DEDUCCION Y CONOCIMIENTO EN LOS ORIGENES DE LA TEORIA DE LA DEMOSTRACION†

(Deduction and Knowledge in the Origins of Proof Theory)

Javier LEGRIS*

Manuscrito recibido: 2000.7.17.
Versión final: 2001.1.28.

* PIECE, Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Buenos Aires, Av. Córdoba 2122, 1°, Aula 111, C1120AAQ Ciudad de Buenos Aires, Argentina.
E-mail: jlegris@mail.retina.ar

BIBLID [0495-4548 (2001) 16: 41; p. 521-538]

RESUMEN: Este trabajo tiene por objetivo examinar la idea de deducción metamatemática en el programa de Hilbert, mostrando su dependencia de conceptos gnoseológicos, tales como el de conocimiento intuitivo. También se comparará esta concepción de la deducción con la fundamentación intuicionista de la lógica. Sostendré que esta deducción metamatemática lleva a una caracterización de la lógica como una teoría de las deducciones formales en un sentido particular.

Descriptores: programa de Hilbert, lógica, teoría de la demostración, teoría del conocimiento, intuicionismo.

ABSTRACT: *This paper aims to examine the idea of metamathematical deduction in Hilbert's program showing its dependence of epistemological notions, such as intuitive knowledge. This conception of deduction will be also compared with the intuitionistic foundation of logic. I will argue that this metamathematical deduction leads to a characterization of logic as a theory of formal deductions in a particular sense.*

Keywords: *Hilbert's program, logic, proof theory, epistemology, intuitionism.*

SUMARIO

La teoría de la demostración se constituyó como disciplina hacia comienzos de la tercera década del siglo XX en el contexto del programa de Hilbert para fundamentar la matemática. El núcleo metodológico del programa era el "punto de vista finito" (*finite Einstellung*) y según este punto de vista eran caracterizadas las demostraciones matemáticas con contenido (*inhaltlich*), es decir, las demostraciones matemáticas informales. El punto de vista finito se aplica a diferentes tipos de objetos matemáticos: reglas, enunciados moleculares, definiciones, etc. y sus rasgos centrales consisten en limitar las operaciones a un número finito de objetos y funciones, en no tomar en consideración conjuntos infinitos y en no admitir definiciones impredicativas. La adopción del punto de vista finito da lugar a la matemática finitaria. En el vol I de los *Fundamentos de la matemática* de Hilbert y Bernays puede leerse:

> Hablaremos de una formación de conceptos y de afirmaciones finitarias, expresando con la palabra 'finitario' en cada caso el hecho de que la reflexión, afirmación o definición en cuestión procede dentro de los límites tanto de la concebibilidad en principio de objetos y de la ejecución en principio de procedimientos (Hilbert & Bernays 1934, p. 32).

Estas nociones de concebibilidad y ejecución requerían algún tipo de aclaración filosófica. El programa de Hilbert buscó respaldar filosóficamente el punto de vista finito en algunas ideas acerca de la naturaleza del conocimiento humano propias de la filosofía moderna. Estas ideas se encontraban en la tradición kantiana vigente en la filosofía en lengua alemana a comienzos de siglo. Así, se hacía corresponder los procedimientos finitarios con el conocimiento matemático intuitivo. La teoría de la demostración se ofrecía como la metodología adecuada para fundamentar la matemática de acuerdo con esta posición acerca del conocimiento matemático. En efecto, las demostraciones realizadas de acuerdo con el punto de vista finito proporcionaban un conocimiento intuitivo. De este modo, la teoría de la demostración ofreció una respuesta a la pregunta por la estructura matemática subyacente al razonamiento humano.

Este trabajo tiene como objetivo esclarecer la concepción de la deducción que subyacía al punto de vista finito, a la que se puede llamar "deducción matematemática", y mostrar su dependencia de conceptos gnoseológicos. En efecto, se verá que la corrección de las deducciones se basaba en un conocimiento intuitivo. Además, se comparará esta concepción de la deducción con la fundamentación intuicionista de la lógica, mostrando semejanzas y diferencias. Esta comparación es importante no sólo por su valor aclaratorio, sino también por la influencia que tuvo el intuicionismo en el desarrollo posterior de la teoría de la demostración. Como resultado del trabajo, sostendré que esta caracterización de la deducción metamatemática lleva a un modo peculiar de entender la lógica como teoría de las deducciones formales. En la exposición se hará referencia tanto a artículos de Hilbert como de Paul Bernays, y también a los trabajos seminales de Alexander Kolmogorov y Arendt Heyting, todos ellos escritos durante la década de 1920 y comienzos de la de 1930.[1]

1. La teoría hilbertiana de la demostración

En un artículo publicado en 1930 bajo el título 'La filosofía de la matemática y la teoría hilbertiana de la demostración', Bernays expuso ante un público filosófico las ideas que subyacían a la teoría de la demostración, tal como esta resultaba del programa de Hilbert. En ese momento, a fines de la década de 1920, el programa se encontraba en su fase madura, y los objetivos del mismo habían sido claramente formulados y discutidos en una serie de trabajos debidos a Hilbert como, por ejemplo, la célebre conferencia "Pensamiento axiomático" de 1917.

