

Gradu Amaierako Lana / Trabajo Fin de Grado  
Fisikako Gradua / Grado en Física

## MinervaLab

Jupyter Notebook-etan oinarritutako irakaskuntza-proiektu alternatiboa

Egilea / Autor/a:  
Jon Gabirondo López  
Zuzendaria / Director/a:  
Josu M. Igartua



# Gaien aurkibidea

<b>1</b>	<b>Sarrera eta helburuak</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Garapena: oinarri teorikoa</b>	<b>4</b>
2.1	Hausnarketa . . . . .	4
2.1.1	Lehen etapa: dokumentu baten ezaugarrien inguruko hausnarketa . . . . .	4
2.1.2	Bigarren etapa: unitate didaktiko baten ezaugarrien inguruko hausnarketa . . . . .	6
2.2	Erabilitako tresnak . . . . .	7
2.2.1	Jupyter Notebook . . . . .	7
2.2.2	Git . . . . .	11
2.2.3	Binder . . . . .	12
2.2.4	Read the Docs . . . . .	13
2.2.5	Zenodo . . . . .	14
2.2.6	Tresna guztien integrazioa . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Garapena: MinervaLab proiektua</b>	<b>16</b>
3.1	Sortutako materiala . . . . .	18
3.1.1	Fase-trantsizioak . . . . .	18
3.1.2	Van der Waals-en egoera-ekuazioa . . . . .	23
3.1.2.1	Puntu kritikoa . . . . .	24
3.1.2.2	Potentzial kimikoaren azterketa . . . . .	26
3.1.2.3	Lerro isoterma errealak . . . . .	27
3.1.2.4	Bolumen molarraren aldaketa . . . . .	30
3.1.2.5	Entropia molarraren aldaketa . . . . .	32
3.2	Inkosten emaitzak . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Ondorioak</b>	<b>35</b>

# 1. kapitulua

## Sarrera eta helburuak

Fisikaren irakaskuntzaren inguruko ikerkuntzek ikasle-ikasle, ikasle-irakasle eta ikasle-ikasgai elkarrekintzetan oinarritutako ikaskuntza-prozesuen eraginkortasuna frogatu dute. Are gehiago, ohiko eskola magistralekin alderatuta, ikasleek etekin akademiko handiagoa ateratzen diote ikerkuntzan oinarritutako ikasketa-prozesuei [1]. Horrelako proiektuetan *adierazpenek* (irudiek, adierazpen matematikoek, kontzeptuen arteko harremanek etab.) garrantzi handia dute, ezagutza teknikoak zabaldu eta horien inguruan jarduteko oinarriak baitira. Ahozko komunikazioak, gorputz-espresioek eta keinuek osatutako *adierazpen iragankorrak* baino, *adierazpen iraunkorrak* dira —adierazpen matematikoak, irudiak eta grafikak, esaterako— ikasleen barneraketa- eta komunikazio-prozesuak hobetzen dituzten baliabideak, iraunkorrak izateak horien gainean lan egin eta haiek aipatzea ahalbidetzen baitu [2]. Teknologia berriek adierazpen iraunkorrak sortzeko eta banatzeko aukera gehiago eskaintzen dituzte eta, zenbait plataformen erabileran oinarrituta, ikasleen parte-hartzea sustatu eta desiratutako elkarrekintza horiek areagotu daitezke. Horregatik, azken urteetan sortutako plataformak ardatz nagusitzat dituzten irakaskuntza-proiektuek irakasle askoren interesa piztu dute [3].

Bi izango dira lan honen helburuak: alde batetik, MinervaLab proiektua sortuko da, Jupyter Notebook-etan oinarritutako Termodinamikaren inguruko materiala jasoko duena. Material hori ikasleen ikasketa autonomoa bultzatuko duten aplikazio interaktiboetan oinarrituko da eta aurrez aurre edota sarean eskola emateko aukera emango du. Bestetik, aipaturiko materiala sortzeko tresna aiposenak hautatzea eta haien integrazioa aztertzea bilatuko da, softwarearen garapenean erabiltzen diren zenbait plataforma eta lan-fluxu azalduz. Helburu hori betetzeak lanaren orokortasuna bermatuko du, deskribatutako estrategia eta tresnen erabilerak beste eremu batzuetan aplikagarriak izango baitira: Fisikako beste irakasgaiez gain, zientziaren irakaskuntzako esparru anitzetan edota ikerkuntzan, besteak beste.

Lehenengo atalean lan honen funtsezko motibazioa azaltzen da: dokumentu orokor baten garapenak eta dokumentuak berak izan beharko lituzkeen ezaugarrien inguruko hausnarketatik hasita, Fisikako unitate didaktiko baten materialak izan beharko lituzkeen zehaztasunak finkatzen dira. Hausnarketa horietan ondorioztatutako helburuak betetzea ahalbidetuko duten tresna eta plataformak jarraian deskribatzen dira. Hurrengo atalean, Jupyter Notebook-etan oinarritutako unitate didaktiko baten adibidea garatzen da:

fase-trantsizioen inguruko kontzeptuak azaldu nahian, van der Waals-en egoera-ekuazio mekanikoa betetzen duten jariakinen ezaugarrietan sakontzen da [4]. Atal horretan jasotako material guztia ikasleek Jupyter Notebook-en bidez jasoko luketeena da eta van der Waals-en egoera-ekuazioarekin lotutako irudi guztiak garatutako aplikazioen bidez sortutakoak dira. Ikasle-talde batek aplikazio horien inguruan azaldutako iritzia segidan datorren atalean azaltzen da, aplikazioak hobetu eta ikasleen beharrei egokitzeko erabili dena. Lortutako emaitzen balorazioa eta hurrengo urratsen inguruko eztabaida azken atalean jasotzen da.

## 2. kapitulua

# Garapena: oinarri teorikoa

### 2.1 Hausnarketa

Gradu Amaierako Lan honetan erabiliko diren tresna eta plataformak hautatu ahal izateko, sortu nahi den produktuaren amaierako egoeraren eta izaeraren inguruko hausnarketa sakon bat egitea ezinbestekoa da.

Hausnarketa hori bi etapetan banatu da: dokumentu orokor batek izan beharko lituzkeen ezaugarrien ingurukoa da lehena. Etapa horretan lortutako ondorioak oinarritzat hartuta, zehazki Fisikaren inguruko unitate didaktiko baten garapenaren inguruko hausnarketan sakontzea bilatzen da bigarren etapan.

Hausnarketen helburua lanaren orokortasuna bermatzea da. Nahiz eta unitate didaktiko baten ezaugarriak lehendik aztertuta egon [1], arazoa modu orokor eta sakonago batean planteatzeak lortutako emaitzak beste esparru batean aplikagarriak izaten laguntzen du.

Bi hausnarketa horien ostean, behin sortu nahi den materialaren ezaugarriak argi daudela, finkatutako helburuak betetzea ahalbidetuko duten tresnak deskribatuko dira, bakoitzaren eginkizuna eta haien arteko integrazioa azalduz.

#### 2.1.1 Lehen etapa: dokumentu baten ezaugarrien inguruko hausnarketa

Dokumentu batek izan beharko lituzkeen ezaugarri nagusiak zerrendatuko dira jarraian:

- **Iraunkortasuna**

Dokumentu baten ezaugarri garrantzitsuena iraunkortasuna da: dokumentuaren garapena hasten den unetik guztiz baliogabea bihurtu bitarteko denbora-tartea maximoa izan behar da. Horrela, material hori sortzean erabilitako baliabideen eraginkortasuna maximoa izatea lortzen da.

Dokumentu bat editagarria izan behar da ahalik eta iraunkorrena izateko. Garapen-prozesuan moldagarria izateaz gain, zenbait kasutan, dokumentuak aldaketak onartu

behar ditu argitaratu ostean, egindako akatsak zuzendu edota edukia eguneratzeko.

Editagarritasuna bermatzeko, funtsezkoa da dokumentua sortzean jarraitutako urrats zein irizpideak jasota izatea, edizio-prozesua ahalik eta erraz eta azkarrena izan dadin.

Zenbait kasutan oso interesgarria izango da aldaketak egiteko aukeraz gain, aurreko egoera batera itzultzeko aukera ere izatea, manipulazio berriek sortutako ezustekoak desegiteko.

- **Hartzaile eta eremuarekiko egokitasuna**

Dokumentu bat sortzerako orduan beti hartu behar da kontuan zeini dagoen bideratuta eta argitarapenerako erabiliko den hedabidea. Bi faktore horiek dokumentuaren oinarrizko helburua moldatuko dute eta amaierako produktuaren izaera baldintzatuko dute.

Esaterako, nahiz eta oinarrizko helburua printzipio fisiko baten inguruko ezagutzak ematea izan, sortutako materiala ez da berdina izango laborategian garatutako jarduera praktikoko baten bidez edo eskola teoriko baten bitartez azaltzen bada. Gainera, adibide horretan, materiala jasoko duten ikasleen aurretikako ezagutzak kontuan hartu beharko liriateke.

- **Errepikagarritasuna**

Ezaugarri hau estuki lotuta dago editagarritasunaren inguruan aipatutakoarekin: askotan oso garrantzitsua da dokumentu baten historia jasota edukitzea. Egindako aldaketen inguruko informazioa edukitzeaz gain, dokumentuaren garapenean parte hartu ez duen edonork lana partzialki edota osoki errepikatu nahi izanez gero, ezinbestekoa izango da jarraitutako urrats eta irizpideak eskuragarri izatea.

- **Identifikagarritasuna**

Nahiz eta aurrekoak bezain funtsezkoa ez izan, lan bat identifikagarria izatea kontuan hartzeko moduko faktore bat izan daiteke, batez ere lanaren hedapena bilatzen bada.

Zientzia munduan, esaterako, ezinbestekoa da publikatutako artikulak modu egokian identifikatuta egotea, gainontzeko egileek lan horri erreferentzia egin nahi izanez gero, modu erraz eta apropos batean egin ahal izateko.

Laburbilduz, dokumentu baten garapena honek izango duen hartzailearen eta hedatuko den eremuaren inguruko hausnarketa batekin hasi beharko litzateke. Urrats horretatik hasita eta dokumentuaren bizitza erabilgarria amaitu arte, egindako aldaketen erregistro bat gordetzea funtsezkoa izango da lanaren editagarritasuna eta errepikagarritasuna bermatzeko. Gainera, egindako materiala erraz identifikatzeko tresna edota baliabideak bilatu beharko dira bere hedapen egokia ziurtatzeko.

## 2.1.2 Bigarren etapa: unitate didaktiko baten ezaugarrien inguruko hausnarketa

Dokumentu orokor batek izan beharreko ezaugarriak behin finkatuta, hausnarketa gehiago sakondu behar da unitate didaktiko batenak zehazteko. Horretarako, sortu nahi den produktuaren izaera une honetan erabakiko da, orain arte egindako iruzkin guztiak kontuan hartuz.

Kasu honetan, nahiz eta unitate didaktiko orok dituen ezaugarriak mantendu, zenbait zehaztasun definitzerakoan proiektu honen helburua Fisikako Graduko ikasleentzako materiala garatzea dela hartuko da kontuan. Material hori klasean erabiltzeko modukoa izateaz gain, ikasleek ikasgelatik kanpo erabiltzea ere aurreikusten da.

Lanaren hartzailea eta eremua finkatuta daudenez, bi faktore horiei egokitzeko hartu beharreko neurrien inguruko gogoeta hasiera-puntu aproposa izan daiteke.

Sortuko den materialaren oinarria da hartu beharreko lehenengo erabakia. Zientzietako ikasleei bideratutako materiala izango denez, grafikak, adierazpen matematikoak eta irudiak modu erraz eta organiko batean kudeatzea ahalbidetuko duen oinarri bat erabili beharko da. Gainera, materiala eremu ezberdinetan erabiltzea aurreikusten denez (ikasgelak eta ikasleek ikasteko erabilitako guneak) aukerarik onena oinarri digitaldun materiala sortzea dela erabaki da.

Material digitala sortzeak hainbat onura ditu: editagarritasuna bermatzeko aukera gehiago eskaintzeaz gain, baliabide ez-berrerabilgarrien kontsumoa murrizten du eta bestelako elementuak (bideoak, web orriak, aplikazioak etab.) eskuragarri ipintzen ditu.

Ikasleek bereziki konplexuak izan daitezkeen kontzeptuak errazago barneratu ditzaten, oso apropostzat jo dira elkarrekintza ahalbidetu dezaketen formatuak. Horrelako baliabideen garapena ohiko bilakatu da azken urteetan Haur Hezkuntza, Lehen Hezkuntza, Derrigorrezko Bigarren Hezkuntza eta Batxilergoko zentroetan [5, 6]. Unibertsitatean ere hainbat saiakera egin dira [7, 8], nahiz eta askoz ezohikoagoa izan. Proiektu honen helburua ikasleek erabili beharreko material guztia elkarren artean integratutako tresna gutxi batzuen bidez sortu eta argitaratu ahal izatea da.

Bestalde, materialaren bizitza maximizatzeko ahaleginek funtsezko papera hartzen dute unitate didaktiko baten garapenean. Sarritan, material berbera urtetik urtera berrerabiltzen da. Horren ondorioz, ohikoa da materiala editatu behar izatea, bai ikasleak akatsak topatzen joaten direlako, bai materiala eguneratu edota osatu behar delako. Ondorioz, dokumentuak berak zein hura argitaratzeko tresnek aldaketa horiek ahalbidetu eta, kasu ideal batean, bertsio batetik bestera egindako aldaketen kontrola eskaini behar dute.

## 2.2 Erabilitako tresnak

Aipatutako ezaugarriak dituen materiala garatu eta mantentzeko erabiliko diren tresnak atal honetan deskribatuko dira. Azken urteetan sortutako plataforma ezberdinak dira tresna horiek, softwarearen garapenean bereziki ezagun eta erabiliak direnak. Orain arte finkatutako helburuak baliabide horien bidez lortzeko aukerak aztertuko dira, tresnen deskribapen orokor bat emanez eta haien arteko integrazioan arreta berezia ipiniz.

Plataformak aukeratzeko orduan doakoak eta kode irekikoak<sup>1</sup> izatea bilatu da (salbuespen bakarrarekin), sortutako materiala edonork erabil eta edita dezan.

### 2.2.1 Jupyter Notebook

Jupyter Notebook konputazio-prozesu baten atal guztiak fitxategi bakar batean burutzeko aukera ematen duen web-aplikazio bat da [10]. Kodearen garapena, dokumentazioa eta exekuzioa ahalbidetzeaz gain, lortutako emaitzak tratatu eta komunikatzeko aukera eskaintzen dute Jupyter-en Notebook-ek.

