmética. A su vez, dado que en las teorías matemáticas ocurre que un conjunto de fórmulas, que llamamos *consecuencias*, se deduce de otro conjunto de fórmulas, que llamamos *axiomas*, ocurre que las relaciones explícitas en las consecuencias se deducen de las relaciones explícitas en los axiomas, y se dice que el conjunto de las relaciones de los axiomas define una nueva relación más compleja²⁶.

Cuando se busca una interpretación física de la estructura matemática, lo que se hace es sustituir los signos vacíos de contenido de la estructura por conceptos físicos. El resultado de la interpretación es una teoría física que presenta los conceptos físicos en unas determinadas relaciones, justo en las relaciones explícitas en la estructura matemática. Por tanto, como respuesta a la pregunta anterior diremos que la estructura matemática determina la teoría física en la medida en que las relaciones que guardan los conceptos físicos son las relaciones estructurales.

Por consiguiente, vemos que es posible utilizar los conceptos clásicos para la interpretación del formalismo cuántico y obtener una teoría física estrictamente cuántica. Lo que en tal caso cambiarán serán las relaciones en que aparecen los conceptos clásicos, las cuales dependen de la estructura matemática. Concretamente, ¿a qué relaciones nos referimos? Veremos que se trata de las relaciones de incertidumbre.

6. Interpretación de Heisenberg

En 1926 Heisenberg consiguió resolver el problema de la duplicidad del espectro de helio al demostrar, a partir de los estudios realizados independientemente por Dirac y Fermi, que los estados estacionarios del átomo de helio son de dos clases, en correspondencia con dos conjuntos no

combinables de términos espectrales representados por funciones ondulatorias espaciales simétricas y antisimétricas, las cuales están asociadas con orientaciones opuestas y paralelas, respectivamente, del espín electrónico. Esto contribuyó decisivamente al tratamiento adecuado de los átomos multielectrónicos: poco después Heitler y London lograron explicar la molécula de hidrógeno, se inició el análisis de los enlaces químicos no polares, se asignó un espín al protón, y se comprendió la diferencia entre los estados "orto" y "para", lo cual sirvió para explicar las anomalías del calor específico del gas de hidrógeno a bajas temperaturas. Todo este desarrollo culminó en el reconocimiento de dos familias de partículas: las que tienen espín semientero, tales como los electrones y los protones, representadas por una función de onda antisimétrica, y otras, como los fotones, representadas por funciones simétricas y a las que sólo se les puede adscribir un espín igual a 1, o bien, como las partículas alfa, carecen de espín.

Se ve, por tanto, que la nueva mecánica cuántica proporcionaba un rápido avance del conocimiento del mundo atómico. Sin embargo, aún no se había conseguido una completa interpretación física del formalismo matemático. La razón es que aún no se sabía bien lo que se designaba con el término "estado", ya que se hablaba, por una lado, de estados estacionarios en el interior del átomo, y por otro, del estado no estacionario del electrón que atraviesa una cámara de niebla, el cual no había podido ser descrito mediante ninguna de las interpretaciones que se habían inventado. Como consecuencia de ello tampoco se sabía si las partículas definitivamente tenían una naturaleza corpuscular u ondulatoria.

En 1927 publica Heisenberg un artículo que llevaba el significativo título de 'Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik'²⁷. El artículo tenía como objetivo aclarar el contenido intuitivo de la teoría cuántica. El formalismo matemático estaba plenamente aceptado desde 1925, pero, en palabras de Heisenberg que ya hemos comentado, su desarrollo no era aún completo, ya que "había juicios concretos acerca de cómo aplicar el formalismo a la experiencia, pero a la auténtica elucidación conceptual no se había llegado aún"²⁸. No se había llegado porque se carecía de una interpretación física del formalismo. La salida consistente en renunciar a las interpretaciones corpuscular y ondulatoria y buscar una interpretación radicalmente nueva y estrictamente cuántica había sido descartada por la reconocida imposibilidad de prescindir de los conceptos clásicos. Por ello, cuando se habla de "elucidación conceptual" o de "contenido intuitivo" lo que se pretende es la completa interpretación, bajo condiciones que hay que especificar, del formalismo cuántico.

tico mediante los conceptos cinemáticos y dinámicos habituales -clásicos-²⁹ con el fin de explicar un hecho tan concreto como la trayectoria de los electrones en la cámara de niebla.