Estos objetivos eran, en suma, los siguientes: (i) la construcción de sistemas axiomáticos para los diferentes ámbitos de la matemática, (ii) la elaboración de demostraciones de consistencia para los mismos y (iii) la determinación de la decidibilidad de los problemas matemáticos por medio de procedimientos finitarios. El programa requería además no sólo la formalización de la matemática, sino también, y de manera conjunta, de formalización de la lógica. Esta reconstrucción del razonamiento lógico había recibido un importante impulso a partir de la confrontación con el intuicionismo de L.E.J. Brouwer, para el cual algunos principios y procedimientos deductivos no resultaban admisibles. El programa estaba en proceso de realización y se tenía la esperanza de poder completarlo; todavía no había tenido lugar la reformulación del programa que resultaría como consecuencia de los teoremas de incompletud de Gödel y de la cual surgiría la teoría de la demostración en su forma actual.

Bernays argumentaba en su trabajo que el programa de Hilbert, es decir, la "teoría hilbertiana de la demostración", era la solución adecuada a la discusión en torno de los fundamentos de la matemática que había surgido como consecuencia de las paradojas en teoría de conjuntos. Para él la prueba de consistencia para la lógica, de un lado, y el carácter finitario de los métodos para realizar tal prueba, de otro lado, eran los dos *principios conductores* (*Leitprinzipien*) que caracterizan a la teoría de la demostración (Bernays 1930a, pp. 363 y s.).

En una primera parte propedéutica del artículo, Bernays introducía el método axiomático o "axiomática" en su "nuevo giro", esto es, como una axiomática *formal*, según la cual "para el desarrollo de una teoría axiomática no importa el contenido cognoscitivo de sus axiomas" (Bernays 1930a, pp. 328). Así, Bernays describía la axiomática de Hilbert como una *metamatemática*, es decir, como un método para construir *a priori* teorías matemáticas en términos de sistemas formales, es decir, para construirlas considerando irrelevante el contenido de cada teoría. En esto consiste la "abstracción formal" que se efectúa respecto del contenido de la teoría. Los predicados de la teoría axiomatizada eran considerados independientemente de su significado preformal, haciendo referencia a un dominio cualquiera. De esta manera, los objetos de los que se ocupaba la teoría de la demostración eran los símbolos formales, entendidos como meras marcas.

Ahora bien, Bernays distinguía dos momentos esenciales en las demostraciones: la aclaración de conceptos, que llamaba momento de la *reflexión*, y otro momento que es de naturaleza matemática y que denominó el momento de la *combinación* (Bernays 1930a, p. 334). El primer momento analiza o esclarece conceptos; el segundo permite, de manera combinatoria, el progreso hacia "algo nuevo". El primer momento estaría ligado a la formación de los conceptos de la teoría a formalizar y a la elección y formulación de sus axiomas, así como la explicitación de las reglas lógicas a emplear. El segundo momento consiste en la deducción de teoremas a partir de los axiomas. Este "método axiomático" que Bernays describe, es el que había sido propuesto por Hilbert desde los *Fundamentos de la geometría* en adelante, considerándolo el método propio para la construcción de teorías en matemática y que desarrolla el patrón metodológico tradicional de los *Elementos* de Euclides.

2. El "momento combinatorio" en las demostraciones

No obstante, una demostración se caracteriza esencialmente de acuerdo con el segundo momento, el momento "combinatorio", pues "la importancia de una demostración matemática se establece después de que se han fijado los enunciados de partida y las reglas de inferencia" (Bernays 1930a, p. 334). Como dice más adelante, el carácter *lógico* de las reglas de inferencia descansan en la "combinación" y se muestra en la *ejecución real* (*wirkliche Vorführung*) de la demostración y no en el análisis de significados. Es esta ejecución lo que constituye una deducción. El conocimiento que se obtiene por medio de la ejecución de la demostración es puramente *formal*, es decir, es relativo exclusivamente a los símbolos formales *qua* objetos y deja de lado el contenido de las fórmulas que contiene; resulta de la aplicación de reglas que prescriben la transformación de fórmulas. Esto es lo que se entiende como una "deducción formal".

Bernays ilustraba su afirmación con el caso de una aplicación de la regla de *modus ponens* en una derivación formal (Bernays 1930a, p. 335). Sean A y A $\rightarrow$ B dos fórmulas del lenguaje formal que no sean axiomas del sistema en consideración. Existe, entonces, una secuencia de inferencias S que conduce a A y otra T que conduce a A $\rightarrow$ B, y el *modus ponens* permite derivar la fórmula B. Bernays afirmaba aquí como un "nuevo paso en el conocimiento" el hecho de establecer la coincidencia entre la fórmula final de la secuencia T y el condicional formado por la fórmula final de la secuencia S, es decir A, y la fórmula a derivar B. Expresamente afirma que

> la coincidencia que se puede constatar en el presente caso no se puede extraer directamente del contenido de las reglas *formales* de inferencia o de la estructura de las fórmulas de partida, sino que se extrae de la estructura que se obtiene por medio de la aplicación de las reglas de inferencia, es decir por medio de la ejecución de la demostración (*loc. cit.*).