Jupyter Notebook proiektua aipaturiko informazio guztia jasotzen duten Notebook-ek eta haiekin lan egiteko inguruneaz osatuta dago. Azalpen testuak, garapen matematikoak, kalkulu konputazionalak eta ikus-entzunezko baliabideak dituen Notebook-ekin jarduteko aipaturiko ingurune hori erabiltzen da, web-nabigatzailean irekitzen dena [11]. Notebook-ak eduki ezberdinak izan ditzaketen gelaxketan daude antolatuta eta modu sekuentzialean goitik behera exekutatzen dira (ikus 2.1. irudia). Gelaxka bat, exekuta daitekeen lerro anitzez osatutako testu sarrera da. Exekutatzean gertatutakoa gelaxka-motaren arabera izango da: kode gelaxkek bere barneko kodea exekutatu eta sortutako irteera erakutsiko dute, *markdown* gelaxkek idatzitako testua interpretatuko dute eta *raw* gelaxkek beraien edukia interpretatu gabe bertan idatzitakoa erakutsiko dute.

Programazio-lengoaiei dagokionez, 40 lengoaietatik gora erabil daitezke Notebook berean, horien artean egonik Python, Fortran, C++/C# eta R. Gainera, kodeak sortutako emaitzekin modu interaktibo batean lan egitea ahalbidetzen dute Notebook-ek. Markaketa-lengoaiak<sup>2</sup> ere onartzen ditu, horien artean HTML, LaTeX eta Markdown ezagunenak izanik.

Eskainitako aukera zabalaren ondorioz, Jupyter Notebook-ak zientzia munduko ohiko lanak burutzeko tresna estandarra bilakatu dira, enpresa eta unibertsitate askok datuen tratamendua, zenbakizko simulazioak eta datuen bisualizazioa burutzeko erabiltzen dituztelarik [12].

---

<sup>1</sup>Kode irekiko softwarean programaren iturburu-kodea edonorentzan eskuragarri ipintzen da, gainontzeko programatzaileek irakurri, zuzendu, aldatu, haien beharrei egokitu eta birbanatzeko aukera emanez. Kode irekiko softwarearen garapenak programatzaile askoren kolaborazioan oinarritzen dira [9].

<sup>2</sup>Markaketa-lengoaiei bidez dokumentuak, edukiaz gain, haren formatua eta egitura definituko duten markez osatzen dira. Marka horiek dokumentua prozesatu ostean desagertuko dira, edukia marken bidez definitutako formatuan erakutsiz.



Esaterako, LaTeX-ek adierazpen matematikoak sortzeko duen potentzia Markdown-en sintaxi sinplearekin konbinatzen du Jupyter-ek, 2.1. irudian ikusten denez. Lengoia ezberdinetan idatzitako bi gelaxka azaltzen dira bertan, exekutatu aurretik eta exekutatu ostean. Jupyter-en malgutasuna agerian uzten du horrek: ondoz-ondoko gelaxketan lengoia ezberdinetan idatzitako kodea eta horrek sortutako emaitzak eduki daitezke.

```

1 ## Hau izenburu bat da
2
3 Markdown erabilia oso erraza da
  textu egokiak sortzea. Zerrenda bat
  honako era honetan egin daiteke:
4 - Lehenengo elementua
5 - Bigarren elementua
6 - Hirugarren elementua
7
8 Lengoia ezberdinak konbinatzea
  ahalbidetzen du Jupyter-ek:

```

```

1 \begin{equation}
2 \left( p + \frac{n^2 a}{V^2} \right) \left( V - nb \right) = nRT
3 \end{equation}

```

**Hau izenburu bat da**

Markdown erabilia oso erraza da textu egokiak sortzea. Zerrenda bat honako era honetan egin daiteke:

- Lehenengo elementua
- Bigarren elementua
- Hirugarren elementua

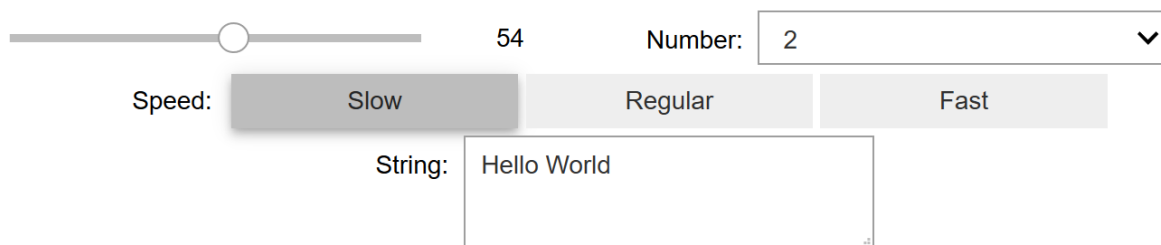
Lengoia ezberdinak konbinatzea ahalbidetzen du Jupyter-ek:

$$\left( p + \frac{n^2 a}{V^2} \right) (V - nb) = nRT$$

**2.1. irudia:** Adibidetzat erabilitako Jupyter Notebook-en bi gelaxka (exekutatu aurretik, ezkerrean, eta exekutatu ostean, eskuinean). Goiko gelaxkan Markdown lengoia erabiltzen den bitartean, behekoan LaTeX-en idatzitako ekuazio bat agertzen da.

Hala ere, Jupyter-ek eskaintutako ezaugarriak interesgarriena interaktibitatea da. Kodea exekuta daitekeenez, Notebook-etan programa interaktiboak garatuz eskola emateko zein ikasteko erabilgarriak izan daitezkeen aplikazioak sor daitezke, lan honetako 3. atalean azalduko den moduan.

Hainbat funtzio eta interfaze-grafiko sortu dira interakzio hori errazteko, ezer programatu gabe erabiltzaileak esangura eta oinarri fisikoa duten programekin lan egin dezan. Horretarako, funtzio ezberdinen sarrerak modu intuitiboan aldatzeko aukera eskaintzen duten IPython-en widget-ak erabili dira (ikus 2.2. irudia).



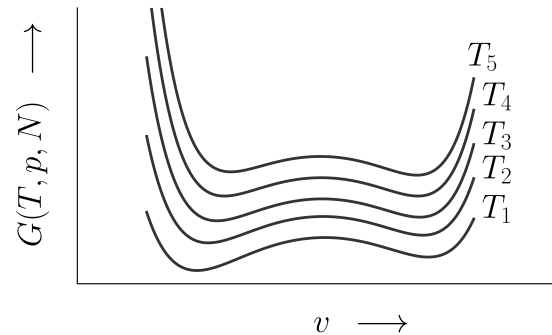
**2.2. irudia:** IPython widget batzuen adibideak. Goitik behera eta ezkerretik eskuinera: tarte batean zenbaki oso bat aukeratzeko *slider*-a, finkatutako aukeren artean bat hautatzeko *drop-down*-a, hiruetatik bakarra aukeratzeko botoiak eta testu-sarrera bat.

Programen sarrerak widget-en bidez inplementatzean erabiltzailearen eta sortutako programen arteko interakzioa asko errazten da, esperientzia erosoagoa bihurtuz. Widget-en

bidez sarrerako balioen eremuak defini daitezkeenez, errorerik sortuko ez duten balioak bakarrik eskaini daitezke eta, are gehiago, sarrera horiek sortuko dituzten emaitzak esangura fisiko interesgarriak izatea ere berma daiteke.

Aipaturiko emaitzei dagokionez, funtzioen irteerak testu moduan emateaz gain, grafikoki ematea ere bilatu da. Sistema termodinamikoaren ezaugarrietan sakontzeko aukera eskaintzen du planteamendu horrek, landutako kontzeptuen ikuspuntu teorikoaz gain esperimentalki laborategian behatuko liratekeen fenomenoak simula baitaitezke.

Sistema termodinamikoek aldagai askorekiko azaldu ohi duten menpekotasunak haiek grafikoki adieraztea zailtzen du: nahiz eta aldagai bakarreko funtzioak bi dimentsiotako euskarri batean erraz irudikatu, aldagai anitzeko funtzioak irudikatzea lan zaila bilaka daiteke. Aldagaiak soilik bi diren kasuetan, emaitza onak lor daitezke hiru dimentsiotako grafiken bidez. Aldagai gehiagorekiko ( $N$  aldagaiekiko, orokorrean) menpekotasuna azaltzen duten sistemen kasuan,  $N - 1$  aldagai parametrotzat finka daitezke. Horrela, aldagai bakarrarekiko irudika daiteke funtzioa, parametroen balio ezberdinetarako grafika errepikatuz. Metodo hori oso erabilia izan da liburu askotan, 2.3. irudian ikus daitezkeenez.



**2.3. irudia:** Gibbs-en potentzialak bolumenarekiko azaltzen duen aldaketaren irudi eskematikoa zenbait tenperaturatan ( $T_1 < T_2 < T_3 < T_4 < T_5$ ). Iturria: *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics* [13]

Kasu honetan,  $N - 1$  parametro horien balioak widget-en bidez aldatzeko aukera eskainiko da, aldagai horien aldaketak funtzioaren garapenean duten eragina hobeto erakusteko. Horrela lortutako adibideak liburuetan eskaini ohi direnak baino osoagoak dira, erabiltzaileari grafikarekin zuzenean elkarreragitea ahalbidetzen baitiote.

Jupyter-ek eskainitako programazio-lengoaia guztietatik, Python erabiliko da programa ezberdinak garatzeko, lengoaia sinplea, erraza eta ulerterraza izateaz gain, liburutegi potente asko baititu [14, 15]. Gainera, Fisikako Graduko lehenengo urtean erakusten den lengoaia da.

Lan hau garatzeko hainbat liburutegi erabili dira, horien artean egonik NumPy eta Pandas [16, 17]. Grafikak sortzeko, jarraian azalduko diren bi liburutegiak erabili dira:

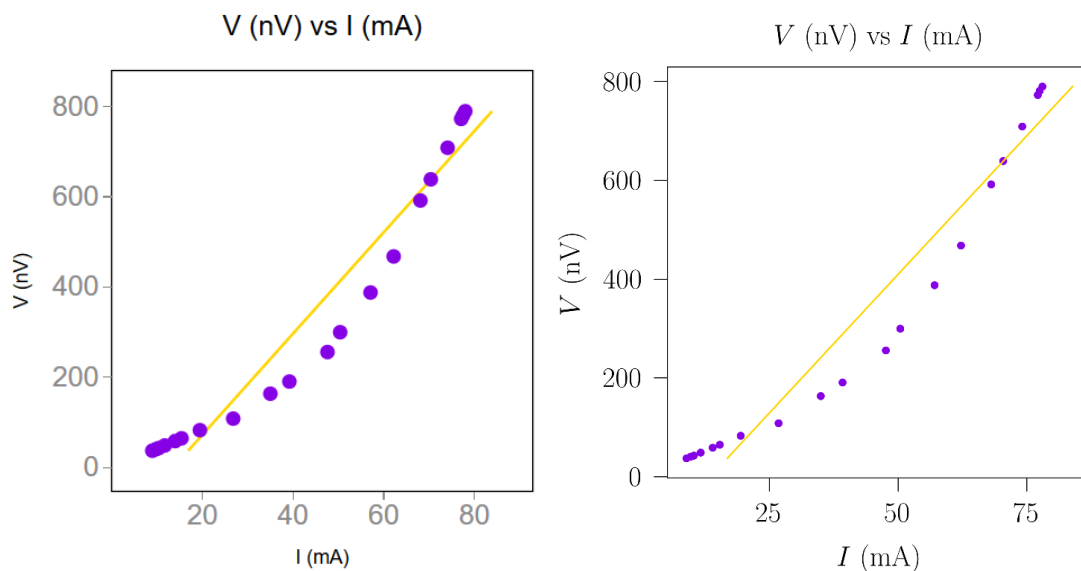
- **Bqplot**

Bqplot Jupyter Notebook-etan bi dimentsiotako grafikak sortzeko erabiltzen den lan-ingurune bat da [18]. Bqplot-en bidez sortutako grafiken eremu bakoitza (datuak adierazten dituzten markak, grafikaren izenburua eta ardatzen izenak, esaterako) widget interaktibo bat da. Bi ondorio nagusi ditu horrek: alde batetik, erabiltzailearen eta grafikaren arteko elkarrekintza asko errazten da, edozein eremu aldatzean grafikaren

egoera berehala eguneratzen baita. Bestetik, grafika lehen aipatutako widget-ekin integratzea ahalbidetzen du, kode-lerro gutxi batzuen bidez interfaze-grafiko konplexuak sortzeko aukera emanez. Bqplot-ek ohikoak diren datu-egiturak erakutsi eta horiekin modu interaktiboan lan egiteko aukera ematen du, liburutegiaren GitHub-eko biltegiko adibidetan ikus daitekeenez [19].

- **Matplotlib**

Matplotlib ere grafika estatiko, animatu eta interaktiboak sortzeko Python-eko liburutegi bat da [20]. Widget-ekin azaltzen duen integrazioa okerragoa izan arren, Matplotlib-en grafikak LaTeX-ekin integra daitezke. Hau da, Matplotlib bidez sortutako grafiketako hitz eta zenbaki guztiak LaTeX bidez konpila daitezke (ikus 2.4. irudia). Bi liburutegien bidez lortutako grafikak konparatzeko, hurrengo irudian datu berdinak erabiliz bqplot eta Matplotlib-en bidez sortutako irudiak agertzen dira.



**2.4. irudia:** Bqplot (ezkerrean) eta Matplotlib (eskuinean) liburutegiez baliatuta lortutako grafikak alderatzeko sortutako irudia. Datu berdinak erabili dira kasu bietan.

Lan honetan Notebook-ak irakaskuntza-materiala eta aplikazioak sortzeko oinarri bezala planteatzen dira. Izan ere, formatu horretan garatuta, LaTeX-en idatzitako adierazpen matematikoak, ikus-entzunezko baliabideak eta tresna interaktiboak fitxategi bakar batean bil daitezke, ikasketa-prozesu osoagoak sortuz.

Gainera, Notebook-ak editagarriak direnez, ikasle bakoitzak irakasleak eskaintakoak har eta molda ditzake. Ikaslearen ikasketa-prozesu autonomoaren adierazpidea da moldaketa hori: ikasleak informazioa jaso du, barneratu egin du eta kanpoko iturrietatik lortutako edota hark sortutako azalpen eta baliabideekin osatu du.

Tresnei dagokionez, sortutako materialek ikaslearen interakzioa bermatzen badute, errazagoa da ikasleek parte-hartu eta haiek erabiltzea. Gainera, bqplot eta Matplotlib-en alderdi onenak konbinatuz, adierazpen grafikoekin zuzenean lan egin daiteke eta uneren batean lortutako grafika gorde nahi bada, PDF edota PNG formatuetan exporta daiteke.

## 2.2.2 Git

Sortutako materialaren aldaketak kontrolatzeko Git erabiltzea proposatzen da proiektu honetan. Git fitxategien bertsioak kudeatzea ahalbidetzen duen doako eta kode irekiko softwarea da [21].

