LAS PARADOJAS DE LA TEORIA DE CONJUNTOS: UN ANALISIS SISTEMATICO

(*The Paradoxes of Set Theory: A Systematic Analysis*)

Julián GARRIDO*

Manuscrito recibido: 1999.10.25.
Versión final: 2001.9.5.

* Departamento de Filosofía, Facultad de Ciencias, Universidad de Granada, 18071 Granada.

BIBLID [0495-4548 (2002) 17: 43; p. 35-62]

RESUMEN: El punto de partida de este artículo es la consideración de las paradojas históricas de la teoría de conjuntos: la de Russell, aplicada al conjunto W, la de Cantor, para el conjunto U y la de Burali-Forti, del conjunto Ω. Un análisis sistemático, dirigido a simplificar y depurar estas paradojas, revelará: primero, al menos ocho expresiones contradictorias, en lugar de tres; segundo, un cuarto conjunto contradictorio, sugerido por una extensión de la paradoja de Burali-Forti; y, tercero, la circunstancia de que casi todas esas contradicciones son aplicables a más de uno de los conjuntos paradójicos.

Descriptores: teoría de conjuntos, paradojas de la teoría de conjuntos.

ABSTRACT: *The starting point of this work is the existence of historical paradoxes in the set theory. These are: Russell's paradox, applied to the set W, Cantor's, for the set U, and Burali-Forti's, of the set Ω. A systematic analysis aimed at the simplification and the refining of such paradoxes showed that: (i) there exist at least eight contradictory expressions instead of three; (ii) another contradictory set is suggested by an extension of Burali-Forti's paradox; (iii) almost all of the contradictions apply to more than one paradoxical set.*

Keywords: *set theory, paradoxes of set theory.*

SUMARIO

1. Introducción

Las paradojas históricas de la teoría de conjuntos son tres contradicciones, detectadas antes de la modificación axiomática de la teoría realizada por

Zermelo y ligadas cada una de ellas a un conjunto especial. La más simple es la paradoja de Russell: $W \in W \wedge W \notin W$, siendo $W =_{df} \{x : x \notin x\}$. Más compleja es la paradoja de Cantor: $card(U) < card(P(U)) \wedge card(U) \nless card(P(U))$, donde $U =_{df} \{x : x = x\}$. Mucho más intrincada es la demostración de la paradoja de Burali-Forti: $\Omega \prec \Omega+1 \wedge \Omega \nprec \Omega+1$, siendo $\Omega =_{df} \{x : x$ es ordinal$\}$. Estas tres expresiones contradictorias son demostrables en la teoría cantoriana o intuitiva de conjuntos, la cual puede considerarse axiomatizable sobre dos postulados simples: el axioma de formación de conjuntos, mediante descripciones precisas $A(x)$, y el axioma de igualdad de conjuntos:

AF) Para toda $A(x)$ $\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow A(x))$

AI) $\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$

En virtud de las descripciones $A(x)$: "$x \notin x$", "$x = x$" y "x es ordinal", estos dos postulados permiten afirmar la existencia y la unicidad y, por tanto, permiten definir los conjuntos: W, U y Ω. En el presente artículo se realiza un análisis sistemático de las demostraciones de las tres paradojas históricas, enfocada a la búsqueda de posibles simplificaciones de éstas.

Como resumen de las conclusiones obtenidas, en el apartado 2 se indica algo ya sabido: la paradoja de Russell no admite simplificación. En el apartado 3 se presenta, junto a la demostración usual de la paradoja de Cantor (que se basa en el lema: $P(U) \subseteq U$ y que requiere entre sus premisas al teorema de Bernstein) una demostración más inmediata de esta misma paradoja basada en el lema: $P(U) = U$ e independiente del teorema de Bernstein. A continuación se prueban, con demostraciones cada vez más simples, las paradojas: $card(U) < card(U) \wedge card(U) \nless card(U)$, $U \approx U \wedge U \not\approx U$ y $U \neq U$. Este último enunciado equivale a: $U = U \wedge U \neq U$, el cual (por la definición de U) equivale a su vez a: $U \in U \wedge U \notin U$. En el apartado 4, tras la compleja demostración de la paradoja de Burali-Forti, se indica cómo es demostrable con menos supuestos la paradoja: $\Omega \prec \Omega \wedge \Omega \nprec \Omega$. Por otro lado, puesto que menor entre ordinales es la pertenencia entre ordinales y $\Omega+1$ es el sucesor de Ω, las expresiones: $\Omega \in \Omega' \wedge \Omega \notin \Omega'$ y $\Omega \in \Omega \wedge \Omega \notin \Omega$ son, en consecuencia, versiones de esas paradojas expresadas en términos más básicos. Tanto la paradoja de Burali-Forti para Ω, como su simplificación en la que no se menciona al sucesor, son muy complejas. Las dos requieren el lema: Ω es ordinal, cuya prueba es tortuosa. No obstante, en el apartado 5 se desarrolla un análogo de la paradoja de Burali-Forti para un nuevo conjunto sugerido por Ω. Mientras que el conjunto de los ordinales, Ω, es el conjunto de todos los conjuntos que son transitivos, y que están bien ordenados respecto a la relación de pertenencia, ese nuevo conjunto, I, es el conjunto de todos los conjuntos irreflexivos respecto a la relación de pertenencia: $I =_{df} \{x : x \text{ es } \in \text{irreflexivo}\}$. De este conjunto se demuestra fácilmente la paradoja: $I \in I \wedge I \notin I$. El lema clave para ello: I es $\in$ irreflexivo, es casi inmediato y las restantes premisas requeridas tienen también fácil demostración. El apartado 6 está sugerido por los desarrollos anteriores, pues en ellos se han revelado algunas interconexiones entre los macroconjuntos y las paradojas. Así, por ejemplo, aunque por vías argumentales diferentes a la paradoja de Russell, resulta que también U, Ω e I satisfacen la expresión: $x \in x \wedge x \notin x$, la cual tradicionalmente se asigna sólo a W. Un segundo ejemplo es la circunstancia de que en la demostración de: $U \neq U$ (una de las simplificaciones de la paradoja de Cantor), aparece el conjunto W de Russell. Dicha demostración es por reducción al absurdo. En ella, al suponer que U es biyectable consigo mismo mediante la función identidad, se obtiene la contradicción conocida como paradoja de Russell del conjunto W. Como un tercer ejemplo, el conjunto I, del cual se demuestra el análogo de una de las paradojas de Burali-Forti, no es otro que el conjunto P(W). Estas interconexiones invitan a investigar cuáles de los cuatro conjuntos paradójicos satisfacen cada una de las paradojas usualmente asignadas a uno de ellos. En el apartado 6 se concluye (a) además de U, también W e I, pero no Ω, satisfacen la paradoja de Cantor: $\mathrm{card}(x) < \mathrm{card}(P(x)) \wedge \mathrm{card}(x) \nless \mathrm{card}(P(x))$ y sus simplificaciones: $\mathrm{card}(x) < \mathrm{card}(x) \wedge \mathrm{card}(x) \nless \mathrm{card}(x)$ y $x \approx x \wedge x \not\approx x$. (La clave de ello reside en que "$P(x) \subseteq x$" es demostrable para W y para I, pero no lo es para Ω). Por otro lado, (b) la paradoja de Burali-Forti: $x \prec x+1 \wedge x \nprec x+1$ y su simplificación: $x \prec x \wedge x \nprec x$, son sólo demostrables para Ω. (Ello es así porque "x es ordinal" es cierto de Ω, pero no lo es de U, ni de W, ni de I). Por último, (c) las paradojas: $x \in x' \wedge x \notin x'$, $x \neq x$ y $x \in x \wedge x \notin x$, son demostrables de los cuatro conjuntos, aunque por vías argumentales diferentes. En el breve y último apartado 7, la "paradoja de la variable y", descubierta como posible paradoja del axioma de especificación zermeliano si éste no se formula unido a cierta restricción, se presenta también en la variante que surge si se aplica al axioma de formación de Cantor.

Es importante matizar el sentido preciso en que se habla de contradicciones (en plural) en una teoría deductiva que utiliza la lógica clásica. Según una de las leyes de esta lógica, una sola contradicción tiene a cualquier enunciado como consecuencia lógica. En virtud de ello, una vez demostrada en la teoría cantoriana la paradoja de Russell, de ésta se siguen con toda inmediatez la paradoja de Cantor y la de Burali-Forti. Más aún, de la paradoja de Russell se deduce también "$\emptyset\in\emptyset\wedge\emptyset\notin\emptyset$", pues se deduce cualquier enunciado expresable con los conceptos de la teoría. Sin embargo, se consideran paradojas de la teoría de conjuntos a las popularizadas con los nombres de Russell, de Cantor y de Burali-Forti, se juzgan interesantes sus respectivas demostraciones usuales y, por otro lado, no se considera paradoja de tal teoría al anterior enunciado sobre el conjunto vacío. El motivo es simple, las tres paradojas históricas tienen demostración independiente. En consecuencia, la detección de las tres nos informa de que una reformulación de la teoría que evitase solamente a dos de ellas, aún contendría la otra. En contraste con las paradojas históricas, el anterior enunciado sobre el conjunto vacío sólo surge en la teoría cantoriana si previamente se ha demostrado una contradicción y se hace uso de la ley lógica que de una contradicción permite deducir cualquier enunciado. En otras palabras, ese enunciado no es evaluado como paradoja conjuntista porque en la teoría cantoriana no tiene demostración que no haga uso de la ley de la contradicción.