Esta aplicación de reglas se hace sobre fórmulas, es decir sobre marcas entendidas como objetos concretos, sin significado. Lo que Bernays quiere decir aquí es que las reglas lógicas son reglas puramente combinatorias que se aplican a esos objetos que son las expresiones formales. Un ejemplo adicional aclarará mejor esta idea. La regla de conjunción entre dos enunciados indica, dentro de una deducción, la operación de unir los últimos elementos de dos deducciones. Sea una deducción S que termina en un enunciado A y otra deducción T que termina en un enunciado B, la regla prescribe la consideración conjunta de ambos enunciados. Así, lo que permite introducir la afirmación de una conjunción respecto de las fórmulas A y B es que ambas han sido deducidas en la demostración. Sobre la base de esta perspectiva, cabe preguntarse cuáles son las peculiaridades que debe contener una deducción para poder introducir fórmulas que incluyan los demás símbolos lógicos, es decir, las restantes conectivas y los cuantificadores. El resultado de este proceso es un sistema lógico.

3. Conocimiento intuitivo

Ahora bien, esta "ejecución real" de una demostración (que es la deducción) presupone evidencia intuitiva, que es lo que le otorga validez. Dicho de otro modo, la justificación de estos procedimientos combinatorios está en la *intuición*. En otro trabajo de la misma época, Bernays hace la siguiente observación:

> La lógica como teoría de los juicios y los razonamientos de ningún modo puede desarrollarse sin un cierto recurso a un conocimiento intuitivo. Se trata aquí de la representación intuitiva de lo discreto, a partir de la cual obtenemos las representaciones combinatorias más primitivas, en particular la de la sucesión (Bernays 1930b, p. 108).

Bernays resume y explicita aquí una idea que ya había sido claramente por Hilbert, quien en un trabajo publicado en 1922 afirmaba:

> Como condición previa para la aplicación de inferencias lógicas y la realización de operaciones lógicas algo debe estar dado ya en la representación: ciertos objetos discretos que se dan intuitivamente como vivencia inmediata antes de todo pensamiento (Hilbert 1922, p. 162, véase también Hilbert 1926).

En otras palabras, ciertas estructuras de conocimiento son condición necesaria para la ejecución de deducciones.[2]

Es sabido que el concepto de intuición ha recibido en la historia muy variadas interpretaciones. Como una capacidad de conocimiento la intuición se aplica, en un primer sentido, a *objetos*: una intuición de objetos consiste en una captación directa de los mismos a la manera de la percepción. Esta captación puede ser sensible o intelectual. En un segundo sentido, se habla de *enunciados* cuya verdad se conoce por intuición. Este es el caso de verdades *evidentes*: la evidencia para la verdad de un enunciado es dada mediante intuición. La intuición, así pues, aparece como un método para *justificar* la verdad de enunciados. De este modo, se puede aceptar:

(1) A es un enunciado intuitivamente evidente si, y sólo si, la verdad de A está justificada por intuición.

De donde se sigue:

(2) Si A es intuitivamente evidente, entonces la verdad de A está justificada.

Obviamente, si la verdad del enunciado A está justificada, entonces puede afirmarse que A es verdadero. Por ello, la intuición es considerada como una capacidad de conocimiento que sirve para determinar la *verdad* de enunciados.

Este segundo sentido referido a enunciados descansa en el primero: los enunciados cuya verdad es justificada por intuición hablan de objetos que son captados intuitivamente. Estas intuiciones de lo discreto eran la condición necesaria la validez de las inferencias lógicas. Como decía Hilbert, "si la inferencia lógica tiene que ser segura, entonces estos objetos deben poder ser abarcados completamente en todas sus partes" (*loc. cit.*).

Estos objetos captados intuitivamente eran, en el programa de Hilbert, el núcleo seguro e indudablemente cierto de la matemática, a saber, la aritmética finitaria. Los objetos intuidos, la "base intuitiva pura" de esta aritmética finitaria eran marcas, signos concretos, que podían ser, por ejemplo, barras o los signos 1+1+1+1 desprovistos de su significado numérico (véase Hilbert 1922, p. 163 y también Hilbert 1926). Es la combinación de estos signos concretos por medio de operaciones lo que constituye la aritmética finitaria. Aunque sus límites no aparecían nítidamente establecidos en el programa, esta aritmética finitaria incluía sin duda los principios relativos a la función de sucesor y el concepto de recursión primitiva (una elucidación de la naturaleza y métodos de esta aritmética finitaria puede encontrarse en Lassalle Casanave 1998).[3] Así, las operaciones finitarias pueden ser vistas como una interpretación del conocimiento matemático intuitivo, es decir vale la igualdad

(3) aritmética finitaria = aritmética intuitiva.

Sus leyes son enunciados evidentemente verdaderos, cuya verdad es conocida de manera intuitiva.

Sobre esta base puede afirmarse:

(4) Si A es un enunciado verdadero de la aritmética finitaria, entonces la verdad de A está justificada por intuición.

Esta es la tesis gnoseológica central que parece subyacer al programa de Hilbert (Charles Parsons la ha formulado explícitamente en su trabajo de 1998). Obviamente, vale la pena remarcar que todo procedimiento que exceda la matemática finitaria no será intuitivo, es decir, no conducirá a la afirmación de verdades evidentes e indubitables.

4. *Deducción e intuición*

En este punto debe aclararse qué significa que las deducciones realizadas de acuerdo con el punto de vista finito sean *intuitivas*. Se pueden establecer dos sentidos diferentes, según se considere la intuición como aplicada (i) a la justificación de la verdad de enunciados o (ii) a la justificación de la corrección de procesos de deducción. En el primer caso, la deducción proporciona una justificación intuitiva de *enunciados* verdaderos, es decir, el enunciado final de la deducción también está justificado por intuición. En el segundo caso el *proceso* de aplicación de reglas que constituye la deducción queda justificado de manera intuitiva. El primer sentido es razonable únicamente si se piensa que las deducciones *preservan* el carácter intuitivo de enunciados. Si las premisas de una deducción son conocidas intuitivamente, entonces la conclusión también lo es. Este sentido es cuestionable en la medida en que la deducción no es una manera *inmediata* de reconocer la verdad de un enunciado.