Bertsio-kontrola konfiguraketa edota produktu baten elementuen gainean egiten diren aldaketen kudeaketa da [22]. Bertsio bat garapenaren une bateko edota aldaketa baten ostean lortzen den produktuaren egoera da.

Bere argitarapenetik (2005. urtean) gaur egun arte, bertsio-kontrola burutzeko estandar bat bilakatu da Git: Google, Facebook, Microsoft, Android eta Linux-en garapenetan erabiltzen da, besteak beste [21]. Izan ere, Git-ek fitxategi askorekin lan egiteko aukera ematen du eta erabiltzeko erraza eta azkarra da.

Nahiz eta Interneten Git-en inguruko informazio ugari topa daitekeen, jarraian bere oinarrizko funtzionamenduaren inguruko azalpen labur bat emango da, bere potentziaren eta erabiltzeko erraztasunaren inguruko ideia bat emateko [22].

Ordenagailuan Git instalatu ostean, nahikoa da kontrolatu nahi diren fitxategien karpetan Git hasieratu eta fitxategiak Git-ek jarraitu behar dituen elementuen zerrendara gehitzea (komando bakar baten bidez egin daitekeena). Behin fitxategia gehituta, proiektuaren egoera berri batera iristean *commit* bat egin daiteke, zeinak egoera berria gordeko duen. *Commit* bat egitean, Git-ek egoera horri mezu bat gehitzeko eskatzen du, aldaketen historia edukitzea erraztuz. Nahikoa da fitxategi baten aldaketen erregistroa kontsultatzea jasandako aldaketa guztien berri izateko eta, horren bidez, fitxategia bertan jasotako aurreko edozein bertsiora itzul daiteke.

Gainera, Git-en oinarritutako bertsio-kontrola eta software-kolaboratiboaren garapena eskaintzen duten web-zerbitzuak ere badaude. Plataforma horiek Git bidez kontrolatutako fitxategiak hodeian gordetzea ahalbidetzeaz gain (“biltegi” izeneko karpetetan sailkatuta, ingelesezko *repository*-tik itzulia), kodea taldetan garatzeko tresnak eskaintzen dituzte: topatutako arazoen berri emateko txata (blog baten moduan antolatzen dena), biltegiaren argitarapenak sortzeko aukera<sup>3</sup> eta fitxategietara atzitzeko baimenak kudeatzeko sistema, besteak beste. Azken hori oso erabilgarria da materiala argitaratzerako orduan. Izan ere, biltegi bat publikoari irekia izatea aukera daiteke, edonork bertako fitxategiak ikusteko baimena eduki dezan.

Plataforma horiek erabiltzeko, nahikoa da fitxategiak garatu ahala *commit*-ak egiten joateaz gain garatzaileak sarean gordetako bere biltegiari *push*-ak egitea, une horretako fitxategien egoera hodeira igo eta haien historia ere eguneratuz. Horrela, beste erabiltzaileek *pull* bat egin ahalko dute biltegiaren azken bertsioaren kopia batekin lokalki lan egiteko.

Kontuan izan behar da hemen erakutsitako lan-fluxua ahalik eta gehiena sinplifikatu dela

---

<sup>3</sup>Biltegi baten argitarapen bat biltegiaren egoerari etiketa bat ipintzean datza, ostean erreferentziatua izan ahal izateko.

eta garatzen den proiektuaren arabera lan-fluxu konplexu eta osoagoak erabiltzea gomentatzen dela [23].

Azaldutako web-zerbitzu horien artean GitHub eta GitLab dira ezagunenak [24, 25]. Nahiz eta bi horietatik kode irekikoa den bakarra eta doako tresna gehienak eskaintzen dituen GitLab izan [26], proiektu honetarako GitHub erabiltzea erabaki da. Alde bateatik, softwarearen garapenean erabiltzen den plataforma estandarra da GitHub, 40 milioi erabiltzaile baino gehiago dituen [27]. Bestetik, kasu honetan fitxategiak jasotzeko ez da zerbitzari pribaturik behar eta, beraz, posible da GitHub erabiltzea. GitLab kode irekikoa izanik, garatzaileek kudeatutako zerbitzaritan argitara daiteke, oso aproposa izanik biltegiak guztiz isolatuta mantendu nahi dituzten enpresa eta lan-taldeentzat. Nahiz eta kasu honetan GitHub erabili, etorkizunean GitLab-era migratzeko egin beharreko prozedura berehalakoa izango litzateke [28]. Azkenik, onartu behar da zenbait plataformekin integratzerako orduan (Zenodo-rekin, adibidez) erraztasun handiagoak eskaintzen dituela GitHub-ek<sup>4</sup>.

GitHub erabiliko da, beraz, fitxategiak hartzaileei helarazteko eta fitxategi horietan egingako aldaketan historia gordetzeko. Gainera, sortutako material osagarria ere bertan aurki daiteke: instalazio-gidak, erabilera-adibideak eta proiektuaren inguruko informazioa bertan egongo dira eskuragarri.

### 2.2.3 Binder

Binder GitHub-en gordetako Jupyter Notebook-ak hodeian irekitzeko ingurune exekutagarri bat eskaintzen duen plataforma da [29]. Binder-en bidez biltegi irekietan gordetako Notebook-ak sarean exekuta daitezke, ezer instalatu gabe.

Hautatutako Notebook-ak Binder-en zerbitzaritan konfiguratutako ingurunetan exekutatzen direnez, Notebook-ak probatu eta partekatzeko plataforma oso aproposa da, nahiz eta erabiltzailearentzat eskuragarri dauden memoria eta prozesadore kopurua mugatua izan [30].

Binder-en fitxategi bat irekitzeko mybinder.org webgunean exekutatu nahi den biltegiaren esteka ipini behar da. Orduan, Binder-ek biltegiaren bertsio exekutagarri batera berbidaltzen du erabiltzailea. Gainera, Binder-ek bertsio exekutagarri horretara iristeko esteka ere sortuko du, Notebook-ak beste erabiltzaileekin partekatzea asko erraztuz, nahikoa izango baita sortutako esteka hori bidaltzea ingurune exekutagarrira sartu ahal izateko.

Ingurunea konfiguratzeko aski da instalatu nahiko diren Python-eko liburutegien zerrenda GitHub-eko biltegian gordetzea. GitHub-eko biltegiari *push* bat egitean, Binder-ek biltegiaren irudi bat sortuko du eta lehen aipatutako estekan eskuragarri ipiniko du. Beraz, behin konfigurazio-fitxategi horiek sortuta, GitHub-en gordetako Notebook-ak sarean exekutagarri jartzeak ez du inolako lanik eskatzen.

---

<sup>4</sup>Lan hau idazten ari den unean behintzat.

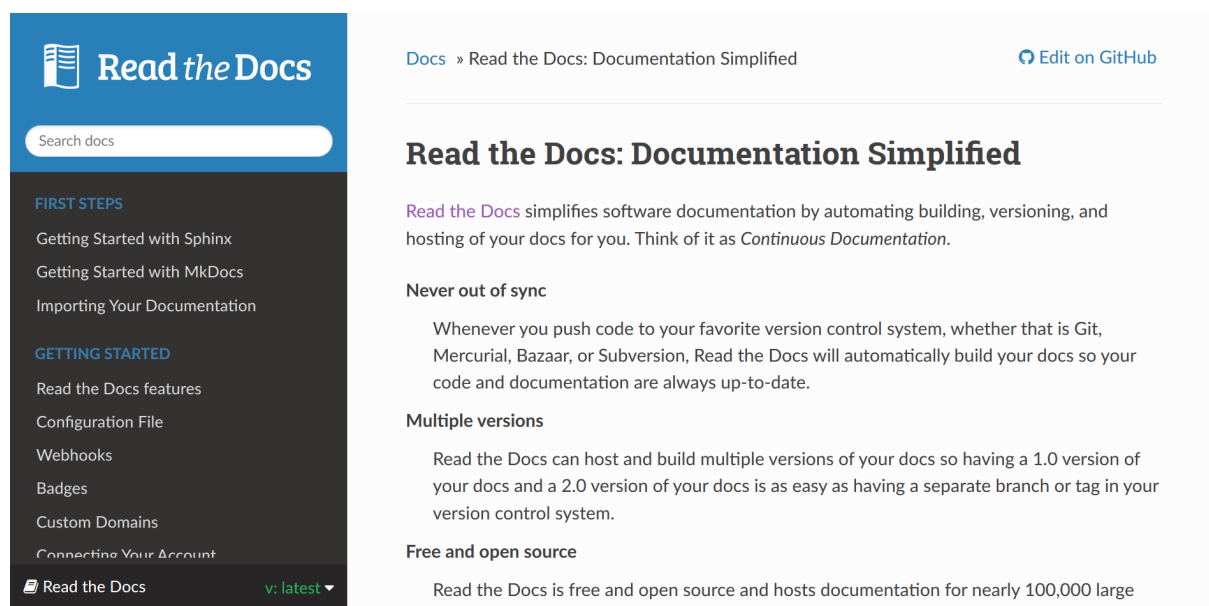
Kontuan izan behar da Binder-en egindako aldaketek ez dutela GitHub-en gordetako jatorrizko fitxategiengan inolako eraginik, erabiltzaile ezberdinek sortutako sesioak elkarren artean zein jatorrizko fitxategiekiko guztiz isolatuta baitaude.

## 2.2.4 Read the Docs

Read the Docs plataformak softwarearen dokumentazio-prozesua errazten du, dokumentazioaren sorkuntza automatikoa, bertsioen kudeaketa eta argitarapenaz arduratuz [31].

Egindako lana dokumentatuta egotea ezinbestekoa da proiektuaren mantenua, errepikakortasuna eta erabilgarritasuna bermatzeko. Read the Docs da dokumentazioa jasotzeko ohiko plataforma, 100000 proiekturen dokumentazioak jasotzen dituena [32]; horien artean Jupyter eta bqplot.

Gainera, Jupyter Notebook-ekin eta GitHub-ekin modu egokian integratzen da: garatzaileak adierazitako GitHub-en jasotako Notebook-ak hartuko ditu dokumentazioa sortzeko, bertan jasotako kodeaz gain testua eta ikus-entzunezko baliabideak ere erakutsiz. Dokumentazioa automatikoki eguneratuko da GitHub-en jasotako fitxategiak eguneratzean. Hurrengo irudian Read the Docs erabiliz lortutako dokumentazioaren adibide bat ikus daiteke:



The screenshot shows the Read the Docs website interface. On the left is a dark navigation sidebar with the 'Read the Docs' logo and a search bar. The sidebar lists sections like 'FIRST STEPS' (Getting Started with Sphinx, Getting Started with MkDocs, Importing Your Documentation) and 'GETTING STARTED' (Read the Docs features, Configuration File, Webhooks, Badges, Custom Domains, Connecting Your Account). The main content area has a breadcrumb 'Docs » Read the Docs: Documentation Simplified' and an 'Edit on GitHub' link. The main heading is 'Read the Docs: Documentation Simplified'. Below it, a paragraph explains that Read the Docs simplifies software documentation by automating building, versioning, and hosting. Three key features are highlighted: 'Never out of sync' (documentation is always up-to-date), 'Multiple versions' (hosting multiple versions is as easy as having separate branches), and 'Free and open source' (hosts documentation for nearly 100,000 large projects).

## 2.5. irudia: Read the Docs-en jasotako dokumentazio baten adibidea.

Dokumentazioaren parte diren Notebook-etan zehar nabigatzeko menuak automatikoki sortzen ditu Read the Docs-ek, 2.5. irudian ikusten denez.

Laburbilduz, Notebook-etan oinarritutako materiala jasotzeko plataforma oso egokia izan daiteke. Proiektu honetan sortutako programen dokumentazioa argitaratzeaz gain, landuko diren kontzeptuen inguruko azalpenak ere bertan jasoko dira.



Hiru partaide mota bereizi dira: garatzaile nagusiak (programen eta materialaren garapenaren arduradun nagusiak), beste garatzaileak (arazoak konpontzen, aukera berriak inplementatzen edota materiala eguneratzen laguntzen dutenak) eta erabiltzaileak (sortutako materialaren hartzaileak).

Materiala sortzearen prozesua garatzaile nagusiaren ordenagailuan hasiko da, zeinetan Git erabiliko duen sortutako Jupyter Notebook-en historia jasotzeko. Fitxategi horiek partekatu eta argitaratzeko GitHub erabiliko du. Horrela, gainontzeko garatzaileek kodea edota materiala bertatik har dezakete, haien ordenagailuetan moldatu eta berriro, nahiz izanez gero, GitHub-eko biltegira igo.

GitHub-eko biltegira programak igotzeaz gain, haien dokumentazioa eta azalpen osagarriak igo daitezke (gai baten inguruko azalpenak, esaterako) eta hori zuzenean Read the Docs-en argitaratuko da. Programen dokumentazioa beste garatzaileek aldaketak egin ahal izateko ezinbestekoa izango da.

Erabiltzaileek, Read the Docs-en jasotako dokumentazio hori ikus dezakete (beti eguneratuta egongo dena), GitHub-en argitaratutako materiala erabil dezakete (sarean Binder erabilia edota ordenagailuetara deskargatuta) eta, materialean oinarritutako lanik eginez gero, Zenodo-n aurki daitekeen DOI-a erabil dezakete proiektu osoari erreferentzia egiteko.



## 3. kapitulua

# Garapena: MinervaLab proiektua

Orain arte azaldutako tresnen eta lan egiteko moduen adibide gisa MinervaLab proiektua sortu da. Proiektu horretan, Termodinamikako gai bat hautatu da eta horren inguruko azalpenak Jupyter Notebook-en bidez eman ahal izateko materiala sortu da: Notebook-etan oinarritutako apunte eta programak, haien dokumentazioa eta zita erreferentziagarria.

Kasu honetan, fase-trantsizioen inguruko apunteak prestatu dira. Fisikako hainbat esparrutan agertzen direnez, ikasleek barneratu behar duten funtsezko kontzeptuetako bat delako. Sarrera teoriko baten ostean, van der Waals-en egoera-ekuazioa jarraitzen duten jariakinen kasua erabiliko da adibide partikular gisa, teoria orokorrean landutako kontzeptuetan sakonduz.

Notebook-etan oinarritutako 13 programa interaktibo garatu dira ohiko azalpenei laguntzeko. Aplikazioen aipamena errazteko bakoitzari kode bat esleitu zaio, 3.1. taulan ikus daitekeenez. Horrela, sortutako apunteetan azalpen teorikoak garatu ahala, lantzen den kontzeptuaren inguruko programari erreferentzia egingo zaio, 3.1.2 atalean azalduko denez. Ohartu aipaturiko taulan zenbait aplikazioen izenak letra lodiz idatzita agertzen direla: horiek dira aipaturiko ataleko azalpenak emateko erabili diren programak. Lan honetan erabilitakoak baino programa gehiago garatu dira, proiektu honetan oinarrituta eman daitezkeen azalpenak eta jorra daitezkeen planteamenduak anitzak izanik. Hurrengo ataletan emandako azalpen teorikoak, sortutako proiektuaren aplikazio posible bat baino ez dira, beraz.