Estas consideraciones, que fundamentan el juicio sobre la relevancia de las tres paradojas históricas de la teoría de Cantor, son las mismas que permiten dar sentido a la detección de nuevas paradojas que consisten en simplificaciones de las históricas. En particular, considerando un ejemplo, la histórica paradoja de Cantor: $\mathrm{card}(U)<\mathrm{card}(P(U))\wedge\mathrm{card}(U)\nless\mathrm{card}(P(U))$ se demuestra usualmente con dos lemas generales: 1) el teorema de Cantor y 2) el cardinal de un conjunto no es menor que el de cualquiera de sus subconjuntos (cuya demostración requiere el teorema de Bernstein), y un lema específico: 3) $P(U)\subseteq U$. En contraste con ella, la segunda de las simplificaciones de esta paradoja que presento en este artículo: $U\approx U\wedge U\not\approx U$, es demostrada con un lema general: 1') todo conjunto es biyectable consigo mismo, y un lema específico: 2') $U\not\approx U$. El lema 1' tiene demostración inmediata y es parte insignificante de lo requerido en la demostración del lema 2. Y el lema específico 2' es también más débil que el específico 3 de la paradoja de Cantor histórica, como muestra el teorema B) $\forall x(P(x)\subseteq x\rightarrow x\not\approx x)$, que se demuestra en el apartado 3 de este artículo. Esta nueva paradoja es, pues, una simplificación de la histórica: se demuestra con más sencillez y apunta con más agudeza a las claves del carácter contradictorio de U. Lo mismo se puede decir de las restantes simplificaciones de las paradojas históricas que se desarrollan en este artículo.

En cuanto a las interconexiones entre paradojas y conjuntos que tradicionalmente no se les asignan, constituyen un pequeño apartado al final del artículo, motivado por el deseo de completar en lo posible el análisis sistemático de las paradojas históricas. Al concluir en dicho apartado, por ejemplo, que es demostrable: $\mathrm{card}(W)<\mathrm{card}(P(W))\wedge\mathrm{card}(W)\nless\mathrm{card}(P(W))$, no se está detectando, desde luego, una paradoja de W más inmediata que la de Russell. Pero sí se está indicando una manera independiente de obtener contradicción con ese mismo conjunto, pues la vía argumental que conduce a la paradoja de Cantor es independiente de la que conduce a la paradoja de Russell.

El problema planteado por la detección de las paradojas históricas de la teoría cantoriana de conjuntos fue resuelto por formulaciones axiomáticas de modificaciones de esta teoría en las cuales los conjuntos W, U y Ω (y ahora podríamos añadir I), o bien no pueden ser definidos (solución de Zermelo), o bien no son conjuntos, sino clases que no pertenecen a nada (solución de Von Neumann). Cualquiera de estas dos propuestas evita también las paradojas simplificadas y cruzadas que se presentan en este artículo. Sin embargo, no deja de tener interés el detectar que esos conjuntos contradictorios conducen de modos más inmediatos y/o más variados a contradicción. Piénsese que la coexistencia de diferentes soluciones al problema planteado por las paradojas indica que no hay, por el momento, "la" solución al problema. En este contexto, el refinamiento de la comprensión de la naturaleza contradictoria de la teoría cantoriana puede ayudar a sugerir una mejor solución (aunque quizás sea éste un problema sin solución definitiva).

2. La paradoja de Russell

Es la más elemental y no admite simplificación ni depuración. Su conocida demostración es muy simple, se basa exclusivamente en la definición de W.

PR) $W\in W\wedge W\notin W$

Demostración: Por AF y AI puede definirse: $W=_{df}\{x{:}x\notin x\}$; en consecuencia: $\forall x(x\in W\leftrightarrow x\notin x)$; entonces (en el caso particular en que x es W): $W\in W\leftrightarrow W\notin W$; lo cual equivale lógicamente a: $W\in W\wedge W\notin W$.

De PR se sigue la afirmación existencial:

$\exists x(x\in x\wedge x\notin x)$

la cual de por sí es una contradicción y tiene interés por doble motivo. Por un lado, porque también se deduce directamente de AF con la descripción A(x): "$x\notin x$", sin usar AI ni introducir W por definición. Por otro lado, porque sugiere la posibilidad de que, aparte de W, haya más conjuntos con esa propiedad. El argumento anterior que conduce a PR, desde luego, es exclusivo de W:

Para todo x si def(x)=def(W) entonces x cumple PR

(Puede anticiparse, no obstante, que: U, Ω e I, ejemplifican también la tesis existencial, aunque cada uno lo hace por vías argumentales distintas, y mucho más indirectas que W).

3. La paradoja de Cantor y sus simplificaciones

La histórica paradoja de Cantor del conjunto U tiene una demostración tradicional, que será recordada en primer lugar, como elemento de referencia. No obstante, a continuación se presentará una demostración ligeramente distinta. Y, después, se extraerán simplificaciones y depuraciones de la paradoja.

En lo que sigue, se asumen las definiciones siguientes:

$\forall x \forall y\ \mathrm{card}(x)=\mathrm{card}(y) \leftrightarrow_{df} x \approx y$
$\forall x \forall y\ \mathrm{card}(x)<\mathrm{card}(y) \leftrightarrow_{df} \exists z(z \subset y \wedge z \approx x) \wedge x \not\approx y$
$\forall x \forall y\ \mathrm{card}(x) \leq \mathrm{card}(y) \leftrightarrow_{df} \mathrm{card}(x)<\mathrm{card}(y) \vee \mathrm{card}(x)=\mathrm{card}(y) \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (\exists z(z \subset y \wedge z \approx x) \wedge x \not\approx y) \vee x \approx y \leftrightarrow \exists z(z \subset y \wedge z \approx x) \vee x \approx y$

La paradoja de Cantor expresa del conjunto de todos los iguales a sí mismos, U, que tiene menos elementos que su potencia y no tiene menos elementos que su potencia.

PC) $\mathrm{card}(U)<\mathrm{card}(P(U)) \wedge \mathrm{card}(U) \not< \mathrm{card}(P(U))$

Demostración usual: Se basa en tres lemas, dos de los cuales son teoremas generales de la teoría, mientras que el tercero es un rasgo especial demostrado para el conjunto U.

Lema 1) $\forall x(\mathrm{card}(x)<\mathrm{card}(P(x)))$ (teorema de Cantor)
Lema 2) $\forall x \forall y(x \subseteq y \rightarrow \mathrm{card}(y) \not< \mathrm{card}(x))$

cuya argumentación es: (a) Si x=y entonces (como la identidad es, por motivos lógicos, biyección): $x \approx y$; y entonces (por def. de menor cardinal, que exige la no biyectabilidad): $\mathrm{card}(y) \not< \mathrm{card}(x)$. (b) Si $x \subset y$ entonces (por def. de menor o igual cardinal): $\mathrm{card}(x) \leq \mathrm{card}(y)$; y entonces: (b1) Si $\mathrm{card}(x)=$ $=\mathrm{card}(y)$, entonces (por def. de igual cardinal): $x \approx y$; y entonces (por def.

de menor cardinal): card(y)$\nless$ card(x). (b2) Si card(x)<card(y) entonces (por el teorema de Bernstein $\forall x \forall y(\text{card}(x)<\text{card}(y) \rightarrow \text{card}(y) \nless \text{card}(x))$): card(y)$\nless$card(x). En todos los casos: (a), (b1) y (b2), se sigue el consecuente del lema 2.

(El despliegue argumental pone en evidencia que, junto a definiciones y una tesis trivial: los conjuntos idénticos son biyectables, aparece también como premisa un teorema complejo: la asimetría de la menor cardinalidad o teorema de Bernstein).

Lema 3) $P(U) \subseteq U$

cuya prueba es la siguiente: por las definiciones de U, de potencia de un conjunto y de subconjunto, el lema 3 puede reformularse sucesivamente así:

$$\forall x(x \in P(U)x \rightarrow x \in U) \equiv \forall x(x \subseteq U \rightarrow x \in U) \equiv \forall x(\forall y(y \in x \rightarrow y \in U) \rightarrow x \in U) \equiv$$
$$\equiv \forall x(\forall y(y \in x \rightarrow y=y) \rightarrow x=x)$$

y esto es un caso particular del esquema: $\forall x(A_i(x) \rightarrow x=x)$, el cual es lógicamente verdadero.

De los lemas 1, 2 y 3 se sigue PC.

Esta demostración de la paradoja de Cantor enseña que (en virtud básicamente de los teoremas de Cantor y de Bernstein) el conjunto U, definido con la condición "x=x", al tener la peculiar propiedad de que su potencia es subconjunto suyo, tiene el rasgo contradictorio denominado PC. La clave de la paradoja es el lema 3. Y éste es verdadero del conjunto U por motivos lógicos.