Antes de la primavera de 1926 pensaba Heisenberg que para lograr esta explicación era necesario pasar de la situación experimental a la representación teórica, esto es, representar en la mecánica cuántica la trayectoria del electrón. Dicho de una manera más general, explicar la situación experimental dada consistía, a su juicio, en expresarla en el esquema matemático conocido, en describirla mediante los esquemas matemáticos disponibles³⁰. Hasta el momento se disponía de una estructura matemática interpretada esencialmente a través de los conceptos de energía, intensidad, frecuencia y amplitud, conceptos clásicos recogidos del electromagnetismo.

Para Heisenberg la situación experimental estaba clara: que el electrón atraviesa la cámara de niebla es un hecho directamente observable independientemente de la teoría física que se mantenga, y la descripción espacial y temporal de la trayectoria del electrón tampoco es cuestionable, porque es que definitivamente vemos un electrón moviéndose en determinada dirección con determinada velocidad. Por consiguiente, lo que la mecánica cuántica debe explicar es esta descripción, y la manera de hacerlo es derivándola del formalismo matemático. El problema, sin embargo, es que la mecánica cuántica requiere no del espacio y del tiempo clásicos, sino de un espacio de configuración, y desde él resulta imposible explicar el movimiento observado. Heisenberg se refiere a esta problemática en los siguientes términos:

En física observamos los fenómenos en el espacio y en el tiempo (...). Pero en este punto comienzan las dificultades reales. Observamos los fenómenos en el espacio y en el tiempo, no en un espacio de configuración o espacio de Hilbert. ¿Cómo podemos trasladar el resultado de una investigación al esquema matemático? Por ejemplo, observamos un electrón en una cámara de niebla moviéndose en determinada dirección con determinada velocidad. ¿Cómo puede expresarse este hecho en el lenguaje matemático de la mecánica cuántica?³¹

El asunto así formulado es interesante porque pone a las claras la noción ingenua de observación que Heisenberg maneja en estos momentos. Entiende que observable es la trayectoria del electrón sencillamente porque vemos su dirección y su velocidad, es decir, porque tenemos una descripción del movimiento que coincide con la observación que se realiza en el laboratorio. Son observables también la energía, la intensidad, la frecuencia y la amplitud por la misma razón, porque podemos observarlas cuando te-

nemos un espectro. Y todo ello independientemente de cualquier teoría, porque más allá de una teoría u otra el hecho mismo es que las cosas son así, tal y como están descritas.

Decimos que se trata de una posición ingenua porque entiende que es observable independientemente de cualquier teoría lo que la mecánica clásica dice que es observable. Ciertamente nunca nadie ha visto energías, frecuencias, posiciones, velocidades, etc., hasta que no ha estudiado mecánica cuántica y ha *aprendido a ver* a través de la teoría. La teoría es la que decide lo que se puede observar, y más allá de ella no hay observación física posible.

Esta posición es un lugar común en nuestros días, pero era algo que Heisenberg no había tenido en cuenta hasta la primavera de 1926, fecha en que viaja a la universidad de Berlín como participante en un coloquio sobre la mecánica cuántica y conoce a Einstein. En el diálogo mantenido discutieron las razones por las cuales en la nueva mecánica se había prescindido de la noción de órbita electrónica. La razón de Heisenberg estaba clara: sencillamente porque las órbitas no son observables, y a su juicio una teoría física debía incluir exclusivamente magnitudes directamente observables. En este punto Einstein argumenta que toda teoría física incorpora magnitudes que no son observables, y que es la propia teoría, una vez construida, la que decide lo que se puede observar. La clave del asunto es justamente ésta: que independientemente de la teoría no se puede determinar lo que es y lo que no es observable, y si se determina es por referencia a alguna otra teoría. No hay, en fin, hechos desnudos, sino hechos que se recortan sobre otros hechos mediante el ropaje teórico.

Si esto se tomaba en serio, entonces la investigación acerca del movimiento del electrón en la cámara de niebla podía dar un giro definitivo. Y así fue.