Bi erronka planteatu dira sortutako programen baliogarritasuna probatzeko: hautatutako gaiaren inguruko apunteak sortzeko aproposak izatea eta eskola presentzial zein birtualak emateko erabilgarriak izatea. Lehenengo helburua txosten honetako 3.1.2. atalean betetzen da, bertan azaltzen diren irudi guztiak proiektu honetan garatutako aplikazioen bidez sortu baitira, oso-osorik. Gainera, hurrengo bi ataletan emango diren azalpenak GitHub eta Read the Docs plataformetan egongo dira eskuragarri, hautatutako tresnak finkatutako helburuak betetzeko aproposak eta haien artean erraz integragarriak direla egiaztatuz. Bigarrenari dagokionez, ikasle-talde batek zenbait programetan oinarritutako klase-presentzial baten ostean egindako asegarritasun-inkestaren emaitzak 3.2. atalean jasotzen dira.

Kodea	Landutako kontzeptua	Fitxategia
<b>111-000</b>	Jariakin baten $p(v, T)$ lerro isotermoen bi dimentsioko azterketa (aldagai laburtutan).	p_v_2D.ipynb
<b>112-000</b>	Fase-trantsizioen ondoriozko bolumen molarraren aldakuntza.	phase_transition_volume.ipynb
<b>113-000</b>	Zenbait elementu eta konposatuen puntu kritikoen kokapena.	critical_points.ipynb
114-000	Van der Waals-en parametroek lerro isotermoen itxuran duten eragina eta horren esangura fisikoa.	effect_of_a_and_b.ipynb
115-000	Zenbait elementu eta konposatuen lerro isotermoen itxura.	compare_elements.ipynb
116-000	Jariakin baten $p(v, T)$ lerro isotermoen hiru dimentsioko azterketa (aldagai laburtutan).	p_v_T_3D.ipynb
<b>117-000</b>	Lerro isotermoetan oinarritutako potentzial kimikoaren eraikuntza.	chemical_potential.ipynb
<b>118-000</b>	Van der Waals-en egoera-ekuazio mekanikoaren analisisa.	mathematical_analysis.ipynb
119-000	Van der Waals-en parametroek egoera-ekuazio mekanikoan duten eragina.	parameters_analysis.ipynb
11A-000	Lerro isotermoetan oinarritutako egonkortasunaren azterketa.	stability.ipynb
11B-000	Jariakin baten $p(T)$ diagrama eta Gibbs-en potentzialaren itxura.	p_T_2D.ipynb
11C-000	Van der Waals-en parametroek lerro isotermoen itxuran duten eragina eta horren esangura fisikoa (aldagai laburtutan).	effect_of_a_and_b_reduced.ipynb
<b>11D-000</b>	Fase-trantsizioen ondoriozko entropia molarraren aldakuntza.	entropy.ipynb

**3.1. taula:** Garatutako aplikazio guztien kodea, deskribapena eta fitxategiaren izena. Letra lodiz markatutako programak 3.1.2 ataleko azalpenak emateko erabili dira.

Notebook guztiak proiektuaren GitHub-eko biltegian topa daitezke (jongablop/MinervaLab) GPL-3.0 lizentziapean. Horrela, edonork dohain erabil eta molda ditzake, baina ezin du MinervaLab-en oinarritutako produktu komertzialik saldu eta sortutako softwarea lizentzia berdinarekin zabaltzera derrigortuta dago. Erabiliz gero, Zenodo-n topa daitezkeen zitazioa erabil dezake lanari erreferentzia egiteko [35]. Azkenik, Notebook guztien dokumentazioa eta adibidetzat prestatutako azalpenak Read the Docs-en topa daitezke: <https://minervalab.readthedocs.io>.

## 3.1 Sortutako materiala

### 3.1.1 Fase-trantsizioak

Fase-trantsizio bat sistema batek bere ezaugarrietan jasaten duen aldaketa da, sistemaren potentzial termodinamikoaren deribaturen batek ez-jarraitasun bat azaltzen duenean gertatzen dena [36].

Potentzial termodinamikoak sistemaren egoera-funtzioak konbinatzean lortzen diren magnitude eskalarrak dira, energiaren dimentsioak dituztenak [37]. Egoera-funtzio horien baliok sistemak konfigurazio-espazioan duen kokapenaren menpekoak baino ez dira. Ondorioz, konfigurazio-espazioko puntu batetik beste batera mugitzean, egoera-funtzioak jasandako aldaketa hasierako eta amaierako puntuen arabera da eta ez batetik bestera joateko jarraitutako bidearena.

Aipaturiko egoera-funtzioen artean  $U$  sistemaren barne-energia dago. Barne-energia  $p$ ,  $V$ ,  $T$  eta  $S$  egoera-funtzioekin konbinatzean lortzen dira potentzial termodinamikoak. Konbinazio posible guztietatik hiru bereziki erabilgarriak dira eta izen bereziak jasotzen dituzte:  $H = U + pV$  (entalpia),  $F = U - TS$  (Helmholtz-en energia) eta  $G = U + pV - TS$  (Gibbs-en energia).

Sistema baten egonkortasun-baldintzak potentzial termodinamikoaren menpe idatz daitezke: sistema bat egonkorra izan dadin potentzial horiek beraien aldagai intentsiboekiko ganbilak izan behar dira eta estentsiboekiko, aldiz, ahurrak (ikus 3.1, 3.2 eta 3.3. ekuaizioak) [38].

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)_{V,N} \leq 0 \quad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial V^2}\right)_{T,N} \geq 0 \quad (3.1)$$

$$\left(\frac{\partial^2 H}{\partial S^2}\right)_{P,N} \geq 0 \quad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial V^2}\right)_{S,N} \leq 0 \quad (3.2)$$

$$\left(\frac{\partial^2 G}{\partial T^2}\right)_{P,N} \leq 0 \quad \left(\frac{\partial^2 G}{\partial P^2}\right)_{T,N} \leq 0 \quad (3.3)$$

Orokortasunik galdu gabe Gibbs-en energiaren (edota potentzial kimikoaren<sup>1</sup>) kasua bakarrik azter daiteke. Sarritan potentzial horrekin lan egiten da bere aldagai naturalak ( $p$  eta  $T$ ) laborategian erraz manipulagarriak direlako. Jarraian egingo diren hausnarketa eta azalpenak beste potentzial bat oinarritzat hartuta emango liratekeen analogoak dira.

Paul Ehrenfest-ek proposatutako sailkapenaren arabera [36], fase-trantsizio baten ordena ez-jarraitasuna agertzen duen  $G$ -ren (edota  $\mu$ -ren) ordena txikieneko deribatuaren ordena da. Gaur egun, aldiz, lehen ordenako trantsizioak eta trantsizio “jarraituak” —lehen ordenatik goragoko trantsizioak— ezberdintzen dira. Izan ere, lehen eta bigarren ordenako

---

<sup>1</sup>Froga daiteke  $\mu = G/N$  dela [36].

trantsizioen arteko ezberdintasunak gainontzeko trantsizioen artekoenak baino esanguratsuagoak dira.

Lehen ordenako fase-trantsizio bat lehen aipatutako egonkortasun-baldintzen hutsegitea bezala uler daiteke. Egonkortasun-baldintzak betetzen ez direnean, sistema bi fase ezberdin eta bereizgarrietan (edo gehiagotan) banatzen da. Bi fase horiek ezberdinak eta bereizgarriak izateak konfigurazio-espazioko bi puntu ezberdin eta urrunetan kokatuta daudela esan nahi du eta bien arteko trantsizioa berehala gertatzen dela. Kasu honetan, “bat-batekotasun” horrek ez dauka prozesuak denboran iraun dezakeenarekin zerikusirik: egonkorak diren tarteko egoera guztietatik kuasiestatikoki garatu beharrean, hasierako egoeratik zuzenean amaierakora igarotzen dela adierazi nahi du “berekala” gertatzeak.

Gibbs-en energiaren ikuspuntutik, lehen ordenako trantsizioen bidez lotutako  $N$  fasetan aurki daitekeen sistema baten Gibbs-en energiak  $N$  minimo izango ditu bere aldagai es-tentsiboekiko [13]. Azpimarragarria da minimo bakoitzak fase bati dagokiola eta minimo ugari egoteak ezinbestean egonkortasun baldintzen haustura suposatzen duela, bi minimoen artean aurkako kurbadura duen eremua baitago derrigor. Sistema beti agertuko da minimorik sakonenean eta minimoen arteko sakonera erlatiboak aldatuz joango dira konfigurazio-espaziotik mugitzean. Ondo-ondoko bi minimoen arteko sakonera berdina denean, hau da, bi faseen Gibbs-en energiaren balioa berdina denean, sistema fase batetik bestera alda daiteke lehen ordenako trantsizio baten bidez.

Ehrenfest-en sailkapenean oinarrituta, trantsizio horretan kontserbatuko ez diren aldagaiak identifika daitezke: Gibbs-en energiaren lehenengo deribatuak —aldagai naturalekiko deribatuak, noski— ez-jarraituak izango dira lehen ordenako fase-trantsizio batean. Partikula kopurua konstante mantentzen dela onartuz, ondorengo garapenak egin daitezke:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_{T,N} = \left(\frac{\partial(\mu N)}{\partial p}\right)_{T,N} = N \left(\frac{\partial \mu}{\partial p}\right)_{T,N} \quad (3.4)$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{p,N} = \left(\frac{\partial(\mu N)}{\partial T}\right)_{p,N} = N \left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{p,N} \quad (3.5)$$

Potenzial kimikoaren adierazpen diferentziala erabiliz:

$$d\mu = v dp - s dT \quad (3.6)$$

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial p}\right)_{T,N} = v \quad \left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{p,N} = -s \quad (3.7)$$

Bolumen eta entropia molarrak (eta potentzial kimikoaren ordena altuagoko deribatuak) izango dira, beraz, lehen ordenako trantsizio batean bi faseen artean jarraituak izango ez diren ezaugarriak. Aipatu behar da hemengo garapena sistema hidrostatikoko baten kasurako egin dela, baina prozedura hori guztiz baliokidea izango litzatekeela beste izaera bateko sistema baten kasuan (sistema magnetiko batean, esaterako [39]).

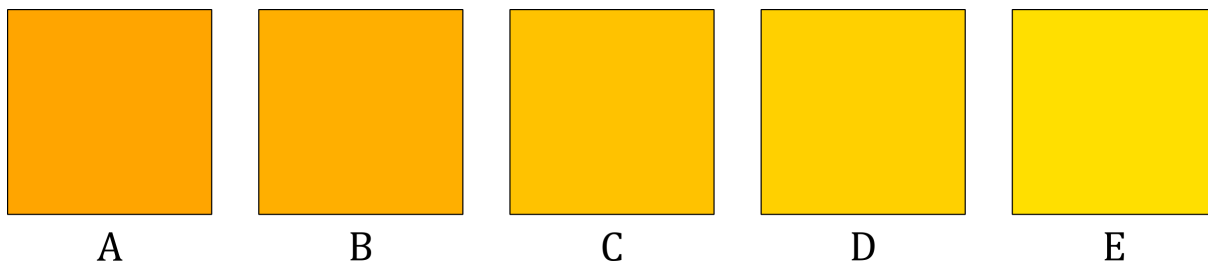
Sistema hidrostatiakoaren egonkortasun-baldintzak sistemaren egoera-aldagaien menpe idatz daitezke, 3.3 eta 3.7. adierazpenak erabilita:

$$\left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial p^2}\right)_{T,N} = \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_{T,N} \leq 0 \quad (3.8)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial T^2}\right)_{p,N} = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_{p,N} \leq 0 \quad (3.9)$$

Bigarren ordenako fase-trantsizioei dagokionez, ez dira egonkortasun-baldintzak hausten eta, ondorioz, sistema fase batetik bestera egonkorak diren egoeretatik pasatzen da, kua-siestatikoki. Bigarren ordenako (eta ordena altuagoko) fase-trantsizio baten bidez lotu-tako bi egoera konfigurazio-espazioan bata bestearen alboan kokatuta daude, bien arteko ezberdintasunak nahi bezain txikiak izanik.

Nahiz eta aurrerago kontzeptu horietan sakondu, aipagarria da kasu batzuetan posible dela sistema hasierako egoera batetik amaierakora lehen zein bigarren ordenako fase-trantsizioen bidez eramatea. Lehenengo kasuan, sistema ezegonkortsu egin beharko da eta, ondorioz, hasierako eta amaierako faseak aldi berean existituko dira fase-trantsizioa gertatu bitartean. Bigarren aldiz, sistema guztia modu jarraituan aldatuz joango da, amaierako egoerara iritsi arte elkarren artean ia bereiztezinak diren egoeretatik pasatuz.



**3.1. irudia:** Bigarren ordenako fase-trantsizioak azaltzeko sortutako irudia. Karratuek kolorez bereizitako sistemaren egoera bana adierazten dute.

Bigarren ordenako fase-trantsizioen izaera argitzeko 3.1. irudiko adibidea prestatu da. Kutxa bakoitzak sistema beraren egoera bana adierazten du, fase-aldagai bakarrez ezau-garrtua: kolorea. Muturretako karratuek (A eta E karratuek) hasierako eta amaierako egoerak adierazten dituzte. A eta B egoeren artean bigarren ordenako trantsizio bat gertatzen da, nahiz eta bi sistemak ia berdinak izan. Antzera gertatzen da B-C, C-D eta D-E trantsizioekin: konfigurazio-espazioan ondoan egonik, ezaugarri gehienak dituzte komunean. Hala ere, A eta E egoeren arteko ezberdintasunak nabarmenak dira, sistemaren egoera oso gutxi (nahi bezain gutxi) aldatzen duten bigarren ordenako fase-trantsizioak etengabe jasatean, sistema konfigurazio-espazioan aldentuta egon daitezkeen bi punturen artean mugi baitaiteke. Aipatzekoa da ere adibide horretan A egoetatik E egoerarako al-daketa zuzenean egiten duen fase-trantsizioa lehen ordenakoa izango litzatekeela, sistema elkarren artean bereizgarriak diren egoera batetik bestera joango bailitzake.