De PC se sigue la afirmación existencial:

$$\exists x(\text{card}(x)<\text{card}(P(x)) \wedge \text{card}(x) \nless \text{card}(P(x)))$$

la cual de por sí es contradictoria y tiene el interés de sugerir que otros conjuntos, aparte de U, puedan tener ese rasgo catastrófico. Por el momento, de la demostración desarrollada se desprende que todo conjunto que (por los motivos que fuese) cumpliera: $P(x) \subseteq x$, también satisfaría la paradoja de Cantor:

Para todo x si $P(x) \subseteq x$ entonces x cumple PC

(Puede anticiparse que los conjuntos W e I, aunque no el conjunto Ω, cumplen, al igual que U, que sus potencias son subconjuntos suyos. No obstante, las razones de que ello sea así son distintas de las razones para U. Sólo en este último caso la característica: $P(x)\subseteq x$, es ley lógica de la identidad).

Segunda demostración: Se basa también en dos lemas generales (el primero idéntico al primero de los anteriores y el segundo más débil que el segundo de ellos) y un lema especial de U (más fuerte que el lema especial de la demostración usual).

Lema 1) $\forall x(\mathrm{card}(x)<\mathrm{card}(P(x)))$ (teorema de Cantor)
Lema 2) $\forall x\forall y(x=y\rightarrow \mathrm{card}(y)\nless \mathrm{card}(x))$

cuya demostración es: si x=y entonces (como la identidad es por motivos lógicos biyección): $x\approx y$; y entonces (por def. de menor cardinal, que exige la no biyectabilidad): $\mathrm{card}(y)\nless\mathrm{card}(x)$.

Lema 3) $P(U)=U$

cuya prueba es: por las definiciones de U y de potencia de un conjunto y por AI, el lema 3 puede reformularse así:

$$\forall x(\forall y(y\in x\rightarrow y=y)\leftrightarrow x=x) \equiv$$
$$\equiv \forall x(\forall y(y\in x\rightarrow y=y)\rightarrow x=x)\wedge\forall x(x=x\rightarrow\forall y(y\in x\rightarrow y=y)) \equiv$$
$$\equiv \forall x(\forall y(y\in x\rightarrow y=y)\rightarrow x=x)\wedge\forall x\forall y((x=x\wedge y\in x)\rightarrow y=y)$$

cuyos conyuntos son casos particulares de dos esquemas verdaderos por motivos lógicos: $\forall x(A_i(x)\rightarrow x=x)$ y $\forall x\forall y(A_i(x,y)\rightarrow y=y)$.

De los lemas 1, 2 y 3 se sigue PC.

Esta demostración alternativa de la paradoja de Cantor tiene la ventaja de recurrir a menos leyes generales. Prácticamente sólo del teorema de Cantor y de definiciones (sin utilizar el teorema de Bernstein) se sigue la paradoja. La desventaja consiste en que U, además de tener a su potencia como subconjunto, debe cumplir también que es subconjunto de su potencia. En otras palabras, U debe ser además transitivo. No obstante, las dos propiedades resultan ser ciertas de U con la misma y total contundencia: por motivos lógicos. En suma, es una demostración más simple que la tradicional, pero que exige más condiciones al conjunto considerado para que genere la paradoja. Además, la condición adicional: $x\subseteq P(x)$, en sí no es patológica, pues equivale al definiente de "x es transitivo", y en general los conjuntos transitivos no son paradójicos. La implicación que se desprende de esta prueba:

Para todo x si $P(x)=x$ entonces x cumple PC es menos informativa que la surgida de la demostración usual, pues exige más que aquélla.

(Curiosamente, los conjuntos W e I, que cumplen: $P(x)\subseteq x$, no son sin embargo transitivos, no cumplen: $x\subseteq P(x)$. Para ellos la demostración de PC sólo puede realizarse con la argumentación tradicional. Y el conjunto Ω, aunque es transitivo, no cumple, como ya se dijo: $P(x)\subseteq x$, por lo cual PC no es demostrable para Ω de ninguna de las dos maneras).

Pese a su desventaja, la demostración segunda de PC merece ser apuntada, no sólo porque depende de menor bagaje teórico, sino también porque sugiere una simplificación de la paradoja de Cantor que merece estudio específico. Concretamente, la segunda demostración de PC, pero no la primera, tiene el corolario siguiente. Dado que $P(U)=U$, de PC se sigue, sustituyendo en ella $P(U)$ por U:

$PC_{\text{simplificada}}$) $\text{card}(U)<\text{card}(U)\wedge\text{card}(U)\nless\text{card}(U)$

Ahora bien, esta paradoja es simplificada respecto a la PC histórica por un doble motivo. Ante todo, como es evidente en su formulación, porque menciona a un solo conjunto, U, y no precisa considerar su potencia. Pero también porque (con independencia de que se puede derivar de PC cuando ésta se demuestra al modo no usual) tiene una demostración independiente y más sencilla que cualquiera de las dos antes expuestas para la PC histórica. Esto último se hace evidente en la siguiente argumentación.

Demostración: Teniendo en cuenta la definición de menor cardinal: $\forall x\forall y\ \text{card}(x)<\text{card}(y)\leftrightarrow_{df}\exists z(z\subset y\wedge z\approx x)\wedge x\not\approx y$, la paradoja PC simplificada se deduce de un lema absolutamente general y dos lemas relativos al conjunto U.

Lema 1) $\forall x(\text{card}(x)\nless\text{card}(x))$

que se prueba así: es ley lógica el que para todo x $x=x$; entonces (como la identidad es por motivos lógicos biyección): para todo x $x\approx x$; y entonces (por def. de menor cardinal, que exige la no biyectabilidad): para todo x $\text{card}(x)\nless\text{card}(x)$.

Lema 2) $\exists z(z\subset U\wedge z\approx U)$

cuya prueba es: al menos un conjunto, el conjunto de todos los unitarios, es (a) subconjunto propio de U (pues todo unitario, al ser igual a sí mismo, es elemento de U; y hay elementos de U, por ejemplo $\varnothing$, que no son unitarios); y es (b) biyectable con U (en virtud de la biyección hacer y deshacer unitario).

Lema 3) $U \not\approx U$

cuya argumentación se inspira en la diagonalización abstracta desarrollada en la demostración del teorema de Cantor.

Supóngase una biyección genérica del conjunto U (cuyo elemento genérico denominaremos x_i) consigo mismo. En el lugar i de la biyección estará el emparejamiento: $x_i \Leftrightarrow y_i$ (obsérvese que por conseguir generalidad no se ha supuesto el emparejamiento más natural de un conjunto consigo mismo, no se ha supuesto: $x_i \Leftrightarrow x_i$).

Dada esa biyección, es perfectamente definible el "conjunto de los elementos de U que no pertenecen al conjunto emparejado con él en la biyección": $Y =_{df} \{x_i : x_i \in U \wedge x_i \notin y_i\}$.

Ahora bien (y esto es el paso crucial de la prueba), como es ley lógica $\forall x\ x=x$, resulta: $Y=Y$; entonces (por def. de U): Y es elemento de U, o sea: Y es uno de los y_i; entonces hay un x_i emparejado con Y en la biyección, llamémosle X, es decir, en la biyección aparece $X \Leftrightarrow Y$ como caso particular de $x_i \Leftrightarrow y_i$.

Pero: si $X \in Y$ entonces X no cumple la condición "$x_i \in U \wedge x_i \notin y_i$", y entonces (por la def. de Y): $X \notin Y$. Es decir: $X \in Y \rightarrow X \notin Y$.

Y, si $X \notin Y$, entonces X sí cumple la condición "$x_i \in U \wedge x_i \notin y_i$", y entonces (por la def. de Y): $X \in Y$. O sea: $X \notin Y \rightarrow X \in Y$.

En suma, si hay biyección: $U \approx U$, hay contradicción: $X \in Y \leftrightarrow X \notin Y$; en consecuencia, no hay biyección: $U \not\approx U$.

De los lemas 1, 2 y 3 se sigue PC simplificada.

La demostración de PC simplificada recurre a leyes generales más débiles que las exigidas en las pruebas de PC. Ni el teorema de Bernstein, ni el de Cantor son usados. La irreflexividad de menor cardinal (basada a su vez en que los conjuntos idénticos son biyectables) es el único teorema general exigido. Los lemas especiales de U son ahora dos, pero debe observarse que uno de ellos, el lema 2, es una característica de todos los conjuntos infinitos, pues se limita a expresar que el conjunto U satisface el definiente de: "x es infinito". El lema 3, $U \not\approx U$, es el más significativo, es la clave de la paradoja. Y, aunque se ha demostrado con una argumentación inspirada en la del teorema de Cantor, no debe confundirse con éste.

Por otro lado, hay más amplias razones para asegurar que la demostración de PC simplificada es más inmediata que la demostración de PC. El lema especial, $P(U) \subseteq U$, exigido en la demostración usual de PC, es más fuerte que los dos lemas especiales: U es infinito y $U \not\approx U$, requeridos en la demostración de PC simplificada. El primero es condición suficiente de los segundos. Y ello no sólo es cierto del conjunto U sino que también vale para todo conjunto. En otras palabras, son teoremas de la teoría de conjuntos los dos enunciados siguientes que se demuestran a continuación.