El segundo sentido, presente en el texto de Hilbert citado arriba, se encuentra ya en la discusión clásica que Descartes hace de este problema en la Regla III de sus *Reglas para la dirección del espíritu.* Descartes distingue entre intuición y deducción diciendo que en esta última hay un "movimiento" o "sucesión" del pensamiento. Pero este movimiento "intuye cada cosa en particular" (*Reglas* AT, X, 369) y el encadenamiento de cada uno de los pasos de esta sucesión lleva a la certeza del punto final. Cada elemento que es captado en ese movimiento resulta intuido. Esto conduce al segundo sentido, que es el que realmente interesa. El hecho de que cada paso de la deducción sea correcto es conocido por intuición y el carácter intuitivo de todo el proceso -afirmado en el texto de Hilbert- sólo puede afirmase en un sentido secundario o derivado. En suma, no es el resultado último de la deducción aquello que es conocido por intuición, sino que cada paso se justifica por intuición. Este concepto de intuición es empleado para determinar lo que se entiende por *validez* o corrección de cada paso de una deducción: la validez tanto de las reglas elementales como la de su aplicación se justifican por intuición.[4]

La caracterización del proceso de deducción tal como aparece en Descartes está teñida de referencias psicológicas, como, por ejemplo, la dependencia de la memoria de los sujetos concretos de conocimiento. Por el contrario, en el punto de vista finito, la interpretación de la intuición deja de lado estos aspectos: una deducción es intuitiva porque la estructura matemática que subyace a ella es finitaria. Es decir, los procedimientos combinatorios mediante los cuales se construye la deducción son finitarios. Al postular que todos los procedimientos combinatorios que constituye una demostración formal pertenecen a la aritmética finitaria, el carácter *cierto* del proceso de demostración queda asegurado. Si los procesos inferenciales que resultan de estas reglas tienen una base finitaria, entonces puede asegurarse la clausura deductiva de la teoría, es decir, un "control" deductivo sobre la misma. Pero además, estos procedimientos finitarios se correspondían con el conocimiento matemático intuitivo más elemental que todo sujeto de conocimiento posee.

5. La deducción finitaria

De todo lo expuesto se sigue que el "momento combinatorio" del método axiomático incluía deducciones lógicas, que eran entonces un elemento esencial del "pensar finito" subyacente a la teoría de la demostración. La validez de las mismas quedaba justificada por el carácter intuitivo de cada uno de los pasos que las componían. Sin embargo, la deducción lógica también era considerada *qua* objeto de formalización axiomática como base de la matemática en su totalidad y es objeto también de una prueba de consistencia. Tal como Hilbert mismo afirmaba, los procedimientos deductivos que se empleaban en la matemática debían ser objeto de formalización, dando lugar a sistemas formales.

De este modo, hay dos planos en los que Hilbert tematizaba la lógica: de un lado, el plano metamatemático de la lógica de los procedimientos finitarios, que es la que debía *usarse* en la teoría de la demostración y, de otro lado, la lógica que subyace a la matemática clásica, a ser fundamentada y formalizada. En los artículos de Hilbert, no es siempre fácil distinguir ambos planos. La situación se puede resumir con las siguientes palabras. Dentro de su programa, Hilbert quería reconstruir formalmente la lógica clásica con el fin de probar su consistencia y otorgarle un fundamento seguro. Esta reconstrucción formal debía llevarse a cabo empleando una "lógica del pensamiento finito", con características propias. Esta era la lógica "concreta" basada en un conocimiento intuitivo.

Ahora bien, ¿cuáles debían ser sus principios básicos? Resulta natural pensar que la "lógica del pensamiento finito" debía encontrar problemáticos ciertos principios de la lógica clásica, de un modo comparable a como el intuicionismo objetaba la validez universal del principio de tercero excluido o el de doble negación. En un trabajo de 1927, Bernays, al exponer los principios lógicos de acuerdo con el programa de Hilbert, reconocía las siguientes reglas de inferencia como válidas para usar en demostraciones: (1) *el dictum de omni et nullo* (es decir, el paso de una cuantificación universal a cualquiera de sus instancias), (2) *el modus ponens*, (3) la ley de no contradicción y la ley del tercero excluido y (4) el razonamiento por casos.

De acuerdo con la línea de argumentación que he seguido hasta ahora, estas reglas deberían aceptarse como intuitivas. El hecho de aceptar el principio de tercero excluido significa que la negación finitaria, es decir, aplicada a afirmaciones respecto de conjuntos finitos, no es problemática, siendo una operación definida para todos los casos. Su aplicación, entonces, debería estar justificada por intuición. La negación es caracterizada a partir de la contradicción. Una negación $\neg A$ informa que se ha llegado a una contradicción en una deducción. Una contradicción sería un enunciado que afirma algo que no se sigue de los axiomas y reglas supuestos, por ejemplo, que una serie de tres barras es igual a una secuencia de cuatro barras. La negación de este tipo de enunciados no parece problemática.