Lehen egindakoaren antzera, bigarren ordenako trantsizioetan ez-jarraitasunak agertuko dituzten aldagaiak ezaugarriak daitezke:

$$\left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial p^2}\right)_{T,N} = \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_{T,N} = -v \kappa_T \quad (3.10)$$

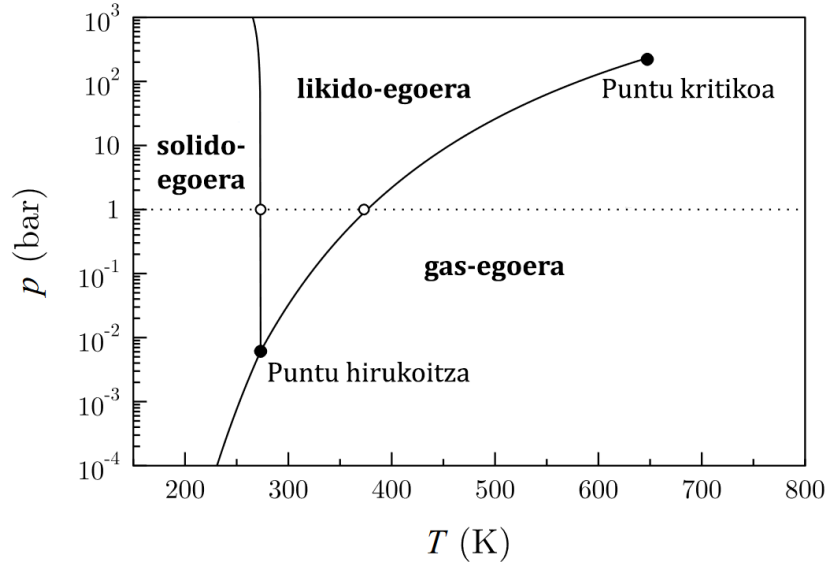
$$\left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial T^2}\right)_{p,N} = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_{p,N} = c_p/T \quad (3.11)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial p \partial T}\right)_N = \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_{p,N} = v \alpha \quad (3.12)$$

Bigarren ordenako fase-trantsizio bat denez, bolumen molarra jarraitua izango da eta  $\kappa_T$  (konprimagarritasun isoterma),  $c_p$  (presio konstantepeko bero kapazitatea) eta  $\alpha$  (zabal-kuntza termikoaren koefizientea) ez-jarraituak izango dira [36].

Zenbait kasutan, badago lehen eta bigarren ordenako trantsizioak erlazionatzen dituen konfigurazio-espazioko puntu bat: *puntu kritikoa*. Bertan, Gibbs-en energiak minimo ugari izatetik bakar bat izatera pasatzen da: lehen eta bigarren ordenako trantsizioen arteko muga adierazten du puntu horrek.

Une honetan interesgarria izan daiteke sistema baten fase-diagramari erreparatzea. Adibidez, 3.2. irudian ageri dena sistema hidrostatikoki bati dagokio. Fase bakoitza egonkorra den guneak lerro batzuen bidez bereizita azaltzen dira bertan. Lerro horietako bakoitza *koexistentzia kurba* izenez ezagutzen da: lerroan zehar bi faseen potentzial kimikoak berdinak direnez, sistemaren bi faseak koexistitu egiten dira. Kurba horiek zeharkatzean, fase batetik bestera eramango duen lehen ordenako fase-trantsizioa jasaten du sistemak.



**3.2. irudia:** Solido, likido eta gas-faseak erakusten dituen uraren fase-diagrama. Lerro horizontalak presio atmosferikoa adierazten du eta puntu txurien bidez uraren irakite- eta izozte-puntuak adierazi dira. Iturria: *Concepts in Thermal Physics* [36].

Diagraman bi puntu berezi azpimarratu behar dira: lehena, *puntu hirukoitza*, zeinetan koexistentzia kurba guztiak elkartzen diren eta, ondorioz, hiru faseak potentzial kimiko berdina agertzen duten. Bigarrena, aldiz, lehen aipaturako puntu kritikoa da, likido-gas koexistentzia kurbaren amaiera markatzen duena. Sistema bat kurba horretan zehar puntu hirukoitzetik puntu kritikora eramatean, fase bien entropia eta bolumen molarrak berdinduz joango dira. Puntu kritikora iristean, ezaugarri horiek guztiz identikoak izango dira bi faseetan eta, ondorioz, sistema osoa fase bakarrean agertuko da.

Antzeko zerbait gertatzen da Gibbs-en energiaren kasuan: puntu hirukoitzean sakonera berdineko hiru minimo ikusten diren bitartean, sistema likido-gas koexistentzia kurbari jarraituz puntu kritikorantz mugitzen den heinean bi minimoen artean topa daitekeen maximoaren altuera txikituz joango da. Maximo hori guztiz desagertuko da sistema puntu kritikora iristean. Koexistentzia kurba puntu hortatik harago jarraituz gero, bertan gertatuko liratekeen fase-trantsizio guztiak bigarren ordenakoak izango lirateke.

Likido-gas koexistentzia kurbaren malda Clausius-Clapeyron-en ekuazioak ematen du (ikus 3.13. ekuazioa), kurban zehar bi faseen potentzial kimikoak berdinak izatetik ondorioztatzen dena [36].

$$\frac{dp}{dT} = \frac{s_2 - s_1}{v_2 - v_1} \quad (3.13)$$

Amaitzeko, aipagarria da solido-likido koexistentzia kurbak ez duela puntu kritikorik azaltzen eta, ondorioz, bi fase horien arteko trantsizioa lehen ordenakoa izango dela beti.

### 3.1.2 Van der Waals-en egoera-ekuazioa

Nahiz eta fase-trantsizioen atzean dagoen oinarri fisikoa potentzial kimikoaren topologia izan, sarritan sistema termodinakoan azterketa lerro isotermoen forman oinarritzen da. Jariakin baten kasuan, oso interesgarria da van der Waals-en egoera-ekuazio mekanikoa (ikus 3.14. ekuazioa) betetzen duen jariakin errearen kasua aztergaitzat hartzea.

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT \quad (3.14)$$

non  $a$  eta  $b$  van der Waals-en parametroak,  $v$  jariakinaren bolumen molarra,  $p$  presioa,  $T$  tenperatura eta  $R$  gas idealen konstantea diren.

Gas idealen egoera-ekuazio mekanikoaren moldaketa bat bezala uler daiteke J.D. van der Waals herbeheretar fisikariak bere tesian proposatutako ekuazioa [4].

$$pv = RT \quad (3.15)$$

Gas idealen egoera-ekuazioa (ikus 3.15. ekuazioa) gas partikulak puntualak eta elkarren artean elkarrekintzarik gabekoak izatetik ondorioztatzen da. Van der Waals-en egoera ekuazioak, aldiz, bi faktore horiek kontuan hartzen ditu gas idealaren ekuazioari bi atal gehituz: partikulen arteko elkarrekintza integratzen du  $a$  parametroarekiko proportzionala denak eta  $b$  parametroak, aldiz, partikulek espazioan betetzen duten bolumena adierazten du [40]. Konposatu bakoitzerako bi parametro horien balioa esperimenterki lor daiteke.

Van der Waals-en arabera, jariakina osatzen duten partikulen bolumena zein haien arteko elkarrekintza berdina da sistemaren likido eta gas faseetan eta bi faseetako portaera bere egoera-ekuazioaren bidez deskriba daiteke, ondorioz. Are gehiago, ekuazioa bi faseetan baliagarria denez, bien arteko trantsizioak deskribatzeko ere baliagarria izango da.

Aipatu beharra dago egoera-ekuazio horrek ez duela jariakin errearen portaera modu kuantitatibo batean azaltzen, baina bai erabilgarria dela azalpen kualitatibo edota erdi-kuantitatiboak emateko.

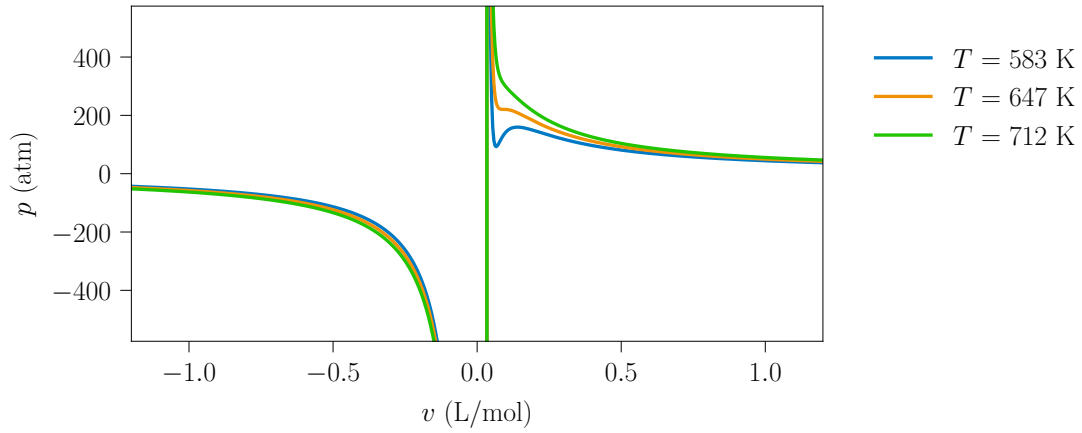
Funtzioaren analisi-matematikoa lerro isotermoetan oinarritutako azterketaren abiapuntua izan daiteke, proposatutako funtzioak ez baitauka esangura fisikorik bere izate-eremu guztian. Lerro isotermoan adierazpena 3.14. ekuaziotik ondoriozta daiteke.

$$p(v, T) = \frac{RT}{v - b} - \frac{a}{v^2} \quad (3.16)$$

Begi-bistakoa denez, lerro isotermoan funtzioak polo bana du  $v = 0$  eta  $v = b$  puntuetan, 3.16. adierazpenak erakusten duen moduan. Edozein elementurentzat  $T$  tenperaturako lerro isotermoa  $v > 0$  eremuan irudikatuz (ikus 3.3. irudia) aipagarria da  $v \in (0, b)$  tartean  $(\partial p / \partial v)_T > 0$  dela. Sistema ezegonkorra da tarte horretan, 3.8. adierazpeneko baldintzen arabera. Zonalde ezegonkor hori bi poloen artean mugatuta dagoenez, ez da posible sistema fisikoa eremu horretan egotea. Ondorioz, van der Waals-en egoera

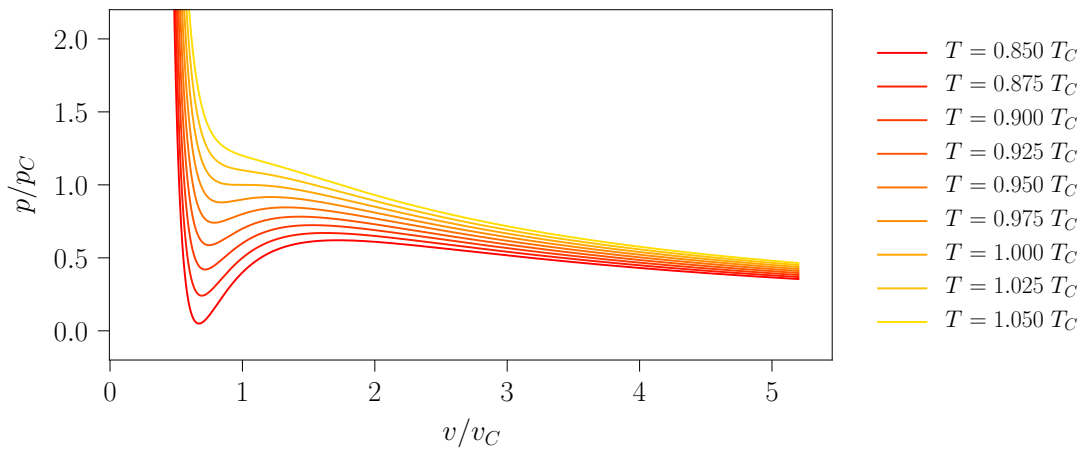


ekuazioak esangura fisikoa duen eremua  $v \in (b, \infty)$  da eta hori izango da hemendik aurrera aztertuko dena.



**3.3. irudia:** Uraren kasuan van der Waals-en egoera-ekuaziotik lortutako lerro isotermino itxura. Irudia 118-000 programarekin sortu da.

Zenbait lerro isotermino eremu horren barruan irudikatzean, nabarmena da bi zonalde ezberdintzen direla (ikus 3.4. irudia). Tenperatura baxuetan agertzen den zonaldean lehen aipatutako egonkortasun-baldintzak (ikus 3.8. ekuazioa) huts egiten duen eremuak identifika daitezke eta, beraz, tenperatura horietan sistemak lehen ordenako fase-trantsizio bat jasaten duela ondoriozta daiteke. Tenperatura altuetan aldiz, sistema egonkorra da eremu guztian.



**3.4. irudia:** Van der Waals-en lerro isoterminoak zenbait tenperaturatan. Lerroak aldagai adimentsionaletan adierazi dira, puntu kritikoarekiko hain zuzen ere. Tenperatura baxuei dagozkien lerroak kolore gorritz adierazi dira, kolore horiak tenperatura altuegokoei esleituz. Irudia 111-000 programarekin sortu da.

### 3.1.2.1 Puntu kritikoa

Van der Waals-en egoera-ekuazioak lehen ordenako fase-trantsizioak aurreikusten dituzenez, onargarria da puntu kritikoaren existentzia ere aurreikusi dezakeela pentsatzea. Kasu

honetan, nahikoa da hurrengo baldintzak aplikatzea puntu kritikoa kalkulatzeko [40]:

$$\left. \begin{array}{l} \left( \frac{\partial^2 \mu}{\partial p^2} \right)_T = 0 \\ v \equiv \left( \frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_T \end{array} \right\} \rightarrow \left( \frac{\partial^2 \mu}{\partial p^2} \right)_T \equiv \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T = 0 \quad (3.17)$$

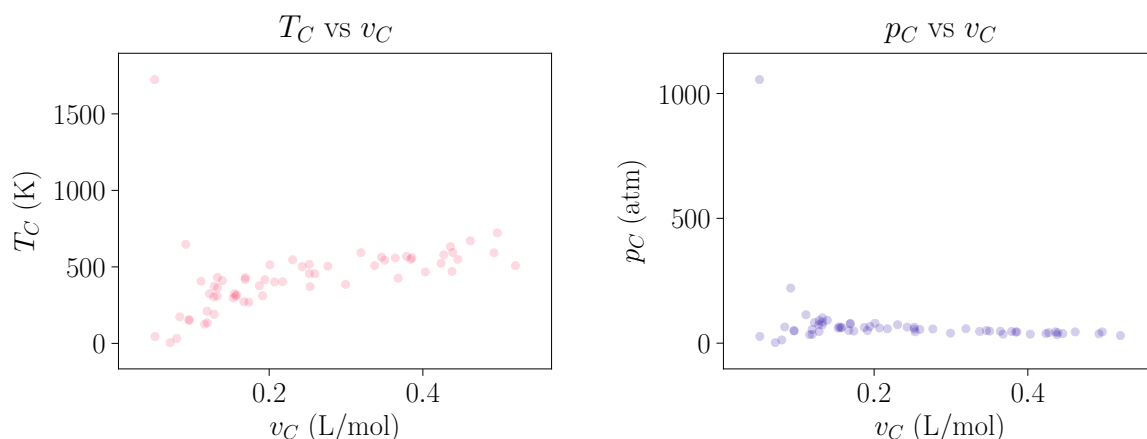
$$\left( \frac{\partial^3 \mu}{\partial p^3} \right)_T = 0 \rightarrow \left( \frac{\partial^3 \mu}{\partial p^3} \right)_T \equiv \left( \frac{\partial^2 v}{\partial p^2} \right)_T = 0 \quad (3.18)$$

Puntu kritikoen adierazpena 3.17. eta 3.18. adierazpenetako baldintzak 3.16. ekuazioko lerro isotermoari aplikatzean lortzen da:

$$p_C = \frac{a}{27b^2} \quad v_C = 3b \quad T_C = \frac{8a}{27bR} \quad (3.19)$$

Temperatura kritikoko lerro isotermoa *lerro isotermo kritikoa* izango da eta horrek bananduko ditu 3.4. irudian ageri diren bi zonaldeak [40].