Teorema A) $\forall x(P(x) \subseteq x \rightarrow \exists z(z \subset x \wedge z \approx x))$

Demostración: Si P(x) es subconjunto de x, entonces, el conjunto de todos los unitarios de elementos de x, cumple: (a) es subconjunto propio de x (por ser subconjunto propio de P(x), pues esos unitarios y $\emptyset$, no unitario, pertenecen a P(x)); y (b) es biyectable con x (por la biyección hacer/deshacer unitario).

Teorema B) $\forall x(P(x) \subseteq x \rightarrow x \not\approx x)$

Demostración: Supóngase una biyección genérica del conjunto x (cuyo elemento genérico denominaremos x_i) consigo mismo. En el lugar i de la biyección estará el emparejamiento $x_i \Leftrightarrow y_i$.

Dada esa biyección, es perfectamente definible el "conjunto de los elementos de x que no pertenecen al conjunto emparejado con él en la biyección": $Y =_{df} \{x_i : x_i \in x \wedge x_i \notin y_i\}$.

Ahora bien (y esto es el paso crucial de la prueba): como Y está formado con elementos de x: $Y \subseteq x$, o sea: $Y \in P(x)$; y, como además se ha admitido la premisa: $P(x) \subseteq x$, resulta: Y es elemento de x, o sea: Y es uno de los y_i; entonces hay uno de los x_i emparejado con él en la biyección, llamémosle X, es decir, en la biyección aparece $X \Leftrightarrow Y$ como caso particular de $x_i \Leftrightarrow y_i$.

Pero: si $X \in Y$ entonces X no cumple la condición "$x_i \in x \wedge x_i \notin y_i$", y entonces (por la def. de Y): $X \notin Y$. Es decir: $X \in Y \rightarrow X \notin Y$.

Y: si $X \notin Y$ entonces X sí cumple la condición "$x_i \in x \wedge x_i \notin y_i$", y entonces (por la def. de Y): $X \in Y$. O sea: $X \notin Y \rightarrow X \in Y$.

En suma, si hay biyección: $x \approx x$, hay contradicción: $X \in Y \leftrightarrow X \notin Y$; en consecuencia, no hay biyección: $x \not\approx x$.

La versión existencial de PC simplificada es:

$\exists x(\text{card}(x) < \text{card}(x) \wedge \text{card}(x) \nless \text{card}(x))$

la cual sugiere la posibilidad de que otros conjuntos, aparte de U, la satisfagan. En este respecto, la demostración realizada con el conjunto U nos indica:

Para todo x si $x \not\approx x$ y x es inf. entonces x cumple $PC_{simplificada}$

y, por otro lado, los teoremas A y B permiten detectar una condición suficiente más fuerte de la paradoja:

Para todo x si $P(x) \subseteq x$ entonces x cumple $PC_{simplificada}$

Esta última conclusión es menos informativa que la precedente pero tiene el interés de resaltar una condición común a las paradojas PC y PC simplificada.

Por otro lado, la paradoja PC simplificada (y la consideración de su lema más significativo: $U \not\approx U$) sugiere con inmediatez su propia simplificación. En la que se puede denominar paradoja de Cantor resimplificada, ni se menciona a P(U), ni se mencionan cardinalidades, sino algo más básico: biyecciones. Es una tesis cuyos conceptos son más elementales y cuya demostración es aún más simple que las anteriores.

$PC_{resimplificada})$ $U \approx U \wedge U \not\approx U$

Demostración: Se basa en un lema general y un lema especial.

Lema 1) $\forall x (x \approx x)$

probado así: es ley lógica el que para todo x $x=x$; entonces (como la identidad es por motivos lógicos biyección): para todo x $x \approx x$.

Lema 2) $U \not\approx U$ (demostrado anteriormente)

De los lemas 1 y 2 se sigue PC resimplificada.

En comparación con la demostración de PC simplificada, el lema general ahora utilizado es aún más débil que el requerido por aquélla. Y en lugar de dos lemas especiales basta uno de ellos, desaparece el ligado a la infinitud. La clave de todo sigue siendo la tesis $U \not\approx U$.

La formulación existencial de esta paradoja:

$\exists x (x \approx x \wedge x \not\approx x)$

es merecedora de discusión. De la demostración anterior se sigue:

Para todo x si $x \not\approx x$ entonces x cumple $PC_{resimplificada}$

y, por el teorema B, nuevamente puede afirmarse:

Para todo x si $P(x) \subseteq x$ entonces x cumple $PC_{resimplificada}$

La tesis $U \not\approx U$, que constituye el lema más significativo de las demostraciones de las PC simplificada y resimplificada, tiene un corolario inmediato que merece atención especial. Se le puede denominar tesis de Cantor-Russell y es la siguiente:

Tesis CR) U no es biyectable con U mediante la identidad.

Demostración: Con la misma línea argumental usada para el lema $U \not\approx U$, el único cambio es la restricción siguiente: la hipotética biyección entre U y U no es ahora genérica, sino la específica biyección identidad. La biyección es: $x_i \Leftrightarrow x_i$; entonces, el conjunto Y gestado por la biyección: $Y =_{df} \{x_i : x_i \in U \wedge x_i \notin x_i\}$, es el conjunto de Russell: $W =_{df} \{x : x \notin x\}$ (pues los x_i, al ser los elementos del universal U, son los objetos de la variable x en la teoría de conjuntos); y el conjunto X emparejado con Y, al ser la identidad la biyección, es también W; y, entonces, la contradicción que imposibilita la biyección es: $W \in W \leftrightarrow W \notin W$, la paradoja de Russell.

La tesis CR, caso particular de $U \not\approx U$, sugiere de modo inmediato paradojas de Cantor que pueden denominarse depuradas. Se trata de simplificaciones aún mayores de PC que tienen la peculiaridad de ser expresables utilizando únicamente los predicados básicos de la teoría de conjuntos: la pertenencia y la igualdad.

$PC_{depurada\,1}$) $U \neq U$

Primera demostración: Se basa en los mismos lemas que la PC resimplificada, aunque el lema general se expresa en otra forma lógicamente equivalente.

Lema 1) $\forall x(x \approx x) \equiv \forall x(x = x \rightarrow x \approx x)$ (demostrado anteriormente)
Lema 2) $U \not\approx U$ (demostrado anteriormente)

De los lemas 1 y 2 se sigue PC depurada 1.

Segunda demostración: Se basa en dos lemas cada uno de los cuales es caso particular de los que se han usado en la anterior demostración.

Lema 1) $\forall x(x = x \rightarrow$ x es biyectable con x mediante la identidad)

cuya prueba es: la identidad es por motivos lógicos biyección.

Lema 2) U no es biyectable con U mediante la identidad

demostrado anteriormente como Tesis CR, caso particular de $U \neq U$.

De los lemas 1 y 2 se sigue PC depurada 1.

Los presupuestos argumentales de esta paradoja son casi indistinguibles de los de PC resimplificada. Sin embargo, la segunda demostración es más básica. En cualquier caso, la paradoja tiene el interés de no requerir en su formulación conceptos complejos como biyección.

La formulación existencial de PC depurada 1

$\exists x \; x \neq x$

tiene como condición suficiente mínima, según se desprende de la segunda demostración, la siguiente:

Para todo x si $x_{\text{no es biyect. con x med. =}}$ entonces x cumple $PC_{\text{depurada1}}$

y, por otro lado, en virtud del teorema B: $\forall x(P(x) \subseteq x \rightarrow x \neq x)$ y de la circunstancia de que la tesis CR es caso particular de $x \neq x$, una condición suficiente más fuerte es:

Para todo x si $P(x) \subseteq x$ entonces x cumple $PC_{\text{depurada1}}$

Es importante señalar también respecto a esta paradoja que, aunque la expresión: $U \neq U$ es de por sí contradictoria (pues niega la ley lógica: $\forall x(x=x)$), tiene también una forma lógicamente equivalente con la estructura arquetípica de contradicción: conjunción de un enunciado y su negación. O sea, PC depurada 1 puede expresarse, indistintamente:

$PC_{\text{depurada1}}$) $U \neq U \equiv U=U \wedge U \neq U$

La segunda forma es interesante porque, cuando se considera junto a ella la definición de U, sugiere con inmediatez:

$PC_{\text{depurada2}}$) $U \in U \wedge U \notin U$

Demostración: Se basa en PC depurada 1 y en la def. de U.

Lema 1) $U=U \wedge U \neq U$ (PC depurada 1)
Lema 2) $\forall x(x \in U \leftrightarrow x=x)$ (consecuencia de: $U =_{df} \{x : x=x\}$)

De los lemas 1 y 2 se sigue PC depurada 2.

La paradoja PC depurada 2 tiene la misma forma que la de Russell. Sin embargo, en virtud de su argumentación generadora, pertenece a la familia de las paradojas de Cantor. Tiene dos peculiaridades frente a las anteriores. En primer lugar, con ella se rompe la cadena de simplificaciones progresivas de PC que han ido surgiendo. La demostración de PC depurada 2 no es más elemental que la de PC depurada 1 y prueba de ello es que esta última es lema para probar la primera. (PC depurada 2 es la única de las simplificaciones de PC que se demuestran necesariamente con otra de ellas como lema. Sin embargo, no es necesario el uso de la ley de contradicción para obtenerla). En segundo lugar, la premisa adicional en dicha prueba es la definición de U. Por ello, aunque haya más conjuntos aparte de U de los que se pueda demostrar PC depurada 1, sólo U admitirá PC depurada 2.