En una conferencia pronunciada con anterioridad al trabajo de Bernays recién mencionado, Hilbert encontraba en los cuantificadores las expresiones que podían referirse a totalidades infinitas y que escapan, por lo tanto, al dominio de lo justificable intuitivamente.

> ¿Dónde ocurre por primera vez el salto más allá de lo intuitivo concreto y finito? Evidentemente en la aplicación de los conceptos 'todos' y 'hay' (Hilbert 1923, p. 36).

La referencia a un dominio arbitrario no era posible desde el punto de vista finito. No obstante, los cuantificadores debían ser capaces de referirse a dominios infinitos, a "lo transfinito". El problema respecto de la deducción era el de asegurar su carácter finitario sin necesidad de restringir el dominio de cuantificación. Hilbert parece haber recibido la motivación para asignarle este papel tan decisivo a los cuantificadores de la variante de intuicionismo que defendía Hermann Weyl en ese momento. En efecto, poco antes de que Hilbert ofreciera esta conferencia, Weyl había fundamentado su rechazo del principio de tercero excluido a través de un análisis del significado de enunciados universales y existenciales (véase Weyl 1921).[5]

En el caso de los procedimientos de deducciones puramente lógicos, se pudo demostrar que los procedimientos involucrados son finitarios. Este es el resultado que el matemático francés Jacques Herbrand presentó en su tesis doctoral de 1930, conocido como "teorema de Herbrand" y al que Bernays caracterizó como el "teorema central" de la lógica debido a que asegura el carácter efectivo de las deducciones lógicas. El teorema afirma que el problema de demostrar las leyes lógicas que incluyen cuantificadores se puede reducir a los métodos de demostración necesarios para demostrar leyes relativas exclusivamente a conectivas, los cuales son finitarios (véase Herbrand 1930). Así, se establecía que la deducción lógica no requería más que el "pensar finito"; los procedimientos de deducción elementales eran finitarios. Siguiendo la perspectiva que he presentado hasta ahora, el proceso de deducción tiene una base intuitiva que justifica su validez. Sin embargo, esto no implica que todos los principios de los que parte la deducción sean justificables por intuición.

El teorema de Herbrand presupone, de algún modo, un tratamiento finitario de los cuantificadores. No voy a considerar aquí los procedimientos técnicos que Herbrand desarrolló. Sin embargo, voy a intentar presentar una idea afín (que es muy familiar para aquellos que conozcan la deducción natural de Gentzen). Piénsese en el caso del cuantificador universal. ¿Qué condiciones presenta una deducción para que se pueda afirmar una fórmula que lo contenga como símbolo lógico principal? En la deducción tiene que haber aparecido una variable libre que no aparezca en las premisas de la deducción. Esto quiere decir que lo que se haya afirmado en los sucesivos pasos de la deducción acerca de esta variable no se afirma de ninguno los términos que aparezcan en las premisas. Esta independencia de la variable libre de lo que se afirme en las premisas es lo que permite afirmar su universalidad: lo que se afirma de él se afirma de "cualquiera" del dominio en consideración. Esta idea puede parecer extraña al no emplear ideas más habituales como las de interpretación o satisfacibilidad. No obstante, es la idea bien conocida de asignar como referencia de esa variable libre a un "objeto arbitrario" del dominio.

Una idea semejante era la que Hilbert había ensayado ya desde 1923. mediante la introducción de una función de selección la cual, aplicada a predicados, elige un elemento arbitrario del dominio. A partir de esta función se definía el cuantificador universal. Esta es la función épsilon, εA, descripta en el trabajo "Sobre el infinito" y que llama "función transfinita". Respecto de esta función, Hilbert presenta un "axioma de elección", $A[x] \rightarrow A(\varepsilon A)$ y el cuantificador universal se define a partir de la equivalencia $A(\varepsilon A) \leftrightarrow \forall x A[x]$. Los términos que resultan de aplicar esta función (los "términos ε") se aplican sólo un número finito de veces en una deducción, dado que toda demostración es finita, de modo que podían ser interpretados finitariamente (véase Hilbert 1926).

6. Deducción intuicionista y deducción finitaria

Una mejor comprensión de las ideas acerca de la deducción metamatemática se obtiene al compararlas con la fundamentación de la lógica en el intuicionismo. Es sabido que el programa de Hilbert y el intuicionismo de Brouwer fueron escuelas rivales, si bien ambos compartían un punto de vista compartido en cuanto a la independencia de la matemática respecto de la lógica. Es común a ambas posiciones el hecho de afirmar que la matemática es *previa* a la lógica: la lógica surge como consecuencia del razonamiento matemático y, por lo tanto, es dependiente de este. Así, en su conferencia inaugural de 1913, Brouwer distinguía claramente entre el "formalismo" (en el cual él incluía no sólo las ideas de Hilbert, sino también las de Peano) y su propio intuicionismo, pero al mismo tiempo destacaba un "acuerdo" respecto de considerar la exacta validez de las leyes de la matemática como "leyes de la naturaleza" (véase Brouwer 1913, p. 78).

También es cierto que tanto Hilbert como Brouwer hacen descansar sus respectivas propuestas de fundamentación de la matemática en un conocimiento intuitivo. Para ambos existe un pensamiento intuitivo básico del cual surge la matemática en su totalidad. En el caso de Brouwer vale la identidad:

(5) aritmética constructiva = aritmética intuitiva.