En enero de 1927 Bohr y Heisenberg habían tenido fuertes discusiones sobre qué interpretación del formalismo cuántico podía explicar finalmente la trayectoria del electrón. Aprovechando la vacaciones de febrero, Bohr se va a esquiar a Noruega y Heisenberg se queda en Copenhague con los problemas sobre la mesa. Hasta el momento había tomado como punto de partida indiscutible el hecho de que el electrón se mueve en la cámara de niebla en una determinada posición y con una determinada velocidad, y el problema era que esta descripción no podía ser deducida de la interpretación del formalismo matemático. Si tenía razón Einstein, entonces el error radicaba en tomar como indiscutible una descripción que dependía de una determinada teoría, en concreto de la mecánica clásica. El método no

podía ser, en tal caso, el de adecuar la teoría a un hecho previamente observado, sino el de intentar observar experimentalmente el hecho que la teoría ya constituida señalaba como observable bajo condiciones estipuladas teóricamente³².

Por tanto, en febrero de 1927 Heisenberg mantiene como premisas los siguientes puntos: de las discusiones con Bohr anteriores a 1922 había quedado claro que 1) es necesario utilizar los conceptos clásicos para la interpretación del formalismo cuántico, y que 2) es posible obtener una teoría específica y distinta de la mecánica clásica en la medida en que el nuevo formalismo cambia las relaciones en que aparecen los viejos conceptos; de las discusiones con Einstein en 1926 había concluido que 3) es la teoría la que deduce lo que se puede observar.

Puestas así las cosas, los pasos que hay que dar para encontrar una interpretación completa del formalismo matemático, es decir, una interpretación que explique el problema de la trayectoria del electrón en la cámara de niebla, son los siguientes: 1) establecer claramente los conceptos que se van a usar para la interpretación del formalismo; 2) especificar las nuevas relaciones en que aparecen los conceptos, que necesariamente han de venir impuestas desde el formalismo; y 3) comprobar que en la cámara de niebla efectivamente ocurre lo que la nueva teoría física predice. Justamente estos tres pasos son los que se dan en el famoso artículo de Heisenberg de 1927. Si lo propuesto se consigue, habremos encontrado una interpretación física del formalismo matemático, es decir, una teoría física específica y distinta de la mecánica cuántica, y además, podremos responder a la pregunta de qué es un electrón diciendo sencillamente que todos los experimentos confirman que el electrón tiene las propiedades que la teoría le atribuye.

El artículo comienza por establecer el significado (*Sinn*) de términos como "posición", "trayectoria", "velocidad" y "energía". Establecer el significado no supone que estos conceptos carezcan de significado alguno; este no puede ser el asunto, puesto que son conceptos que provienen de la mecánica clásica con un significado muy preciso. Lo que Heisenberg quiere ver es si se puede medir la posición, la velocidad o la energía, cuando tratamos con objetos microfísicos, porque si no se pudieran medir, entonces no serían útiles para la interpretación del formalismo cuántico, debido a que no sería posible en tal caso una comprobación experimental de la teoría física resultante.

La conclusión del artículo es que existen experimentos que permiten las medidas buscadas. Por ejemplo, la posición se puede medir con un mi-

croscopio de longitud de onda muy corta y la velocidad se puede medir con un microscopio de longitud de onda muy larga³³. Por consiguiente, estos conceptos pueden ser definidos exactamente también para los procesos atómicos, lo cual quiere decir: pueden ser utilizados en la interpretación física del formalismo.

El segundo paso consiste en especificar las relaciones en que aparecen los conceptos. Estas dependen exclusivamente del formalismo matemático, y Heisenberg las deriva de la formulación de Dirac-Jordan. Por simple deducción del formalismo matemático se llega a una desigualdad del tipo $\Delta p \Delta q \geq h/4\pi^3^4$, donde p y q son magnitudes conjugadas que se determinan hasta una incertidumbre Δp e Δq respectivamente. Si interpretamos p y q con los conceptos de posición y velocidad, lo que la relación establece es que cuanto más precisamente se determina la posición más imprecisamente se determina la velocidad y viceversa. Por esta razón la desigualdad es conocida como *principio de indeterminación* o *principio de incertidumbre*.

Hasta ahora tan sólo hemos asistido a una deducción formal y a su posterior interpretación, pero lo que hay que hacer es comprobar que efectivamente en la experiencia las cosas ocurren así. Y ya sabemos que esto se puede hacer, porque con anterioridad se ha concluido que es posible medir los conceptos clásicos que aparecen en la interpretación. Pues bien, lo observado es que cuando se intenta medir precisamente la posición con un microscopio de rayos gamma, la velocidad queda indeterminada, y cuando se intenta medir precisamente la velocidad con un microscopio de luz roja, es la posición la que resulta indeterminada. Vemos que efectivamente en la experiencia las cosas ocurren como la teoría predice, por lo que podemos considerarla correcta.