La expresión existencial de PC depurada 2:

$\exists x(x \in x \wedge x \notin x)$

sugiere la posibilidad de que conjuntos distintos de U la ejemplifiquen. En virtud de los lemas especiales conducentes a la paradoja, resulta la condición suficiente mínima:

Para todo x si $x_{\text{no es biyect. con med. =}}$ y def.x=def.U entonces x cumple $PC_{\text{depurada2}}$

y, considerando el teorema B, la condición suficiente más fuerte:

Para todo x si $P(x) \subseteq x$ y def.x=def.U entonces x cumple $PC_{\text{depurada2}}$

Es obvio que la vía argumental PC depurada 2 es exclusiva de U, pues conjuntos distintos no comparten definición. Pero esta paradoja tiene la misma forma que la paradoja de Russell del conjunto W (cuya vía argumental a su vez era exclusiva de W, pues también dependía de su definición). Por ello, la expresión existencial: $\exists x(x \in x \wedge x \notin x)$, es ejemplificada por los conjuntos U y W, aunque en virtud de argumentos dispares, perteneciente uno de ellos a las paradojas de Cantor y el otro a la de Russell. (Más adelante se verá que también Ω e I la ejemplifican, pero en virtud de las paradojas de Burali-Forti).

En contraste con esta última, las restantes paradojas de Cantor tienen una condición suficiente común que las religa a la históricamente original. Esa condición es: $P(x) \subseteq x$, el lema especial de PC en su demostración usual. De ella se deducen todos los lemas especiales de las PC simplificada, resimplificada y depurada 1. Con ello se hace patente que la PC histórica, no sólo requiere teoremas generales más potentes que sus derivaciones, sino también un lema especial más fuerte. En definitiva:

Para todo x si $P(x) \subseteq x$ entonces x cumple: PC y PC simplificada y PC resimplificada y PC depurada

(Como ya se anticipó, puede repetirse que los conjuntos: W e I, aunque no el conjunto Ω, cumplen, al igual que U, pero por motivos distintos que se argumentarán más adelante, que sus potencias son subconjuntos suyos).

4. La paradoja de Burali-Forti y sus simplificaciones

La más compleja de las tres paradojas históricas es la de Burali-Forti. Es relativa a Ω, el conjunto de todos los conjuntos ordinales. Y la clave de la paradoja reside en que Ω resulta ser a su vez ordinal (con lo cual pertenece a sí mismo).

La ordinalidad es una propiedad compleja que merece una breve discusión. Los ordinales son los conjuntos transitivos, y tales que la pertenencia, restringida a ellos, es: irreflexiva, asimétrica, transitiva, conexa, y con primer elemento.

$\forall x$ x es ordinal $\leftrightarrow_{df}$ $x_{trans} \wedge (x_{\in irref} \wedge x_{\in asim} \wedge x_{\in trans} \wedge x_{\in con} \wedge x_{\in primelem})$

No obstante, las cinco propiedades de la buena ordenación respecto a la pertenencia, no son independientes. Concretamente, en virtud de los teoremas:

$\forall$x(x es $\in$bienfundado$\rightarrow$x es $\in$irreflexivo)
$\forall$x(x es $\in$bienfundado$\rightarrow$x es $\in$asimétrico)
$\forall$x((x es $\in$bienfundado$\wedge$x es $\in$conexo)$\rightarrow$x es $\in$transitivo)
$\forall$x((x es $\in$bienfundado$\wedge$x es $\in$conexo)$\rightarrow$x con $\in$prim.elem.)

y de la circunstancia de que todo ordinal es $\in$bienfundado, pues:

$\forall$x((x con $\in$prim.elem.$\wedge$x es $\in$asimétrico)$\rightarrow$x es $\in$bienfundado)

es inmediata la equivalencia siguiente, según la cual bastan tres propiedades para determinar la ordinalidad:

$\forall$x(x es ordinal$\leftrightarrow$ (x es trans$\wedge$x es $\in$con$\wedge$x es $\in$bienfund))

En consecuencia, los ordinales son también los conjuntos que poseen estas tres propiedades, cuyas definiciones son:

$\forall x$ x es transitivo $\leftrightarrow_{df} \forall z \forall y(z \in x \wedge y \in z \rightarrow y \in x)$
$\forall x$ x es $\in$conexo $\leftrightarrow_{df} \forall z \forall y(z \in x \wedge y \in x \rightarrow (z \in y \vee y \in z \vee z=y))$
$\forall x$ x es $\in$bienfundado $\leftrightarrow_{df} \forall v[v \subseteq x \wedge v \neq \emptyset \rightarrow \exists u(u \in v \wedge \forall y(y \in v \rightarrow y \notin u))]$

La teoría de conjuntos incluye una rica subteoría de los conjuntos ordinales, entre cuyos teoremas interesa destacar, en el contexto de la paradoja de Burali-Forti, los siguientes: T1) todos los elementos de todo ordinal son ordinales; T2) dados dos ordinales cualesquiera, o son iguales o uno de ellos es elemento del otro; T3) dado cualquier conjunto no vacío de ordinales, hay al menos uno de sus elementos tal que ninguno de esos ordinales es elemento suyo; y T4) el sucesor de todo ordinal es un ordinal. En símbolos:

T1) $\forall z \forall y((z$ es ordinal $\wedge y \in z) \rightarrow y$ es ordinal$)$
T2) $\forall z \forall y((z$ es ordinal $\wedge y$ es ordinal$) \rightarrow (z \in y \vee y \in z \vee z=y))$
T3) $\forall v[\forall x(x \in v \rightarrow x$ es ordinal$) \wedge v \neq \emptyset \rightarrow \exists u(u \in v \wedge \forall y(y \in v \rightarrow y \notin u))]$
T4) $\forall x(x$ es ordinal $\rightarrow x'$ es ordinal$)$

Admitidas estas tesis (cuya demostración es bastante compleja), y dado que puede introducirse por definición, en virtud de los axiomas AF y AI, el conjunto: $\Omega =_{df} \{x : x$ es ordinal$\}$, surge la siguiente cadena de resultados.

(A) de los teoremas: T1, T2, T3, y la definición de Ω, se sigue: Ω es transitivo, es $\in$conexo y es $\in$bienfundado, o sea:

Ω es ordinal

(B) del teorema T4 y la tesis anterior se sigue:

Ω' es ordinal

(C) x+1 designa al sucesor de cualquier ordinal x:

$\forall x$ si x es ordinal, entonces: $x+1 =_{df} x'$

en particular, por la tesis anterior:

$\Omega+1 =_{df} \Omega' =_{df} \Omega \cup \{\Omega\}$ y $\Omega+1$ es ordinal

(D) la relación menor entre ordinales, $\prec$, se define directamente como la pertenencia entre dichos ordinales:

$\forall x \forall y$ si x e y son ordinales, entonces: $x \prec y \leftrightarrow_{df} x \in y$

en particular, al ser Ω y $\Omega+1$ ordinales, es legítima la cuestión de si entre ellos se da, y cómo se da, la relación $\prec$.

La paradoja de Burali-Forti, que presupone los desarrollos anteriores, consiste en la siguiente afirmación:

PBF) $\Omega\prec\Omega+1\wedge\Omega\not\prec\Omega+1$

Demostración: Se basa en dos lemas generales (el primero trivial y el segundo de compleja demostración) y un lema absolutamente específico de Ω (también complejo).

Lema 1) $\forall x(x\in x')$

cuya prueba es: para todo x, es lógicamente cierto: $x=x$; de lo cual se sigue lógicamente: $x\in x\vee x=x$; entonces (por def. de conjunto unitario): $x\in x\vee x\in\{x\}$; entonces (por def. de unión): $x\in x\cup\{x\}$; entonces (por def. de sucesor): $x\in x'$.

Lema 2) $\forall x$(x es ordinal$\rightarrow$x' es ordinal) (teorema T4)
Lema 3) Ω es ordinal (teoremas T1, T2, T3 y def. de Ω)

De los lemas: 1, 2 y 3, se llega a PBF así:

Por el lema 1 (en el caso particular en que x es Ω): $\Omega\in\Omega'$; y entonces (dado que, por los lemas 2 y 3, Ω y Ω' son ordinales) lo anterior puede expresarse: $\Omega\prec\Omega+1$, primer conyunto de PBF.

Por el lema 3: Ω es ordinal; entonces (por def. de ordinal) Ω es $\in$asimétrico; entonces (por la definición: x es $\in$asimétrico $\leftrightarrow_{df}$ $\forall z\forall y(z\in x\wedge\wedge y\in x\rightarrow(z\in y\rightarrow y\notin z)))$: $\forall z\forall y(z\in\Omega\wedge y\in\Omega\rightarrow(z\in y\rightarrow y\notin z))$; entonces (en el caso en que z e y son Ω' y Ω): $\Omega'\in\Omega\wedge\Omega\in\Omega\rightarrow(\Omega'\in\Omega\rightarrow\Omega\notin\Omega')\equiv(\Omega'\in\Omega\wedge\Omega\in\Omega)\rightarrow\rightarrow\Omega\notin\Omega'$ (*). Ahora bien, por lema 3 y def. de Ω: $\Omega\in\Omega$ (**) y, por los lemas 2 y 3 y la def. de Ω: $\Omega'\in\Omega$ (***). De (*), (**) y (***) resulta: $\Omega\notin\Omega'$; y entonces (dado que, por los lemas 2 y 3, Ω y Ω' son ordinales) lo anterior se puede expresar: $\Omega\not\prec\Omega+1$, segundo conyunto de PBF.