Van der Waals-en egoera-ekuazioko  $a$  eta  $b$  parametroak deskribatutako jariakinaren partikulen bolumenarekin eta haien arteko elkarrekintzarekin erlazionatuta daudenez, jariakin bakoitzarentzat bakarrak eta bereizgarriak dira. Puntu kritikoen kokapena bi parametro horien menpekoa baino ez denez, jariakin bakoitzaren puntu kritikoa konfigurazio-espazioko puntu ezberdin batean egongo da kokatuta. Hori bistartzeko 113-000 programa garatu da: ohiko elementu eta konposatuen parametroen balioak jasotzeaz gain, haien puntu kritikoa grafika ezberdinetan erakusten ditu (ikus 3.5. irudiko grafikak).



**3.5. irudia:** Elementu eta konposatu batzuen puntu kritikoa. Parametroen balioak *CRC Handbook of Chemistry and Physics* liburutik atera dira [41]. Irudiak 113-000 programarekin sortu dira.

Puntu kritikoen kokapena aztertutako jariakinaren menpekoa izateak, temperatura berdinerako elementu bakoitzaren lerro isotermoek forma ezberdina azaltzea eragiten du (hori

113-000 programan ere beha daiteke). Hala ere, behin puntu kritikoaren adierazpena eza-gututa, posible da egoera-ekuazioa puntu kritikoaren menpe adieraztea:

$$\left(p_R + \frac{3}{v_R^2}\right)(3v_R - 1) = 8T_R \quad \text{non} \quad p_R = \frac{p}{p_C} \quad v_R = \frac{v}{v_C} \quad T_R = \frac{T}{T_C} \quad (3.20)$$

Ekuazio horri *egoera-ekuazio laburtua* deritzo eta jariakin guztietarako komuna da, ez baitu  $a$  eta  $b$  parametroekiko menpekotasun espliziturik [13]. Forma laburtua oso erabilgarria da adierazpen-grafikoak eta garapenak egiterako orduan, orokortasunik galdu gabe manipulatu beharreko parametroen kopurua murrizten baita eta, gainera, sistema guztiak aldi berean azaltzen baitira. Horregatik, hemendik aurrera adierazpen horretatik lortutako lerro isotermaok aztertuko dira (ikus 3.21. ekuazioa).

$$p_R(v_R, T_R) = \frac{8T_R}{(3v_R - 1)} - \frac{3}{v_R^2} \quad (3.21)$$

### 3.1.2.2 Potentzial kimikoaren azterketa

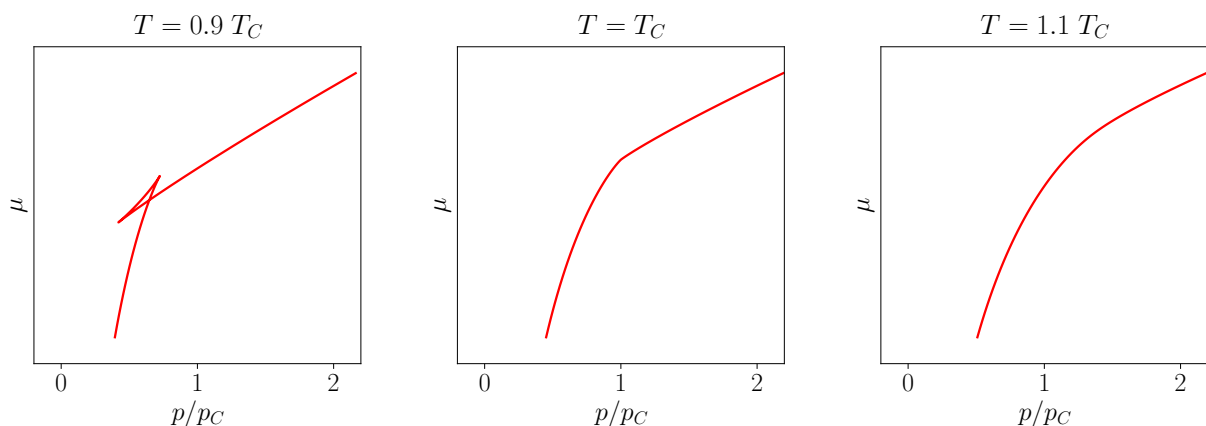
Fase-trantsizioen inguruko teoria orokorrak van der Waals-en egoera-ekuazioan duen eragina aztertzeko,  $\mu$  potentzial kimikoaren adierazpena lortu behar da. Horretarako, 3.22. adierazpeneko Gibbs-Duhem-en erlaziotik abiatuz, lerro isotermaoan zehar tenperatura konstantea dela aplika daiteke integrala ebazteko:

$$d\mu = -s dT + v dp \quad \xrightarrow{T=\text{kte}} \quad (d\mu)_T = v (dp)_T \quad (3.22)$$

$$\mu = \int v dp + \phi(T) \quad (3.23)$$

non 3.23. adierazpeneko  $\phi(T)$  gaia integrazio-konstantea den, tenperaturaren menpekoa. Gai horren ondorioz, metodo horren bidez lortutako  $\mu = \mu(p, T)$  planoak ez da kuantitativoki baliagarria izango, beti faltako baitu konstante horren ekarpena [13].

Zenbait tenperaturatan kokatutako sistementzat integral horren balioa kalkulatu gero (117-000 programan lantzen den moduan), honelako  $\mu$ -ren adierazpenak lortzen dira:



**3.6. irudia:** Zenbait tenperaturatan lortutako potentzial kimikoak. Irudiak 117-000 programarekin sortu dira.

Hiru adar bereiz daitezke 3.6. irudiko lehenengo grafikan: lehena, puntu baxuenetik hasita kurbadura negatiboarekin igotzen dena, gas egoerari dagokion potentzial kimikoa da. Bigarrena presio handietan bakarrik topa daitekeen kurba da, hau ere kurbadura negatiboduna eta likido egoeraren potentzial kimikoa adierazten duena.

Kontuan izan behar da sistema beti bi kurbetatik  $\mu$  txikiena duenean egongo dela bi kurbak eskuragarri dauden presioetan, aurreko atalean azaldu denez. Ondorioz,  $p$  txikietan sistema gas egoeran egongo da. Bi kurbak elkartzen diren puntuan bien potentzial kimikoak berdinak direnez, sistemak lehen ordenako fase-trantsizioa jasango du. Hortik aurrera sistema likido egoeran egongo da, horri dagokiona izango baita balio baxueneko potentzial kimikoak dituen kurba.

Bi adar horien artekoari dagokionez, azpimarragarria da bere kurbadurak besteek azaltzen dutenaren aurkako zeinua duela. Aurreko atalean aipatutako egonkortasun-baldintzei erreparatuz (ikus 3.3. adierazpenak), argi gelditzen da gune horretan sistema ez dela egonkorra eta, ondorioz, sistemak ez diola inoiz hirugarren adar horri jarraituko. Ohartu, 3.6. irudian potentzial kimikoa aldagai intentsibo baten menpe adierazten dela eta, beraz, sistema egonkorra izan dadin bere bigarren deribatua negatiboa izan behar dela.

Beste bi grafiketan ageri denez,  $T \geq T_C$  kasuetan ez da hirugarren adar hori azaltzen. Ondorioz, sistema egonkorra da eremu guztian eta lehen ordenako fase-trantsizioak jasan beharrean, bigarren ordenakoak jasaten ditu.

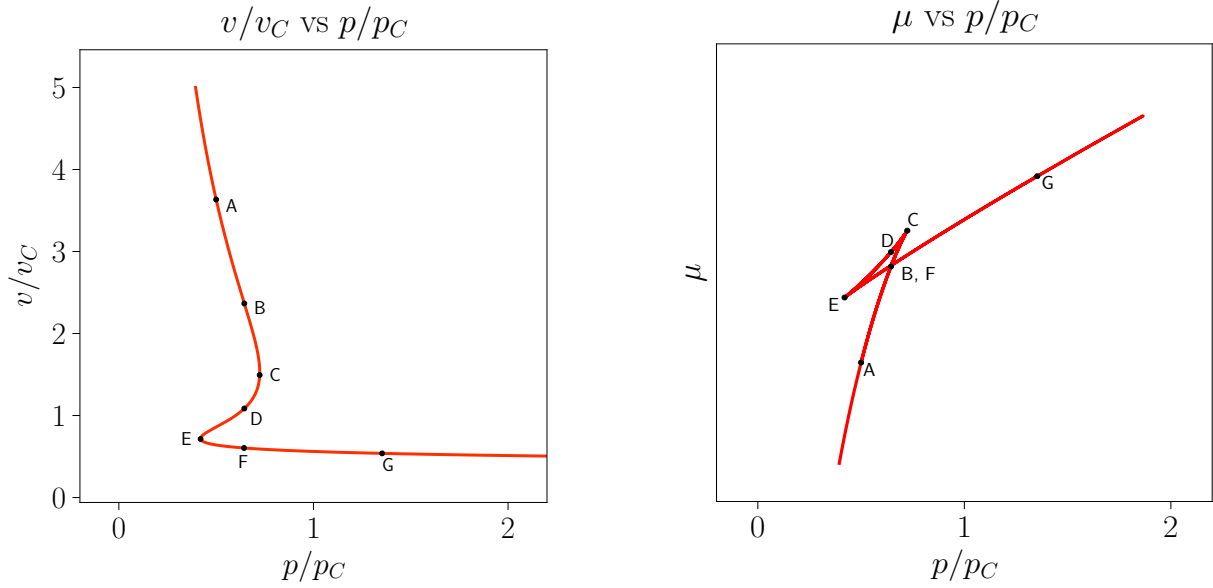
### 3.1.2.3 Lerro isoterma errealak

Egonkortasun-baldintzak betetzen diren edozein puntutan topa daiteke sistema; hau da: posiblea da sistema 3.7. irudiko C edo E puntuetan topatzea, nahiz eta potentzial kimikoa minimizatzen duten egoerak ez izan. Egoera *metaegonkorrak* dira horiek: bertan kokatutako sistema batek perturbazio txiki bat jasanez gero, bi fase bereizgarrietan banatuko da.

Sistema C puntuan dagoenean *likido gain berotu* egoeran dagoela esaten da eta E puntuan, aldiz, *gas azpi hoztu* egoeran [40].

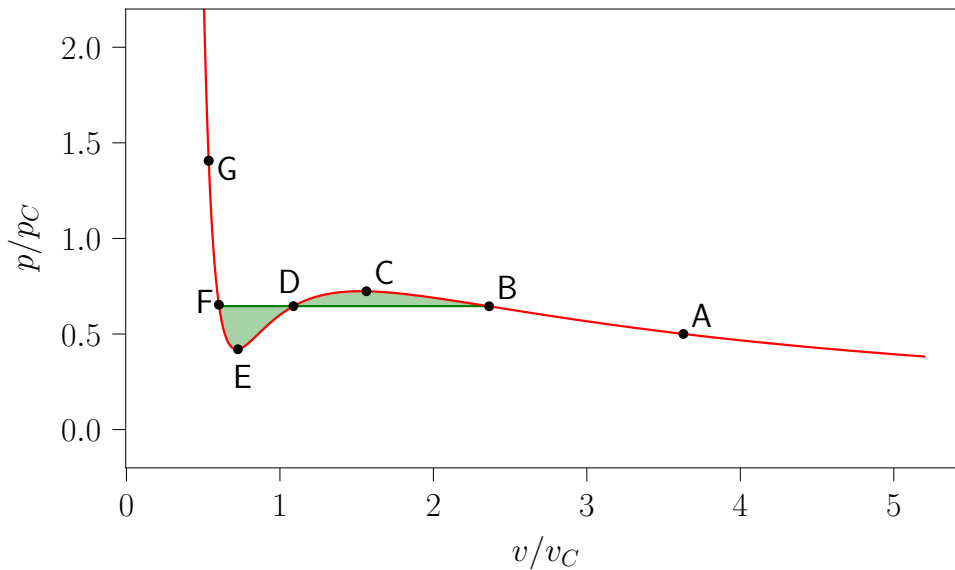
Sistema ezin denez egoera ezegonkor batean egon, argi dago ez dela C puntutik E puntura 3.8. irudiko lerro isotermoren arabera garatzen eta behin fase-trantsizioa hasita, beste lerro isoterma bati jarraitzen diola.

Idea horretan sakontzeko,  $v = v(p, T)$  grafikako puntuak  $\mu = \mu(p, T)$  grafikako puntuekin zuzenean erlaziona daitezke 117-000 programan, 3.7. irudian erakusten denez. Ezkerreko grafikako lerro isoterma zehar 3.23. ekuazioko integrala kalkulatu eskuineko irudiko potentzial kimikoa lor daiteke. Markatutako puntuak esangura berezia dute: lehen azal dutako C eta E puntuez gain, A eta G puntuak sistema fase bakarrean ageri deneko egoerak adierazten dituzte, B eta F puntuak lehen ordenako fase-trantsizioaren muga azaltzen dute eta D puntuak sistema ezegonkorra den egoera adierazten du.



**3.7. irudia:** Potentzial kimikoaren eraikuntza erakusteko sortutako irudiak. Aukeratutako lerro isoterma  $T = 0.9 T_C$  tenperaturari dagokio. Irudia 117-000 programarekin sortu da.

Azaldutako puntu berezi horiek ohiko lerro isotermaoren gainean proiektatu daitezke fase-trantsizioa hasten denean lerro isotermaon gertatzen dena aztertzeko.



**3.8. irudia:** Tenperatura azpikritikodun lerro isoterma, 3.7. irudiko grafikak sortzeko erabilitakoa. Koloreztatutako azalerak *Maxwell-en eraikuntzari* dagokio: sistema tenperatura batean finkatu ostean bi azalera horien balioak berdintzen dituen presioan gertatuko da lehen ordenako fase-trantsizioa. Irudia 111-000 programarekin sortu da.