Queda pendiente el tercer punto. Se trata de ver si la teoría así interpretada explica la trayectoria del electrón en la cámara de niebla. Ahora la explicación que se busca no consiste en la deducción desde la teoría de una descripción física previa, sino en la elaboración de una nueva descripción. Según la mecánica cuántica la trayectoria no es, como indica la descripción clásica, una línea continua infinitamente delgada con posiciones y velocidades bien definidas, sino una sucesión de regiones más extensas que el electrón que sólo permite determinar la posición y la velocidad de una manera imprecisa de acuerdo con el principio de incertidumbre. Por consiguiente, no podemos ahora entender la trayectoria del electrón como la ocupación sucesiva de lugares infinitamente próximos, sino como una serie de puntos a distancias finitas.

Es cierto que lo observado directamente es una trayectoria continua, pero si entendemos que es la teoría la que decide lo que hay que observar, entonces debemos preparar el montaje experimental para comprobar que efectivamente la trayectoria es, tal como predice la mecánica cuántica, discontinua. Dicho de otra manera, debemos intentar ver, con arreglo a las condiciones determinadas teóricamente, que las cosas ocurren tal como los enunciados deducidos de la teoría dicen que tienen que ocurrir. En el caso que tratamos, basta con realizar las observaciones a través de un microscopio para comprobar que, ahora sí, son correctas.

Esto quiere decir que hemos encontrado una interpretación completa de la estructura matemática, es decir, que la teoría física resultante es capaz de explicar todas las observaciones realizadas, incluso la trayectoria del electrón en la cámara de niebla. Hemos conseguido, por tanto, una auténtica elucidación conceptual del formalismo matemático. Podemos responder, puestas así las cosas, a la pregunta que subyacía en el fondo de las dudas de Heisenberg: ¿qué es un electrón?

Ahora es definido utilizando los conceptos cuánticos, aunque están relacionados, a través del principio de incertidumbre, como no lo estaban en la mecánica clásica. La relación explícita en este principio no deja los conceptos con el mismo significado, sino que los cambia: mientras que clásicamente era posible determinar la posición y la velocidad de un ente físico a la vez con un grado de precisión ilimitado, ahora sabemos que esta determinación es necesariamente imprecisa. Por consiguiente, podemos decir que el electrón tiene una posición y una velocidad y referirnos con ello a las propiedades clásicamente conocidas, pero a esto hay que añadir que no podemos determinarlas a la vez con un grado de precisión ilimitado.

Puesto que no se rechazan los conceptos clásicos, sino que se consideran necesarios para la interpretación de la estructura matemática, entonces podemos seguir considerando la totalidad de los fenómenos naturales dividida en dos regiones, en ondas y en corpúsculos. Sobre este supuesto clásico podemos preguntar: ¿son los electrones ondas o corpúsculos? Es decir: ¿tienen una estructura corpuscular, discreta y circunscrita a una región localizable del espacio, o tienen una estructura ondulatoria y continua? A esto también da una respuesta la nueva interpretación del formalismo y es la siguiente: es posible determinar la posición del electrón. En tal caso podemos decir que se trata de un corpúsculo circunscrito a una región localizable del espacio. Pero su velocidad queda indeterminada. Y también podemos determinar la velocidad. Pero en este caso la posición queda

indeterminada, por lo que se puede decir que estamos ante una estructura ondulatoria y continua. Hemos encontrado, por tanto, una región física donde podemos calificar los objetos como ondas o como corpúsculos, atendiendo, eso sí, a las condiciones impuestas por el principio de incertidumbre.