De todos modos, las diferencias se encuentran en (i) cómo se entiende ese conocimiento intuitivo y (ii) en el enfoque metodológico para llevar a cabo la reconstrucción de la matemática. En lo que hace al conocimiento intuitivo, Brouwer, en su tesis doctoral de 1907, basaba la aritmética en una intuición *temporal*:

> El fenómeno primordial aquí no es más que la intuición del tiempo, en la cual es posible la repetición de 'cosa en el tiempo y de nuevo una cosa', y sobre cuya base momentos de vida pueden descomponerse en secuencias de cosas cualitativamente diferentes (Brouwer 1907, p. 81).

Esta intuición es *a priori*, independiente de la experiencia:

> La matemática es una creación libre del espíritu, independiente de la experiencia; se desarrolla a partir de una única intuición *a priori* (Brouwer 1907, p. 179).

Son notorias las diferencias en el tono y en el espíritu entre la posición filosófica de Brouwer y la de Hilbert, las que también se manifiestan en el plano metodológico. Brouwer le otorga un carácter secundario al simbolismo y al lenguaje en la fundamentación del conocimiento matemático. El lenguaje matemático es sólo "un medio de comunicación y un auxilio para la memoria" (Brouwer 1907, p. 169).

Por lo demás, es sabido que una diferencia esencial entre ambos -que afecta especialmente a las respectivas concepciones de la deducción- está en la noción de infinito. Mientras que Brouwer acepta un camino conceptual para concebir el infinito a partir de una regla de generación, Hilbert parte de la imposibilidad de obtener una representación sensible, siendo posible como una "idea de la razón" (en un sentido reminiscente al de Kant). Es esto lo que conduce a diferentes concepciones de los principios lógicos que rigen las demostraciones. Mientras que Brouwer, al admitir la concebibilidad del infinito, debe restringir la validez de principios como el del tercero excluido, Hilbert, en el contexto del pensamiento finito, acepta la validez de los principios clásicos. El enfoque es gnoseológico y no ontológico, pues consiste, en realidad, en admitir o no la posibilidad de un conocimiento del infinito matemático y en cómo puede ser fundamentado este conocimiento.

Ahora bien, Brouwer no se ocupó en forma explícita de caracterizar la deducción. Esto puede explicarse fácilmente a partir de su rechazo a considerar la lógica de manera separada de la matemática. Sin embargo, las ideas de Brouwer conducen a concebir las demostraciones como un tipo de *construcciones* no lingüísticas que un sujeto realiza sobre la base de intuiciones matemáticas independizables de un material sensible. Por lo tanto, son pensadas de manera independiente de su expresión concretas mediante los signos de un lenguaje. Hilbert, por el contrario, piensa en las demostraciones entendidas como secuencias de marcas o signos, que son, en definitiva, objetos físicos que son captados por la percepción sensible.

Sobre la base de las ideas de Brouwer, Kolmogorov y Heyting tematizaron la deducción intuicionista. Kolmogorov publicó en 1932 un artículo en el que interpretaba las constantes lógicas mediante el concepto de "tarea" o "problema" (*Aufgabe* en alemán). Este concepto era entendido en el sentido de, por ejemplo, los problemas constructivos de la geometría, que exigen la construcción de figuras geométricas, siendo el mismo procedimiento de construcción el que da los elementos para solucionar el problema. Así, lo que se obtenía era una interpretación de la lógica como un cálculo de problemas, en el que las reglas lógicas válidas son esquemas de resolución de problemas (véase Kolmogorov 1932, p. 38). Por ejemplo, la caracterización de la conjunción se establece diciendo que si A y B son dos problemas, entonces la conjunción A&B designa la tarea de resolver ambos problemas tanto A como B. Una negación ¬A se interpreta como el problema de obtener una contradicción a partir del supuesto de que hay una solución para A.

Heyting retomó la interpretación de Kolmogorov y formuló la suya propia en términos de condiciones para *demostrar* proposiciones con constantes lógicas, entendiendo las demostraciones como un tipo de construcciones. Siguiendo el mismo ejemplo recién dado, una demostración de la conjunción A&B es cualquier demostración tanto de A como de B, y una demostración de una negación ¬A es una construcción que lleva a una contradicción a partir de suponer A (véase Heyting 1934). La idea es que estas condiciones de demostración ofrecían una justificación del sistema axiomático para la lógica intuicionista propuesto por Heyting en 1930. Ambas interpretaciones sentaron las bases de todos los intentos posteriores de caracterizar la consecuencia lógica constructiva, conectando de manera esencial, y decisiva para todo análisis futuro, el concepto de consecuencia lógica con el de demostración constructiva.

La elucidación de Kolmogorov y Heyting tiene un carácter *semántico.* Las expresiones del lenguaje formal son sólo una codificación para hablar de ciertos objetos, los problemas en Kolmogorov o las construcciones en Heyting. Esto se torna más evidente en la contribución que Heyting hizo al simposio sobre metodología de las ciencias formales realizado en Königsberg en 1930 (Heyting 1931). Heyting afirmaba allí que un enunciado (*Aussage*) matemático tiene por significado una expectativa (*Erwartung*), que puede considerarse propiamente una *intención*, en el sentido que Husserl le da al término en las *Investigaciones lógicas.* La intención no se dirige a un hecho independiente del sujeto, sino a una vivencia (*Erlebnis*) del sujeto. En este caso las vivencias son *construcciones* que hace el sujeto de conocimiento. La afirmación de un enunciado (que es lo que Heyting llama juicio o proposición, *Satz*) es el completamiento (*Erfüllung*) de la intención. Este completamiento consiste en ver que la construcción constituye una demostración del enunciado. Posteriormente, en su libro de 1934 Heyting resumió este proceso del siguiente modo:

> (...) todo enunciado representa (...) la intención de una construcción matemática, que debe satisfacer determinadas condiciones. Una demostración de un enunciado consiste en la realización de la construcción exigida en ella (Heyting 1934, p. 14).[6]

En este contexto, se hace la distinción entre construcciones posibles y construcciones realizadas. Estas últimas son las auténticas demostraciones, que son vistas a la vez, y manera indistinguible, como el proceso de demostrar y el resultado de ese proceso. Las demostraciones son entidades *gnoseológicas*, mientras que las construcciones son entidades *semánticas.*

Este marco conceptual le permitió a Heyting caracterizar las constantes lógicas (véase Heyting 1931, p.113). Por ejemplo, la negación de un enunciado significa que la intención que este expresa lleva a contradicción. En el caso de la conjunción de dos enunciados, toda intención la completa, si completa cada una de las intenciones que los enunciados expresan. Así, las afirmaciones de Heyting esbozaban una semántica basada en considerar las demostraciones constructivas como objetos formales. La fundamentación de los principios lógicos era gnoseológica en el sentido de que se basa en construcciones del sujeto.

Más allá del hecho de que tanto el intuicionismo como el programa de Hilbert fundaban la deducción en un conocimiento intuitivo, las concepciones acerca de la deducción y las constantes lógicas que auspicia cada una de estas escuelas son bien diferentes. Esto se sigue de las observaciones precedentes. El modo de entender la deducción metamatemática conduce a que los símbolos lógicos representen operaciones que se realizan sobre los signos mismos ("sobre el papel", siguiendo la expresión de Brouwer -véase Brouwer 1913, p. 78), sin que haya referencia a otras entidades. Obviamente la caracterización de los símbolos lógicos no es, entonces, semántica. Sin embargo, tampoco es correcto ver aquí un sintactismo, en el sentido usual del término que se remonta a la sintáxis lógica de Carnap, pues no hay un elemento convencional o arbitrario en la caracterización de los símbolos lógicos ni se da una definición sintáctica de verdad lógica ni se identifica la lógica con la sintaxis de un lenguaje formal. Más bien, la idea era dar condiciones intuitivas mínimas para la manipulación combinatoria de signos. Así, la base de la deducción lógica está en los principios combinatorios intuitivos. Son estos los que le otorgan *validez*.

En suma, el programa de Hilbert produjo de manera explícita una determinada concepción de lo que es una demostración, la cual está basada fundamentalmente en el procedimiento de "abstracción formal": trabajar con marcas sin un significado asignado. No obstante los procedimientos que generan estas demostraciones son procedimientos que están justificados por la capacidad de intuición que posee el sujeto cognoscente. Resulta entonces que Hilbert llevó a cabo la justificación filosófica de su programa metodológico con el apoyo de la teoría moderna del conocimiento.[7]

Se puede concebir una perspectiva menos comprometida con el conocimiento humano y pensar en términos de operaciones, construcciones y acciones que realiza cualquier agente inteligente. Se abre aquí un campo general de estudio de todas las operaciones para la obtención y manipulación de información que involucra la realización de demostraciones. Es este un ámbito de investigación que tiene a las demostraciones formales como objeto. En particular, la lógica se entiende como la teoría de las deducciones formales.

Notas

† Este trabajo refleja parte de un proyecto de investigación llevado a cabo por el autor en el Instituto de Filosofía de la Universidad de Erlangen-Nürnberg (Alemania) en 1999, gracias a una beca de la Fundación Alexander von Humboldt, y también su labor como investigador en el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas de Argentina. Versiones previas de partes de este trabajo fueron leídas en el *III Colóquio Conesul. Filosofia das Ciências Formais. Calcular, construir, demonstrar*, Santa María, Brasil, 19-22 de septiembre de 1999 y en el *II Encuentro de Filosofía e Historia de las Ciencias del Conosur*, Quilmes, Argentina, 3-5 de mayo de 2000. Quiero agradecer las comentarios críticos de Abel Lassalle Casanave y José Seoane y las sugerencias del árbitro de *Theoria*.

1 La inclusión de textos de Bernays se debe a la peculiar situación en que este se encontraba respecto del programa de Hilbert. Bernays fue el colaborador más importante de Hilbert en Göttingen, de lo cual da cuenta la obra escrita conjuntamente y publicada en 1934, los *Fundamentos de la matemática*, y en la que se compendian todos los esfuerzos del programa de reconstrucción de la matemática. Pero, además, Bernays fue el colaborados de Hilbert que contaba con mayor formación y espíritu filosóficos.

2 Estas afirmaciones estaban dirigidas también a refutar la tesis logicista respecto de los fundamentos de la matemática.

3 Tait en su artículo "Finitismo" ha identificado la aritmética finitaria con la aritmética recursiva primitiva.

4 Charles Parsons parece interpretar a Descartes de manera contraria: la corrección de las deducciones, en su totalidad, puede captarse intuitivamente (véase Parsons 1988, p. 255). Sin embargo, una tal interpretación no tiene suficiente apoyo textual.