Lehen aipatu denez, bi faseen potentzial kimikoak berdinak direnean gertatuko da lehen ordenako fase-trantsizioa. Ondorioz, B eta F puntuetan  $\mu_1 = \mu_2$  baldintza bete behar da,  $\mu_i$  fase bakoitzari dagokion potentzial kimikoa izanik.

$$\mu_1 = \mu_2 \quad \rightarrow \quad \int_F^B v(p) dp = 0 \quad (3.24)$$

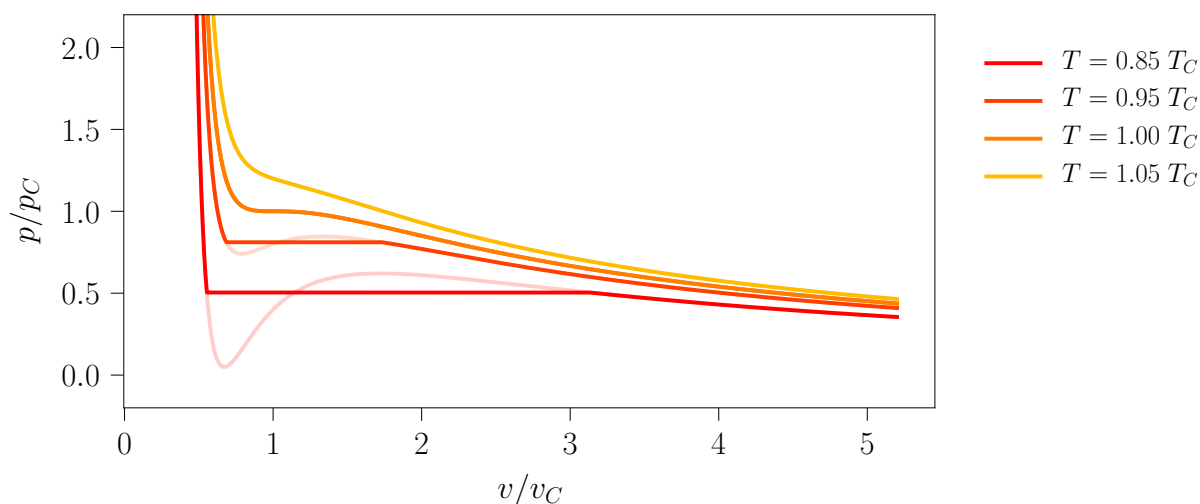
Integral hori bi zatitan bana daiteke:

$$\int_F^D v(p) dp + \int_D^B v(p) dp = 0 \quad (3.25)$$

Hau da, 3.8. irudian koloreztatutako bi azalerak balioz berdinak izan behar dira. Arau horri *Maxwell-en eraikuntza* deritzo: sistemaren isoterma erreala trunkatutako isoterma ideala izango da [13].

Sistemaren tenperatura tenperatura kritikoa baino baxuagoa den kasuetan (3.8. irudikoa, esaterako), sistema G puntutik B puntura van der Waals-ek proposatutako lerro isoterma jarraituz garatuko da, F-B tartea lerro isobarikoan zehar egingo du eta B puntutik A punturako bidea berriro ere hasierako lerrotik egingo du, trantsizio guztian egonkortasun-baldintza hautsi gabe. Sistema tenperatura kritikoren gainetik finkatzean, bigarren ordenako fase-trantsizioa van der Waals-en isotermei jarraituz gertatuko da.

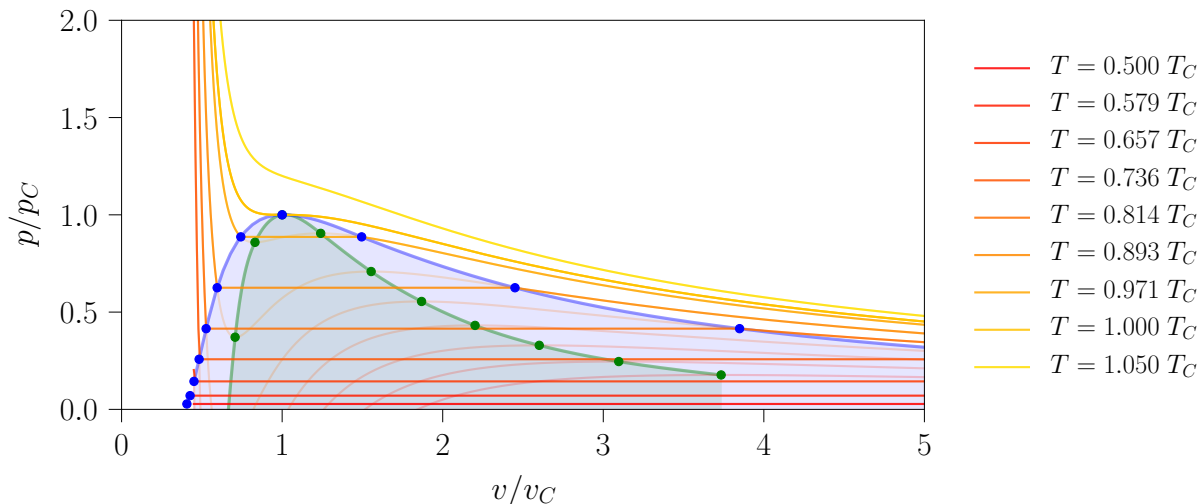
Hori hobeto azaltzeko, 111-000 programaren bidez 3.9 irudia sortu da. Bertan, zenbait tenperaturatan kokatutako sistemek errealitatean izango luketen garapena azaltzen da, Maxwell-en eraikuntzaren bidez kalkulaturakoa. Gainera,  $T < T_C$  kasuetan van der Waals-en lerro isoterma idealak ere adierazten dira, opakutasun txikiagoko lerroen bitartez.



**3.9. irudia:** Zenbait tenperaturatan kokatutako jariakin baten lerro isoterma erreal eta idealak (azken horiek opakutasun txikiagoarekin). Irudia 111-000 programarekin sortu da.

Azterketa hori sakontzeko, tenperatura gehiagotan ipin daiteke sistema, 3.10. irudian azaltzen den grafika lortuz. Lerro urdinak mugatutako guneari *koexistentzia-gunea* deritzo: bi fasetan banatuta agertu ohi da bertan kokatutako sistema [13]. Lerro berdeak, aldiz, egonkortasun-baldintzak betetzen ez diren gunea inguratzen du: ezinezkoa

da, beraz, berdez koloreztatutako gunean sistema fase bakarrean topatzea. Zonalde urdinean egonkortasun-baldintzak betetzen direnez, baldintza egokiak betez gero, sistema osoa egoera metaegonkor bakarrean ager daiteke [42]. Bi muga horien eta irudikatutako lerro isotermoen arteko ebakidurak puntuek adierazten dituzte.



**3.10. irudia:** Zenbait tenperaturatan kokatutako jariakin baten lerro isotermo errealak. Koexistentzia-gunearen muga lerro urdinez adierazi da eta lerro berdeak egonkortasun-baldintzak betetzen ez diren gunea inguratzen du. Irudia 111-000 programarekin sortu da.

### 3.1.2.4 Bolumen molarraren aldaketa

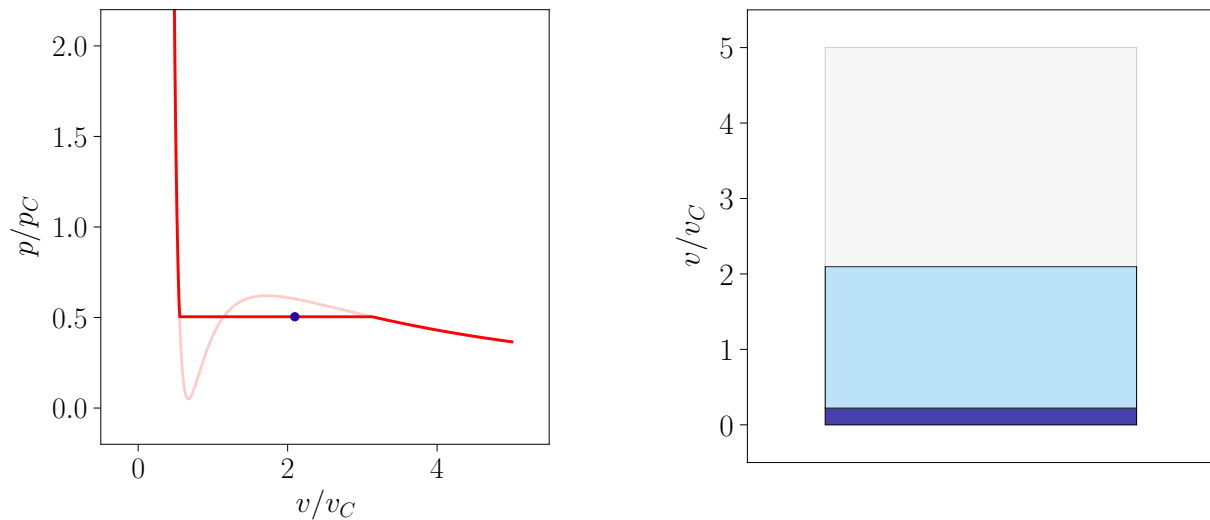
Aurreko atalean azaldutako koexistentzia-gunearen mugak sistemaren fase bakoitzeko bolumen molarrak jakiteko erabil daitezke. Lehen aipatu denez, sistema lerro isotermoko eremu isobarikoan zehar garatuko da lehen ordenako fase-trantsizioa jasatean. Trantsizio hori gertatzen den bitartean, fase banatan agertzen den bolumenaren proportzioa *palankaren erregela*-ren bitartez kalkula daiteke (ikus 3.27. adierazpena) [13]. Sistemaren bolumen molar osoa  $v$  izanik eta  $v_g$  eta  $v_l$ , hurrenez hurren, gas eta likido faseen bolumen molarrak badira, honakoa ondoriozta daiteke:

$$v = \frac{V}{N} \rightarrow V = vN = N(x_l v_l + x_g v_g) \quad (3.26)$$

$$x_l = \frac{v_g - v}{v_g - v_l} \quad x_g = \frac{v - v_l}{v_g - v_l} \quad (3.27)$$

Bi adierazpen horiek oso erabilgarriak izan daitezke likido/gas fase-trantsizioa irudikatze-ko, 112-000 programan egin den moduan. Aipaturiko programaz baliatuz, 3.11. irudiko bi diagramak sortu dira. Ezkerrekoan  $T = 0.85 T_C$  tenperaturari dagokion sistemaren lerro isotermo esperimetal eta teorikoa azaltzen dira (azken hau opakutasun gutxiagorekin). Bertako puntu urdinak sistemaren egoera adierazten du, jatorrizko programan lerro isotermo guztian zehar mugi daitekeena. Eskuinean, aldiz, laborategian behatuko litzatekeenaren diagrama sinplifikatu bat ageri da, puntu urdinak finkatutako egoerari dagokiona hain zuzen ere. Diagramako blokeen koloreak faseen bolumen molarrarekin

erlazionatuta daude: urdin argiak gas-faseak betetzen duen bolumen molarra adierazten duen bitartean, ilunak likido-fasearena adierazten du.



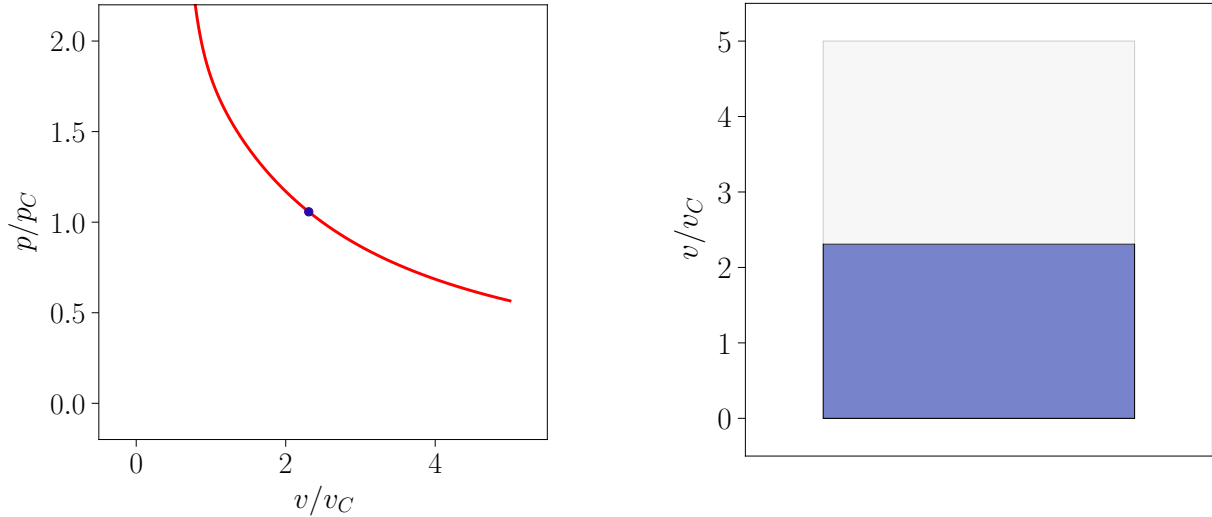
**3.11. irudia:** Jariakin baten fase-trantsizioa lantzean laborategian behatuko litzatekeena azaltzeko sortutako irudiak. Kasu honetan  $T = 0.85 T_C$  temperaturan kokatu da sistema. Irudiak 112-000 programarekin sortu dira.

Bigarren grafika horrek jariakinaren portaera esperimentalak aurreikusteko aukera ematen du. Presio txikietan sistema gas egoeran egongo litzateke (urdin argia) eta presioa handitu ahala gasaren bolumen molarra txikituz joango litzateke fase-trantsizioa hasi arte. Une horretan likido tantak agertuko lirateke (urdin iluna) eta fase-trantsizioak iraun bitartean bi egoeren bolumenen arteko proportzioa palankaren erregelak emandakoa izango litzateke. Sistema osoa fasez aldatzean argi gelditzen da likidoaren konprimagarritasun isoterma askoz txikiagoa dela, presio aldaketa berdinerako bolumenean eragindako aldaketa lehen baino txikiagoa baita.

Programa beraz baliatuz, sistema  $T > T_C$  temperatura batean finkatu eta bigarren ordenako fase-trantsizioen ezaugarriak behatzea ere interesgarria izan daiteke. Kasu horretan, 3.12. irudian aurkeztutako diagramak lortzeko  $T = 1.2 T_C$  temperaturan finkatu da sistema. Baldintza horren pean sistemak bigarren ordenako fase-trantsizioa jasaten duenez, ez dira aldi berean bi fase bereizi inoiz behatzen: presio baxuko egoera batetik hasi eta presioa pixkanaka handituz, diagramako sistema urdin argiz margotuta egotetik urdin ilunez margotuta egotera pasa da.

Fase-trantsizioen inguruko mezu garrantzitsu bat ematen du horrek, 3.1.1 atalean aipatutakoa: jariakinen kasuan, lehen ordenako trantsizio batean bolumen molarrak jauzi bat aurkeztu du eta bigarren ordenakoetan, aldiz, aipaturiko ezaugarria modu jarraituan garatzen da.