De PBF se sigue la afirmación existencial:

$\exists x(x\prec x+1\wedge x\not\prec x+1)$

la cual de por sí es una contradicción y tiene el interés adicional de sugerir la posibilidad de que otros conjuntos, aparte de Ω, tengan esa propiedad contradictoria. Respecto a ello hay que señalar, en primer lugar, que el uso de menor entre ordinales y de sucesor de ordinal en la misma expresión de la paradoja, implica:

Para todo x si x no es ord. entonces x no cumple PBF

(pudiendo anticiparse que, dado que U, W e I no son ordinales, esos conjuntos no cumplen esta paradoja). En segundo lugar, la clave de PBF es el lema 3, entendiendo por ello no sólo que Ω es ordinal, sino también que dicho Ω se define como el conjunto de todos los ordinales. Formalmente:

Para todo x si x es ord. y def.x=def.Ω entonces x cumple PBF

En suma, si algún conjunto ejemplifica la afirmación existencial que ha motivado este comentario, con seguridad dicho conjunto debe ser ordinal. Y, si la ejemplifica en virtud de una argumentación del tipo PBF con seguridad dicho conjunto debe ser el conjunto Ω.

Por otro lado, en el curso de la demostración de PBF ha surgido otra paradoja, la cual, al estar expresada en términos de la pertenencia, relación básica de la teoría de conjuntos, puede denominarse PBF depurada. Se trata de:

$$\mathrm{PBF}_{\mathrm{depurada1}})\ \Omega\in\Omega'\wedge\Omega\notin\Omega'$$

cuya demostración ha hecho uso de los lemas 1, 2 y 3, siendo por ello apenas distinguible, en el respecto de su argumentación, de PBF. Sin embargo, en otros respectos es muy distinta. En primer lugar, al no usar conceptos específicos de los ordinales, esta nueva paradoja tiene sentido en principio para todo conjunto. En segundo lugar, si se explicita por completo el enunciado de la paradoja, eliminando sus conceptos definidos, puede descubrirse una formulación equivalente que liga a esta paradoja con otras dos surgidas anteriormente. Concretamente, eliminando los definidos: sucesor, unitario y unión, y en virtud de leyes lógicas, surge la cadena de equivalencias:

$$\Omega\in\Omega'\wedge\Omega\notin\Omega' \equiv \Omega\in\Omega\cup\{\Omega\}\wedge\neg\Omega\in\Omega\cup\{\Omega\} \equiv$$
$$\equiv (\Omega\in\Omega\vee\Omega\in\{\Omega\})\wedge\neg(\Omega\in\Omega\vee\Omega\in\{\Omega\}) \equiv (\Omega\in\Omega\vee\Omega=\Omega)\wedge\neg(\Omega\in\Omega\vee\Omega=\Omega) \equiv$$
$$\equiv \Omega\in\Omega\wedge(\Omega\notin\Omega\wedge\Omega\neq\Omega) \equiv (\Omega\in\Omega\wedge\Omega\notin\Omega)\wedge\Omega\neq\Omega$$

resultando entonces:

$$\mathrm{PBF}_{\mathrm{depurada1}})\ \Omega\in\Omega'\wedge\Omega\notin\Omega' \equiv (\Omega\in\Omega\wedge\Omega\notin\Omega)\wedge\Omega\neq\Omega$$

es decir, esta paradoja es la conjunción de las dos paradojas depuradas más simples: la de la pertenencia entre un conjunto y él mismo (surgida en PR, PC y ahora en PBF) y la de la igualdad entre un conjunto y él mismo (surgida en PC y ahora en PBF).

De PBF depurada 1 se sigue la afirmación existencial:

$$\exists x(x \in x' \wedge x \notin x')$$

que de por sí es contradicción y que puede ser ejemplificada por conjuntos distintos de Ω. Desde luego, esos otros conjuntos que puedan ejemplificar esta tesis, lo harán por razones ajenas a la argumentación de PBF, cuya clave: "Ω es ordinal", es exclusiva de Ω. Sin embargo, ya no se da la restricción de que deban ser ordinales los conjuntos ejemplificadores. (Puede anticiparse que los conjuntos: U, W e I, aunque no son ordinales, ejemplifican sin embargo, cada uno por razones propias y todos por distintas razones que Ω, la implicación existencial de PBF depurada 1).

Retornando a la paradoja histórica de Burali-Forti, y debido a la circunstancia adicional: $\Omega=\Omega+1=\Omega'$, PBF sugiere de modo inmediato una PBF simplificada, en la cual, en lugar de tratarse relaciones contradictorias entre Ω y su sucesor, se expresan propiedades contradictorias entre Ω y él mismo.

Ante todo, debe constatarse que Ω y Ω' (u $\Omega+1$) son iguales:

$$\Omega=\Omega' \equiv \Omega=\Omega+1$$

cuya prueba es: el teorema general: $\forall x(x \in x \leftrightarrow x=x')$ (justificado por la def. de sucesor), más la circunstancia: $\Omega \in \Omega$ (justificada por: la tesis "Ω es ordinal" y la def. de Ω), implican: $\Omega=\Omega'$.

En segundo lugar: dado que $\Omega=\Omega+1$, de PBF se sigue, sustituyendo en ella $\Omega+1$ por Ω:

$$\text{PBF}_{\text{simplificada}}) \ \Omega \prec \Omega \wedge \Omega \not\prec \Omega$$

la cual es simplificada respecto a PBF por un doble motivo: desde luego, porque trata con un solo conjunto, pero también porque tiene una demostración directa más sencilla que la de dicha paradoja. En esa demostración la clave sigue siendo "Ω es ordinal", pero el teorema T4 ya no es requerido como lema.

Demostración: Se basa en un lema general, de inmediata demostración, y un lema absolutamente específico de Ω.

Lema 1) $\forall x(x \text{ es ordinal} \rightarrow x \notin x)$

cuya prueba es: para todo x, si x es ordinal entonces (por def. de "x es ordinal"): x es $\in$irreflexivo; entonces (por la definición: x es $\in$irreflexivo $\leftrightarrow_{df}$ $\leftrightarrow_{df}\forall z(z\in x\rightarrow z\notin z)$): $\forall z(z\in x\rightarrow z\notin z)$; entonces (en el caso particular en que z sea x): $x\in x\rightarrow x\notin x$, que equivale lógicamente a: $x\notin x$.

Lema 2) Ω es ordinal (teoremas T1, T2, T3 y def. de Ω)

De los lemas 1 y 2 se llega a PBF simplificada así:

Por los lemas 1 y 2: $\Omega\notin\Omega$; y entonces (dado que por el lema 2 Ω es ordinal) lo anterior puede expresarse así: $\Omega\not\prec\Omega$, segundo conyunto de PBF simplificada.

Por el lema 2 y la def. de Ω: $\Omega\in\Omega$; y entonces (dado que por el lema 2 Ω es ordinal) lo anterior puede expresarse: $\Omega\prec\Omega$, primer conyunto de PBF simplificada.

PBF simplificada implica la afirmación existencial:

$$\exists x(x\prec x\wedge x\not\prec x)$$

que es contradictoria y que puede ser ejemplificada por conjuntos diferentes de Ω. Al utilizar menor entre ordinales, sólo la pueden ejemplificar ordinales (en particular: U, W e I no pueden hacerlo). Y, al depender la argumentación PBF simplificada de: "Ω es ordinal", sólo Ω puede ejemplificarla por ese argumento.

Por otro lado, en el curso de la argumentación de PBF simplificada ha surgido otra paradoja, la cual, al estar expresada en términos de pertenencia, es una nueva PBF depurada:

$PBF_{depurada2})$ $\Omega\in\Omega\wedge\Omega\notin\Omega$

cuya prueba es casi indistinguible de la de PBF simplificada. Sin embargo, se distingue de ella en otros respectos. Ante todo, no está restringida a ordinales, pues no usa conceptos específicos de éstos. En segundo lugar, tiene la misma forma que la paradoja de Russell y la paradoja de Cantor depurada 2.

De PBF depurada 2 se sigue la afirmación existencial:

$$\exists x(x\in x\wedge x\notin x)$$

que es contradictoria y que puede ser ejemplificada por conjuntos distintos de Ω. Esta expresión ha surgido ya como consecuencia de PR (en virtud de lo cual la cumple W y sólo W), y de PC depurada 2 (por cuya razón la cumple U y sólo U); ahora surge de PBF depurada 2 (debido a lo cual la cumple Ω y sólo Ω), y volverá a surgir nuevamente como consecuencia de la "PBF extendida al conjunto I" (por lo cual la cumple I y solamente I).