Notas

- 1 Heisenberg (1977a, pp. 48-49, 52).
- 2 Ibid., p. 26.
- 3 Las comillas indican que se trata de un concepto. Una cosa es el concepto "electrón" y otra es eso a lo que el concepto se refiere, que es el electrón entendido como un objeto de la naturaleza. No obstante, cuando no hay peligro de confusión prescindimos de las comillas.
- 4 Véase (Heisenberg 1958, p. 22).
- 5 Heisenberg (1977a, p. 30).
- 6 Ibid., pp. 51-52.
- 7 Heisenberg (1925).
- 8 Born, Jordan (1925).
- 9 Born, Jordan, Heisenberg (1926).
- 10 Véase un análisis más detallado en (Rioja 1995b, pp. 125-128).
- 11 Acerca de las nociones de "interpretación" y "estructura" véase Mosterín, J.: 'Sobre teorías físicas y teorías matemáticas', in Mosterín (1984), y véase también (Sneed 1971).
- 12 Heisenberg (1977a, p. 57).
- 13 Born, Jordan, Heisenberg (1926, p. 33).
- 14 Heisenberg (1977a, p. 22).
- 15 Heisenberg (1977a, pp. 55-56).
- 16 Schrödinger (1926a,b,c,d).
- 17 Heisenberg (1977a, p. 57).
- 18 Véase (Rioja 1995a, p. 255).
- 19 Véase (Born 1926a, b,c).
- 20 La evolución del pensamiento de Born se explica claramente en el artículo (Rioja 1995a). Véase también (Jammer 1974, pp. 42-43).
- 21 Rioja (1995a, pp. 258-259).
- 22 Ibid., p. 259.
- 23 Véase (Heisenberg 1977a, pág. 60).
- 24 Heisenberg (1935, pp. 113-114).
- 25 Heisenberg (1977b, p. 6).

- 26 Estas consideraciones remiten al estructuralismo de Mosterín (1984), Sneed (1971) y Stegmüller (1979).
- 27 Heisenberg (1927).
- 28 Heisenberg (1977a, p. 57).
- 29 Heisenberg (1927, pp. 172-173).
- 30 Rioja (1995b, pp. 126-127).
- 31 Heisenberg (1977b, p. 4). Trad. Rioja, *ibid.*, pp. 125-126.
- 32 Heisenberg (1958, p. 28).
- 33 Heisenberg (1927, p. 179).
- 34 *Ibid.*, p. 180.

BIBLIOGRAFIA

Cuando hay traducción castellana las notas y las citas se refieren a la traducción.

- Agazzi, E.: 1974, *Temi e problemi di filosofia della fisica*, Roma, Abete. Trad. castellana: *Temas y problemas de filosofía de la física*, Barcelona, Herder, 1978.
- Bohr, N.: 1934, *Atomic Theory and the Description of Nature*, Cambridge University Press. Trad. castellana: *La teoría atómica y la descripción de la naturaleza*, Madrid, Alianza Editorial, 1988.
- : 1958, *Atomic Physics and Human Knowledge*, New York, John Willey & Sons. Trad. castellana: *Física atómica y conocimiento humano*, Madrid, Aguilar, 1964.
- : 1963, *Essays 1958-1962 on atomic physics and human knowledge*, New York, Interscience Publishers (John Willey & Sons). Trad. castellana: *Nuevos ensayos sobre física atómica y conocimiento humano (1958-1962)*, Madrid, Aguilar, 1970.
- Born, M.: 1926a, 'Zur Quantenmechanik der Stossvorgänge', *Zeitschrift für Physik* 37, 863-867. Trad. inglesa: 'On the Quantum Mechanics of Collisions', in J.A. Wheeler, W.H. Zurek (eds.): 1983, *Quantum Theory and Measurement*, Princeton University Press, pp. 52-55. Las notas se refieren a la traducción.
- : 1926b, 'Zur Wellenmechanik der Stossvorgänge', *Göttinger Nachrichten*, 146-160.
- : 1926c, 'Quantenmechanik der Stossvorgänge', *Zeitschrift für Physik* 38, 803-827.
- : 1935, *Atomic Physics*, Londres. Reimpreso en Londres, Blackie and Son Limited, 1969.
- : 1936, *The Restless Universe*, Londres. Reimpreso en New York, Dover, 1951.
- : 1949, *Natural Philosophy of Cause and Chance*, Oxford University Press.
- : 1949-1950, 'Physics and Metaphysics', *Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society*, vol. 91, nº 3, 1-19.
- : 1955, 'Continuity, Determinism and Reality', *Dan. Mat. Fys. Medd.* 30, nº 2, 1-26.
- : 1958, 'Der Realitätsbegriff in der Physik', *Veröff. d. Arbeitsgem. f. Forsch. d. Landes Nordrh.-West.* 80, 5-23.
- : 1969, *Physics in my Generation*, New York, Berlin, Springer Verlag.
- Born, M., Jordan, P.: 1925, 'Zur Quantenmechanik', *Zeitschrift für Physik* 34, 858-888.
- Born, M., Jordan, P., Heisenberg, W.: 1926, 'Zur Quantenmechanik II', *Zeitschrift für Physik* 35, 557-615.
- Bridgman, P.W.: 1927, *The Logic of Modern Physics*, New York, Macmillan.
- Einstein, A., Born, H., Born, M.: 1973, *Correspondencia 1916-1955*, México, Siglo XXI.
- Heisenberg, W.: 1925, 'Über quantentheoretischer Umdeutung Kinematischer und mechanischer Beziehungen', *Zeitschrift für Physik* 33, 879-893.