5 Agradezco al árbitro anónimo de *Theoria* el hecho de llamarme la atención sobre este punto.

6 Siguiendo a Husserl en las *Investigaciones lógicas* (especialmente la sexta), puede decirse que el objeto al cual se refiere la intención expresada por un enunciado es el significado de ese enunciado. De este modo, las construcciones mentales de las que habla Heyting son los significados de los enunciados y el conocimiento del significado está dado por la intención. Al comienzo de la sexta Investigación Lógica, Husserl afirma que el completamiento de una intención hace que esta se haga *evidente* (v. Husserl, LU VI, p. 5). De este modo, el acto de completar una intención (*bedeutungserfüllender Akt*) es para Husserl un acto gnoseológico que se distingue claramente del acto que otorga significado (*bedeutungsverleihender Akt*, véase Husserl LU I, parágrafo 9, p. 38); no es esencial para el significado: enunciados que expresan una intención no completable, es decir, enunciados indecidibles, pueden tener significado. Tienen significado en el sentido de que se les puede adscribir una construcción *posible*, o sea, se pueden explicitar las condiciones que lo harían verdadero.

7 Creo que el hecho de que en el programa de Hilbert la deducción metamatemática cumpla una función metodológica no resta interés al análisis realizado en este trabajo.

BIBLIOGRAFIA

Bernays, Paul: 1927, Probleme der theoretischen Logik', *Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften* 33, 369-377. Reimpreso en Bernays 1976, pp. 1-16.

Bernays, Paul: 1930a, 'Die Philosophie der Mathematik und die Hilbertsche Beweistheorie', *Blätter für Deutsche Philosophie* 4 (1930-1931), 326-367. Reimpreso en Bernays 1976, pp. 17-61.

Bernays, Paul: 1930b, 'Die Grundgedanken der Fries'schen Philosophie in ihrem Verhältnis zum heutigen Stand der Wissenschaft', *Abhandlungen der Fries'schen Schule. Neue Folge* 5, 99-113.

Bernays, Paul: 1976, *Abhandlungen zur Philosophie der Mathematik*, Darmstadt, Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Brouwer, Luitzen Egbertus Jan: 1907, *Over de Grondslagen der Wiskunde*, Amsterdam-Leipzig, Maas & Van Suchtelen. Trad. inglesa en L.E.J. Brouwer: *Collected Works I*, comp. por Arendt Heyting y Hans Freudenthal, Amsterdam, North Holland, 1975, pp. 11-101.

Brouwer, Luitzen Egbertus Jan: 1913, 'Intuitionism and Formalism', *Bulletin of The American Mathematical Society*, 20, pp. 81-96, trad. inglesa de Arnold Dresden. Reimpreso en Paul Benacerraf, Hilary Putnam (comps.): *Philosophy of Mathematics. Selected Readings*, 2ª ed., Cambridge et al., Cambridge University Press, 1983, pp. 77-89.

Descartes, René: *Reglas. Regulae ad directionem ingenii*, in René Descartes: *Obras escogidas*, trad. cast. de Ezequiel de Olaso y Tomás Zwanck, 2ª ed., Buenos Aires, Charcas, 1980.

Herbrand, Jacques: 1930, *Recherches sur la théorie de la démonstration*, tesis doctoral presentada ante la Universidad de París. Trad. inglesa en Jacques Herbrand: *Logical Writings*, comp. por Warren Goldfarb, Dordrecht, Reidel, 1971.

Heyting, Arendt: 1931, 'Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik', *Erkenntnis* 2, 106-115.

Heyting, Arendt: 1934, *Mathematische Grundlagenforschung. Intuitionismus. Beweistheorie*, Berlín, Springer.

Hilbert, David: 1922, 'Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung', *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburger Universität* 1, 157-177.

Hilbert, David: 1923, 'Die logischen Grundlagen der Mathematik', *Mathematische Annalen* 88, 151-165.

Hilbert, David: 1926, 'Über das Unendliche', *Mathematische Annalen* 95, 161-190. Trad. inglesa en Jean Van Heijenoort (comp.): *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Cambridge (Mass.), Harvard University Press, 1967, pp. 367-392.

Hilbert, David & Paul Bernays: 1934, *Grundlagen der Mathematik*, vol. I, Berlín, Springer.

Husserl, Edmund: LU. *Logische Untersuchungen*, vol. I y vol. II en *Husserliana*. Edmund Husserl: *Gesammelte Werke*, vols. 18 y 19, La Haya, Martinus Nijhoof, 1975 y 1984.

Kolmogorov, Andrei N.: 1932, 'Zur Deutung der intuitionistischen Logik', *Mathematische Zeitschrift* 35, 58-65.

Lassalle Casanave, Abel: 1998, 'O programa de Hilbert e a origem da teoria da demonstraçao', *Episteme* 3, 7-13.

Parsons, Charles: 1998, 'Finitism and Intuitive Knowledge', in Matthias Schirn (comp.): *The Philosophy of Mathematics Today*, Oxford, Clarendon Press, pp. 249-270.

Weyl, Hermann: 1921, 'Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik', *Mathematische Zeitschrift* 10, 39-79.

Javier Legris es Licenciado en Filosofía por la Universidad de Buenos Aires y Doctor en Filosofía por la Universidad de Regensburg (Alemania). Actualmente es profesor asociado en la Universidad de Buenos Aires e investigador del Conicet (Argentina). Se ha dedicado a la lógica intuicionista y desde hace unos años investiga sobre la historia de la teoría de la demostración y sus fundamentos filosóficos. Ha publicado dos libros y numerosos artículos en revistas especializadas internacionales.