5. La paradoja de Burali-Forti extendida al conjunto I

Dado que éste es un análisis sistemático y no histórico, se puede englobar en la denominación "Burali-Forti" a una paradoja del conjunto I de todos los conjuntos $\in$irreflexivos, por su estrecha analogía con la paradoja de Burali-Forti simplificada. El interés de esta paradoja reside en que conjuga esa fuerte analogía con las paradojas BF y una gran simplicidad argumental. No debe olvidarse que PBF depende de cuatro complejos teoremas de los ordinales, justificadores de que Ω y el sucesor de cualquier ordinal son ordinales. Y que PBF simplificada sigue dependiendo de tres de esos cuatro teoremas, necesarios para justificar que Ω es ordinal. En contraste con ello, la paradoja PBF extendida a I es demostrable con inmediatez. Y ello es así porque: "I es $\in$irreflexivo", de análogo papel a: "Ω es ordinal" en PBF simplificada, tiene una justificación sencilla.

Sea el conjunto $I=_{df}\{x{:}x$ es $\in$irreflexivo$\}$, donde a su vez:

$$\forall x\ x \text{ es } \in\text{irreflexivo} \leftrightarrow_{df} \forall z(z\in x\rightarrow z\notin z)$$

la paradoja de Burali-Forti extendida al conjunto I es la tesis:

$$PBF_{extendida\,a\,I})\ I\in I\wedge I\notin I$$

Demostración: Se basa en un lema general, de inmediata demostración, que tiene como corolario: "I es $\in$irreflexivo".

Lema 1) $\forall x(x$ es $\in$irreflexivo$\rightarrow x\notin x)$

cuya prueba es: para todo x, si x es $\in$irreflexivo entonces (por def. de "x es $\in$irreflexivo"): $\forall z(z\in x\rightarrow z\notin z)$; entonces (en el caso particular en que z es x): $x\in x\rightarrow x\notin x$, equivalente por lógica a $x\notin x$.

Corolario del lema 1) I es $\in$irreflexivo

cuya prueba es: por el lema 1 y la def. de I: $\forall x(x\in I\rightarrow x\notin x)$; entonces, por la def. de "x es $\in$irreflexivo": I cumple tal definición, o sea: I es $\in$irreflexivo.

Del lema 1 y su corolario se llega a PBF extendida a I, así:

Por el lema 1 y su corolario: $I \notin I$, segundo conyunto de PBF extendida a I.

Por el corolario del lema 1 y la def. de I: $I \in I$, primer conyunto de PBF extendida a I.

En suma, un teorema general pero muy elemental, el lema 1, y la definición del conjunto I, han bastado para generar esta paradoja, cuya demostración ha sido desplegada en el mayor paralelismo posible con la prueba de PBF simplificada.

PBF extendida a I implica la afirmación existencial:

$$\exists x(x \in x \wedge x \notin x)$$

que es contradictoria y surge ya por cuarta vez. Los cuatro conjuntos: U, W, Ω e I, cada uno por su propia vía argumental, la ejemplifican.

6. La trama de los macroconjuntos y las paradojas

Los cuatro macroconjuntos y las ocho afirmaciones existenciales contradictorias mantienen una trama de relaciones que debe ser explicitada. Se demostrarán primero (sin recurrir a la ley de contradicción) conexiones entre estos conjuntos que restan por determinar. Y se puntualizarán después cuáles de esos conjuntos satisfacen las sucesivas afirmaciones existenciales.

En primer lugar, el conjunto I está íntimamente ligado con uno de los tres conjuntos paradójicos históricos:

$$I = P(W)$$

pues: $x \in I \leftrightarrow x$ es $\in$ irreflexivo $\leftrightarrow \forall z(z \in x \rightarrow z \notin z) \leftrightarrow \forall z(z \in x \rightarrow z \in W) \leftrightarrow x \subseteq W \leftrightarrow$ $\leftrightarrow x \in P(W)$.

Por otro lado, hay que clarificar la relación entre W y su potencia. Recuérdese que $U = P(U)$. Si fuese ése también el caso para W, sucedería entonces que I y W serían el mismo conjunto. Pero no es así. Lo cierto es lo siguiente:

$$P(W) \subseteq W$$

pues: si $x \in P(W)$, entonces: $x \subseteq W$; entonces: $\forall z(z \in x \rightarrow z \in W)$; entonces: $\forall z(z \in x \rightarrow z \notin z)$; entonces (en el caso particular en que z sea x): $x \in x \rightarrow x \notin x$, lo cual equivale lógicamente a: $x \notin x$; y entonces: $x \in W$.

$W \nsubseteq P(W)$

pues: hay al menos un conjunto, $\{>3\}$, tal que $\{>3\} \in W$ y $\{>3\} \notin P(W)$. Esto a su vez se justifica así. $>3 =_{df} \{x: card(x) > 3\}$, es decir, >3 es el conjunto de todos los conjuntos de más de tres elementos. Como >3 tiene más de tres elementos, resulta: $>3 \in >3$; entonces: $>3 \notin W$; entonces: $\{>3\} \nsubseteq W$; entonces: $\{>3\} \notin P(W)$. Por otro lado, $\{>3\}$ no pertenece a $\{>3\}$ (pues $\{>3\} \neq >3$, ya que $\{>3\}$ tiene un elemento y >3 tiene infinitos elementos), por tanto: $\{>3\} \in W$.

Las relaciones entre I y su potencia, son en todo punto similares a las del conjunto W. En concreto:

$P(I) \subseteq I$

esto es consecuencia de dos tesis: (a) todo subconjunto, y, de un conjunto $\in$irreflexivo, x, es $\in$irreflexivo (pues si $\in$ es irreflexiva en x también lo es su restricción a sus subconjuntos) y (b) I es $\in$irreflexivo (ya demostrado). De (a) y (b) se sigue: todo subconjunto de I es $\in$irreflexivo, o sea, es elemento de I.

$I \nsubseteq P(I)$

pues: hay al menos un conjunto, $\{\{>3\}\}$, tal que $\{\{>3\}\} \in I$ y $\{\{>3\}\} \notin P(I)$. Pues, por un lado, se acaba de demostrar que el único elemento de $\{\{>3\}\}$, es decir: $\{>3\}$ no pertenece a $\{>3\}$; en consecuencia: $\{\{>3\}\} \in I$. Por otro lado, antes se probó $\{>3\} \notin P(W)$; entonces (como $P(W)=I$): $\{>3\} \notin I$; entonces: $\{\{>3\}\} \nsubseteq I$; entonces: $\{\{>3\}\} \notin P(I)$.

Las relaciones entre Ω y su potencia son las opuestas a las de los conjuntos W e I. Es decir:

$P(\Omega) \nsubseteq \Omega$

esto es consecuencia de tres tesis. Ante todo se consideran dos: (a) todo subconjunto, y, de un conjunto ordinal, x, es ordinal si y sólo si es transitivo (pues, si $\in$ es conexa y bienfundada en x también lo es en sus subconjuntos, pero no sucede lo mismo con la transitividad) y (b) Ω es ordinal (ya demostrado). De (a) y (b) se sigue: todo subconjunto de Ω es ordinal si y sólo si es transitivo. Y, de esto último, junto a la tesis tercera (c) hay subconjuntos de Ω no transitivos (como: $\{0,2,3\}$), se sigue: hay subconjuntos de Ω no ordinales, o sea, que no pertenecen a Ω.

$\Omega \subseteq P(\Omega)$

pues, esto significa simplemente que Ω es transitivo, lo cual es cierto porque: (a) todo ordinal es transitivo (por def. de ordinal), y (b) Ω es ordinal (ya demostrado).

Importa también precisar cuáles de los macroconjuntos son ordinales. Desde luego Ω lo es, pero los otros tres no lo son:

U, W e I no son ordinales

la razón es común: recuérdese el teorema T1: todos los elementos de todo ordinal son ordinales. Pues bien, aunque U, W e I tienen a todos los ordinales como elementos (pues se ha demostrado que todo ordinal es igual a sí mismo, que todo ordinal no pertenece a sí mismo, y que todo ordinal es $\in$irreflexivo), también todos ellos tienen elementos que no son ordinales. Por ejemplo: {0,2,3} es elemento de U, de W, y de I, pero no es ordinal. Por lo tanto, ni U, ni W, ni I cumplen T1, por lo cual no son ordinales.

La anterior argumentación permite también concluir que Ω es subconjunto propio de U, de W, y de I. Además, como $\Omega \subset I$, entonces $P(\Omega) \subset P(I)$. Y puede añadirse que Ω es subconjunto propio de P(I):

$\Omega \subset U$ y $\Omega \subset W$ y $\Omega \subset I$ y $P(\Omega) \subset P(I)$ y $\Omega \subset P(I)$

justificándose la quinta tesis así: de T1 y la circunstancia de que todo ordinal es $\in$irreflexivo, se sigue: todos los elementos de todo ordinal son x $\in$irreflexivos; o sea: todo ordinal es un subconjunto de I; es decir, todo elemento de Ω es elemento de P(I); en suma: $\Omega \subseteq P(I)$. Además, hay conjuntos (como {0,2,3}) que son elementos de P(I), pero no son ordinales; entonces: $P(I) \nsubseteq \Omega$.

Por último, en la teoría cantoriana se cumple:

$W \subseteq U$ y $U \nsubseteq W$

pues: como todo es igual a sí mismo, todo elemento de W es igual a sí mismo, por lo cual es elemento de U; y hay al menos un conjunto, >3, que es elemento de U (por ser igual a sí mismo) y no es elemento de W (por pertenecer a sí mismo).