- : 1927, 'Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik', *Zeitschrift für Physik* 43, 172-198.
- : 1935, *Wandlungen in den Grundlagen der Naturwissenschaft*, Leipzig, S. Hirzel. Trad. castellana: *Los nuevos fundamentos de la ciencia*, Madrid, Norte y Sur, 1962.
- : 1955, *Das Naturbild der heutigen Physik*, Hamburg, Rowohlt Verlag. Trad. castellana: *La imagen de la naturaleza en la física actual*, Barcelona, Seix Barral, 1967.
- : 1958, *Physics and Philosophy. The Revolution in Modern Science*, New York, Harper and Row. Trad. castellana: *Física y Filosofía*, Buenos Aires, La Isla, 1959.
- : 1977a, *Tradition in der Wissenschaft*, München, R. Piper & Co. Verlag. Trad. castellana: *Encuentros y conversaciones con Einstein y otros ensayos*, Madrid, Alianza Editorial, 1979.
- : 1977b, 'Remarks on the Origin of the Relations of Uncertainty', in W.C. Price, S.S. Chissick (eds.): *The Uncertainty Principle and Foundations of Quantum Mechanics*, London, New York, John Wiley and Sons.
- Jammer, M.: 1974, *The Philosophy of Quantum Mechanics*, New York, John Wiley and Sons.
- Mosterín, J.: 1984, *Conceptos y teorías en la ciencia*, Madrid, Alianza Editorial.
- Rioja, A.: 1992, 'La filosofía de la complementariedad y la descripción de la naturaleza', *Revista de Filosofía*, 3ª época, vol. V, nº 8, Ed. Complutense, Madrid, 257-282.
- : 1995a, 'La dualidad onda-corpúsculo en la filosofía de Max Born', *Thémata* 14, 251-284.
- : 1995b, 'Los orígenes del principio de indeterminación', *Theoria* 22, 117-143.
- Schrödinger, E.: 1926a, 'Quantisierung als Eigenwertproblem (Erste Mitteilung)', *Annalen der Physik* 79, 361-376.
- : 1926b, 'Quantisierung als Eigenwertproblem (Zweite Mitteilung)', *Annalen der Physik* 79, 489-527.
- : 1926c, 'Quantisierung als Eigenwertproblem (Dritte Mitteilung)', *Annalen der Physik* 80, 437-490.
- : 1926d, 'Quantisierung als Eigenwertproblem (Vierte Mitteilung)', *Annalen der Physik* 81, 109, 139.
- : 1926e, 'An Ondulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules', *Phys. Rev.* 28, 1049-1077.
- : 1926f, 'Über das Verhältnis des Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der meinen', *Annalen der Physik* 79, 734-756.
- Sneed, J.D.: 1971, *The Logical Structure of Mathematical Physics*, Dordrecht.
- Stegmüller, W.: 1979, *The Structuralist View of Theories*, Berlín, Springer. Trad. castellana: *La concepción estructuralista de las teorías*, Madrid, Alianza Editorial, 1981.

Juan Antonio Valor Yébenes es doctor en Filosofía por la Universidad Complutense de Madrid. Actualmente es profesor del Departamento de Filosofía de la Universidad Europea de Madrid. Sus publicaciones más recientes han sido: 'Hume, Popper: el conocimiento de las determinaciones del objeto' (*Anales del Seminario de Metafísica* 31, 1997) y 'Axiomatización conjuntista de las teorías de la ciencia experimental' (*Llull* 21, 1998).