De los cuatro macroconjuntos se puede concluir:

$$\Omega \subset P(\Omega) \subset P(I) \subset I=P(W) \subset W \subset U=P(U)$$

Respecto a cuántos y cuáles de estos conjuntos cumplen cada una de las ocho afirmaciones existenciales contradictorias, es posible ahora realizar una análisis más completo. Conviene distinguir estas afirmaciones de las vías argumentales mediante las cuales unos u otros conjuntos las cumplen. Son dichas vías o razonamientos, en lugar de las fórmulas o expresiones, las que pueden llamarse más adecuadamente: "de Russell", "de Cantor", "de Burali-Forti" o de "Burali-Forti extendida", respectivamente. También es interesante, por último, distinguir las afirmaciones existenciales por su grado de complejidad. La discusión discurre comenzando por las más elementales.

1) $\exists x(x \in x \wedge x \notin x)$

Los cuatro conjuntos la ejemplifican. Cada uno de ellos por vías distintas. W por la vía PR. U por la vía PC (la depurada 2). Ω por la vía PBF (la depurada 2). I por la vía PBF extendida.

2) $\exists x(x \neq x)$

Los cuatro conjuntos la ejemplifican. Tres de ellos por la vía PC (la depurada 1). Era condición suficiente de esa vía el que: $P(x) \subseteq x$. Tanto U como W e I tienen esa propiedad (aunque en el caso de U la base de ello es una ley lógica de la identidad y en los casos de W y de I la base son teoremas matemáticos). En cuanto a Ω, no puede llegar por dicha vía, ya que su potencia no es subconjunto suyo. Pero lo hace de otro modo: por la vía PBF (la depurada 1). En virtud de ella, Ω cumple: $\Omega \in \Omega' \wedge \Omega \notin \Omega'$; esto equivale lógicamente a: $(\Omega \in \Omega \wedge \Omega \notin \Omega) \wedge \Omega \neq \Omega$; por tanto, también es cierto: $\Omega \neq \Omega$.

3) $\exists x(x \in x' \wedge x \notin x')$

Los cuatro conjuntos la ejemplifican. Uno de ellos lo hace directamente: Ω por la vía PBF (la depurada 1). Los otros tres lo hacen indirectamente. U, W e I, por diversos motivos ya señalados, ejemplifican las afirmaciones existenciales 1) y 2), entonces (como lo cuantificado en 3) equivale a la conjunción de lo que en 1) y en 2) se cuantifica): U, W e I ejemplifican 3).

4) $\exists x(x \approx x \wedge x \not\approx x)$
5) $\exists x(\mathrm{card}(x) < \mathrm{card}(x) \wedge \mathrm{card}(x) \nless \mathrm{card}(x))$
6) $\exists x(\mathrm{card}(x) < \mathrm{card}(P(x)) \wedge \mathrm{card}(x) \nless \mathrm{card}(P(x)))$

Las ejemplifican U, W e I. Lo hacen por motivos similares, pues los tres conjuntos siguen la vía PC (la resimplificada, la simplificada y la normal) para ejemplificar cada uno a cada una de estas afirmaciones. Una condición suficiente de estas tres ramas de PC era: $P(x) \subseteq x$, propiedad que los tres conjuntos tienen. Por otro lado, Ω no cumple esa condición suficiente. Para cumplir 4), 5) o 6), tendría que hacerlo por otra vía, que no vislumbro.

7) $\exists x(x \prec x \wedge x \nprec x)$
8) $\exists x(x \prec x+1 \wedge x \nprec x+1)$

Las ejemplifica Ω. Lo hace por la vía PBF (la simplificada y la normal, respectivamente). Y, con seguridad, ni U, ni W, ni I, las ejemplifican, pues no son ordinales y, por ello, no tiene sentido aplicarles la relación $\prec$.

Como última curiosidad sobre la compleja trama entre macroconjuntos y paradojas, cabe señalar que la clave de que W cumpla las PC, es decir: "$P(W) \subseteq W$", y la clave para que I cumpla la PBF extendida, es decir: "$\forall x$(x es $\in$ irreflexivo$\rightarrow x \notin x$)", no son mas que dos modos equivalentes de escribir (usando definidos distintos) el mismo teorema matemático, el cual, explicitado sin conceptos definidos es: "$\forall x(\forall z(z \in x \rightarrow z \notin z) \rightarrow x \notin x)$".

7. La paradoja de la variable y

Aunque no es una de las paradojas históricas, pues se detectó después de que la teoría de conjuntos hubiese sido reformulada por Zermelo, merece la pena incluir esta paradoja, consecuencia inmediata de exclusivamente AF. A diferencia de las anteriores es puramente existencial, no alcanza la unicidad y por ello no lleva a definir conjunto alguno. Dos rasgos la hacen interesante. Por un lado, es tan inmediata como PR. Por otra parte, mientras que las anteriores paradojas son evitadas con el axioma de especificación zermeliano, ésta se mantiene y obliga a realizar en dicho axioma una restricción adicional.

Sea el axioma de formación:

AF) Para toda $A(x)$ $\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow A(x))$

en virtud de su forma, las descripciones A(x) con la variable y libre además de la x, son sintácticamente admisibles. La paradoja de la variable y surge al singularizar AF con la A(x): "$x \notin y$".

$$\mathrm{PVARy}_{\mathrm{Cantor}})\ \exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x \notin y) \equiv \exists y \forall x(x \in y \land x \notin y) \equiv \exists y(y=U \land y=\varnothing)$$

es decir: hay al menos un conjunto tal que todo conjunto es elemento suyo y no es elemento suyo, afirmación contradictoria.

Por otro lado, con el axioma de especificación zermeliano, axioma de formación de subconjuntos de un conjunto dado mediante descripción precisa:

AE) Para toda A(x) $\forall z \exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x \in z \land A(x))$

(en el cual las descripciones que en AF generaban conjuntos paradójicos ya no los generan), la descripción "$x \notin y$" sigue siendo catastrófica, pues implica:

$$\mathrm{PVARy}_{\mathrm{Zermelo}})\ \forall z \exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x \in z \land x \notin y) \equiv \forall z \exists y \forall x(x \notin z \land x \notin y) \equiv$$
$$\equiv \forall z \forall x(x \notin z) \land \exists y \forall x(x \notin y) \equiv \forall z \forall x(x \notin z) \equiv \forall z(z=\varnothing)$$

afirmación aún no contradictoria, pero que genera contradicción cuando en la teoría se define cualquier conjunto no vacío.

La paradoja de la variable y es evitada en la teoría de Zermelo añadiendo el requisito: "las descripciones A(x) legítimas en AE no deben tener libre la variable y".

Julián Garrido es profesor titular de Filosofía de la Ciencia en la Facultad de Ciencias de Granada. Se doctoró en Física con una tesis sobre la estructura axiomática de la Termodinámica y ha publicado artículos sobre: los tipos de verdad científica, la medición, la contrastación experimental, la definición y sobre el tema de su tesis doctoral, en: *Crítica, Análisis Filosófico, Arbor, Erkenntnis, Poznan Studies* y *Theoria.*

VERDAD Y CIRCULARIDAD: EL PROBLEMA DE LA SUPERVENIENCIA SEMANTICA†

(*Truth and Circularity: The Problem of Semantic Supervenience*)

Eduardo Alejandro BARRIO*

Manuscrito recibido: 2000.12.26.
Versión final: 2001.10.30.

* Instituto de Filosofía, Facultad de Filosofía y Letras, Universidad de Buenos Aires, Puán 470, 1406 Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina.
E-mail: ebarrio@filo.uba.ar

BIBLID [0495-4548 (2002) 17: 43; p. 63-79]

RESUMEN: Belnap y Gupta sostienen que la verdad es un concepto circular: su extensión no puede ser establecida si ella no es previamente hipotetizada. Yaqûb argumenta que esta circularidad es incompatible con la conjunción de la tesis de la superveniencia semántica y el principio de bivalencia. En este artículo, intento reforzar con nuevos elementos la posición de Yaqûb. Aunque se debilite la tesis de la superveniencia de una manera que Yaqûb no ha considerado, no parece fácil advertir cómo Belnap y Gupta pueden escapar a la mencionada incompatibilidad.

Descriptores: verdad, paradojas, concepto circular, superveniencia semántica, teoría de la revisión.

ABSTRACT: *Belnap and Gupta have recently maintained that truth is a circular concept: its extension cannot be established without being previously hypothesized. This has led Yaqûb to claim that the circular character in question cannot be made compatible with the thesis that semantic properties are supervenient ones. Belnap and Gupta have explicitly denied such a claim any plausibility. In this paper, I offer some new arguments in support of Yaqûb's position. Such arguments are based on an analysis of some aspects of Belnap and Gupta's theory that, as far as I know, had not been considered before.*

Keywords: *truth, paradoxes, circular concept, semantic supervenience, revision theory of truth.*

SUMARIO

La tesis según la cual las afirmaciones no semánticas constituyen el único sustento para el establecimiento de las afirmaciones semánticas parece fundarse en una simple intuición. Siempre que hayamos establecido los va-