**3.12. irudia:** Jariakin baten fase-trantsizioa lantzean laborategian behatuko litzatekeena azaltzeko sortutako irudiak. Kasu honetan  $T = 1.20 T_C$  temperaturan kokatu da sistema. Irudiak 112-000 programarekin sortu dira

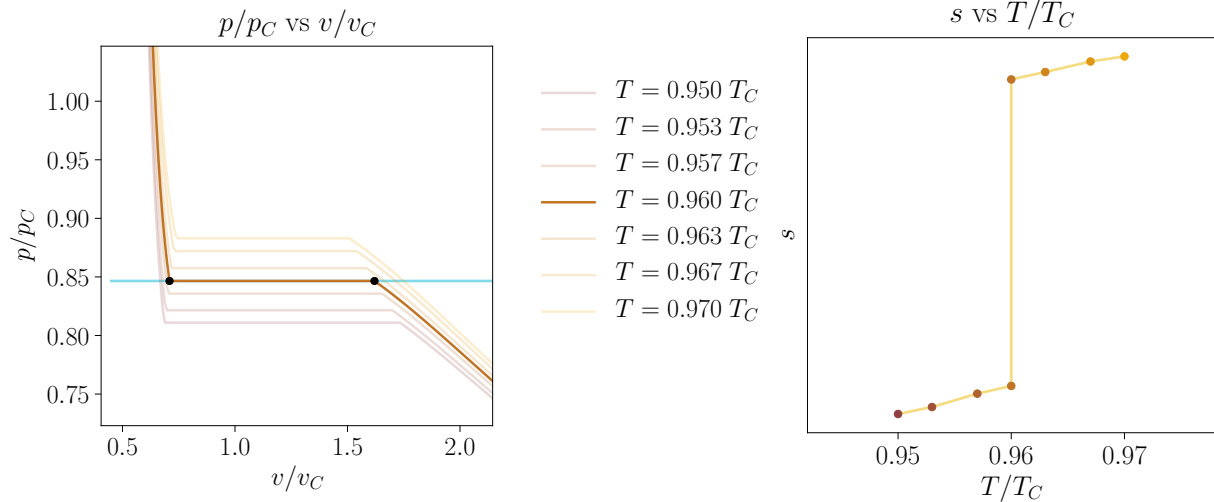
### 3.1.2.5 Entropia molarraren aldaketa

Bolumen molarraz gain, entropia molarrak ere ez-jarraitasuna azaltzen du lehen ordenako fase-trantsizioetan. Entropiaren adierazpena bere definizioa eta 3.21. ekuazioan aurkeztutako lerro isotermoen adierazpena erabiliz kalkula daiteke (ikus 3.28 eta 3.29. ekuazioak).

$$\left. \begin{aligned} ds &= \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v dv \\ p_R(v_R, T_R) &= \frac{8T_R}{(3v_R - 1)} - \frac{3}{v_R^2} \end{aligned} \right\} \rightarrow ds = \frac{8}{3v - 1} \quad (3.28)$$

$$s = \int \frac{8}{3v - 1} dv = \frac{8}{3} \ln |3v - 1| + kte \quad (3.29)$$

Lortutako adierazpen horrek ez du entropiaren balio absolutua kalkulatzeko balio, baina bere itxura irudikatzeko erabil daiteke (ikus 3.13 irudia). Oraingoan, sistema temperatura jakin batean finkatu beharrean presio konstateko baldintzetan mantendu da. Horrela, temperatura aldatzean, presio eta temperatura horri dagozkion bolumena hartuko du sistemak. Lehen ordenako fase-trantsizioari dagozkion presio eta temperaturara iristean, bi bolumen izango ditu eskuragarri, bi faseei dagozkienak, hain zuzen ere. Entropia molarraren bi balio bereizgarri ere izan ahalko ditu, ondorioz. Trantsizioa gertatzen deneko temperatura gaindituta, sistemak berriro ere entropia bakar bat izango du eskuragarri. Prozesu hori erakusteko 11D-000 programa sortu da, 3.13. irudiko grafikak egiteko aukera ematen duena.



**3.13. irudia:** Presio konstantean mantendutako sistema baten entropiak tenperaturarekiko duen menpekotasuna azaltzeko sortutako irudiak. Irudiak 11D-000 programarekin sortu dira.

Sistema presio konstantean mantentzen denez, urdinez markatutako lerro isobarikoaren eta bere tenperaturari dagokion lerro isoterminoaren arteko ebakiduran egongo da. Ezkerreko grafikan ikusten denez, tenperatura eta presio jakinetan sistemak lehen ordenako fase-trantsizioa jasaten badu, ebakidura horretako puntuen kopurua infinitoa izango da eta sistema ezkerreko grafikan beltzez adierazitako bi egoeren nahasketa bezala agertuko da. Tenperatura gehiago handituz gero, fase-trantsizioa amaituko da eta sistema osoa fase bakar batean agertuko da (kasu honetan gas egoeran).

Amaitzeko, aipagarria da fase-trantsizioan gertatutako bero sorra orain arte azaldutako programa ezberdinak erabiliz kalkula daitekeela (ikus 3.30. garapena) [13].

$$\delta Q = \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right) \xrightarrow{T=\text{kte}} \Delta Q = \frac{1}{T} \Delta s = \frac{8}{3T} \ln \left| \frac{3v_l - 1}{3v_g - 1} \right| \quad (3.30)$$

## 3.2 Inkesten emaitzak

Proiektu guzti honen helburua ikasleen parte-hartzea eta elkarrekintza sustatuko duten aplikazioak sortzeaenez, ezinbestekoa zen programen garapenaren une batean haien iritzia jaso eta sortutako produktuaren kontrol bezala erabiltzea.

Kontrol-saioaren helburuak hainbat ziren, beraz: proiektuaren hartzaile nagusiei aurkeztu eta haien iritzia jasotzeaz gain, aplikazioak amaierako erabilera-eremuan probatu eta garapenean oharkabean pasatutako akatsak antzematea bilatu zen.

Lagin bezala 33 ikaslez osatutako talde bat hautatu zen, Euskal Herriko Unibertsitateko Fisikako Gradu eta Fisika eta Ingeniaritza Elektronikoko Gradu Bikoitzeko Termodinamika eta Fisika Estatistikoan matrikulatutakoez osatutakoa, hain zuzen ere. Aipaturiko taldeak fase-trantsizioei buruzko 6 eskola-ordu jaso ohi ditu, van der Waals-en egoera-ekuazioaren bidez lehen ordenako trantsizioen inguruko kontzeptuetan sakonduz. Garrantutako materiala haren hartzaileei aurkeztu eta proiektutik kanpo dagoen talde baten kritikak jasotzeko asmoz, 2019ko abenduan van der Waals-en egoera-ekuazioaren inguruko eskola magistral bat jaso zuen taldeak, emandako azalpenak indartzeko adierazpen grafiko interaktiboak erabiliz. Ordu bakarrean, gai horri lotutako ia kontzeptu guztiak landu ziren eta, ondorioz, aplikazio gehienak erabili ziren azalpenak eman bitartean irudiak sortzeko. Ikasleen iritzia galdera ezberdinez eta iruzkin ireki batez osatutako inkesta baten bidez jaso zen.

Ikasleen % 90-ak ikusitako tresnekiko interesa aurkeztu zuen, nahiz eta erdiek baino ez zuten normalean baino atentzio gehiago ipini. Jasotako erantzunen % 90-ak eskola emateko modu aproposa dela adierazi eta horrelako eskola gehiago jasotzeko prest dagoela esan zuen. Ohiko metodologiarekin alderatuta, laginaren % 78-a tresna interaktiboetan oinarritutako eskolen aldeko agertu zen. Amaitzeko, irakasgaia lehenengo aldiz egiten ez zuten ikasleei bideratutako galdera bat zegoen. Bertan, 6 ikasletatik 5-ek landutako kontzeptuak aurreko urteetan baino hobeto ulertu izana adierazi zuten.

Iruzkin irekiei dagokienez, ikusitako programak materia ulertzeko baliagarriak izan daitezkeela adierazi zuten ikasleek, baina zenbaitetan proiektatutako pantailan erakutsitako hizkien tamaina handiagoa izan beharko litzatekeela azpimarratu zuten, ikasgelaren tamainaren ondorioz zaila egiten baitzizaien testu guztia irakurtzea.

Azken iruzkin hori kontuan hartu da programak hobetzerako orduan eta aplikazio guztietan *proiektzio modua* implementatu da: pantailan ageri diren hizki guztien tamaina bikoiztu egiten da hura aktibatzean, urrunetik ere testu guztia irakurgarria eginez.

## 4. kapitulua

# Ondorioak

Lan honetan ikasleen parte-hartzea suspertzea helburu duen irakaskuntza-proiektua aurkeztu da. Softwarearen garapenean erabili ohi diren tresna eta estrategiak erabili dira proiektua aurrera eramateko, haien oinarritzko erabilera eta plataforma ezberdinen arteko integrazioa landuz. Ohiko irakaskuntza-planen material osagarria izateaz gain, garatutako Notebook-ak ikaslearen eta ikasgaiaren arteko elkarrekintzan oinarritutako irakaskuntza-proiektuetan erabil daitezke.

Sortutako materialak eta hura garatzeko erabilitako tresnek, lan honen hasieran zehaztutako helburu guztiak betetzen dituzte. Proiektu osoa editagarria denez eta jarraitutako urrats eta irizpideak dokumentatuta daudenez, erraza da materiala eguneratuta mantentzea. Gainera, prozesu guztiaren inguruko informazioa dute eskuragarri hartzaileek, lan honen eremua zabaltzeko edota izaera antzekoko proiektuak aurrera eramateko eredu bezala erabiltzeko aukera eskainiz. Aipagarria da MinervaLab jarraitutako hausnarketa-eta ikerkuntza-prozesuaren emaitza posible bat baino ez dela: atal teorikoan azaldutako irizpideei edota lan-fluxuari (guztiz zein partzialki) jarraituz, izaera antzekoko proiektuak garatzeaz gain, helburu oso ezberdinak dituzten lanak ere egin daitezke.

MinervaLab-en kasuan, plataforma guztien integrazioa egokia izan da, materialaren garapena, mantenua eta argitarapena erraztuz. Hala ere, hainbat dira probatu ez diren plataforma interesgarriak: Google Colab —Notebook-ak hodeian exekutatzeko—, Deepnote —aldi berean erabiltzaile anitzen artean Notebook-ekin sarean lan egiteko— edota Jupyter Book —dokumentazioa eta apunteak argitaratzeko—. Aipaturiko plataformek baliabide eta aukera berriak eskaintzen dituzte: etorkizunean haien inguruko azterketa burutu eta proiektuaren izaerarekin bat datozenak orain arte erabilitakoekin integratuko dira. Adibidez, txosten hau bera Jupyter Book bidez argitaratuko da, nahi duen orok kontsulta dezan.

Irakaskuntza-proiektuari dagokionez, ikasleak horrelako ekintzetan parte hartzeko prest daudela argi gelditu da inkestetan. Eskola emateko moduaren aldaketaren abiadura ere haien finkatzen dute: tresna berrien aldekoak azaltzen dira, baina ohiko klase magistralen jarduera osagarri bezala. Hortik abiatuz, ikasgaiaren material guztia Notebook-etan oinarritzea izango da hurrengo helburu nagusia, ikasleen parte-hartzea eta ikerketa autonomia bultzatuz. Etorkizunean, bi kontrol-talde bereiziko dira, Fisikaren irakaskuntza-metodoen

inguruko ikerkuntzetan egiten den moduan. Ohiko irakaskuntza-programa bat jarraituko du batek. Besteak aldiz, Jupyter Notebook-en bidez klaseak eta apunteak jaso eta garatutako aplikazioen bitartez ebatz daitezkeen ariketak egingo ditu. Lagina lan-talde txikietan banatzea ere komenigarria izango litzateke, bibliografian aipatutako ikerkuntzetan egin izan denez. Horrela, ikasleen asegarritasunaz gain horrelako jardueraz lortzen duten etekin akademikoa ere neurtu ahalko litzateke.

Argi dago irakaskuntza gizartearen eskutik garatu behar dela. Ikasleen jarrera autonomoa eta parte-hartzea sustatu behar dira, munduarekiko ikuspegi kritikoa eta arazoei aurre egiteko jarrera kolaboratibo eta aktiboa garatu dezaten. Hori bermatuko duten irakaskuntza-proiektuak aurrera eramateko, ezinbestekoa da irakasleek haien denbora eta esfortzua ondo inbertitzea ahalbidetzen duten tresna eta estrategiak erabiltzea, prozesu osoa irakaskuntzaren zati diren bi taldeentzat onuragarria izateko.

# Bibliografía

- [1] L. Deslauriers, E. Schelew, eta C. Wieman, “Improved learning in a large-enrollment physics class,” *Science*, 332. bol., 6031. zb., 862–864. orr., 2011.
- [2] T. Fredlund, J. Airey, eta C. Linder, “Exploring the role of physics representations: An illustrative example from students sharing knowledge about refraction,” *European Journal of Physics*, 33. bol., 3. zb., 657–666. orr., 2012.
- [3] L. A. Barba, L. J. Barker, D. S. Blank, J. Brown, A. B. Downey, T. George, L. J. Heagy, K. T. Mandli, J. K. Moore, D. Lippert, K. E. Niemeyer, R. R. Watkins, R. H. West, E. Wickles, C. Willing, eta M. Zingdale, “Teaching and learning with jupyter,” 2019. [Online]. Eskuragarri: <https://github.com/jupyter4edu/jupyter-edu-book>
- [4] J. D. van der Waals, *On the Continuity of the Gaseous and Liquid States*, J. S. Rowlinson, Ed. Elsevier Science Publishers B.V., 2004.
- [5] Eusko Jaurlaritza, “Sare\_ hezkuntza Gelan,” euskadi.eus, 2020. [Online]. Eskuragarri: [https://www.euskadi.eus/sare\\_hezkuntza-gelan/web01-a3hsare/eu/](https://www.euskadi.eus/sare_hezkuntza-gelan/web01-a3hsare/eu/) (2020/03/22an kontsultatua).
- [6] Irekia - Eusko Jaurlaritza, “Eskola 2.0 Programaren aurkezpena [Sarean],” euskadi.eus. [Online]. Eskuragarri: [https://www.euskadi.eus/sare\\_hezkuntza-gelan/web01-a3hsare/eu/](https://www.euskadi.eus/sare_hezkuntza-gelan/web01-a3hsare/eu/) (2020/03/22an kontsultatua).
- [7] J. M. Aguirregabiria, “Dynamics Solver [Sarean],” tp.lc.ehu.es, 2015. [Online]. Eskuragarri: <http://tp.lc.ehu.es/jma/ds/ds.html> (2020/03/22an kontsultatua).
- [8] M. A. Álvarez, Á. O. Moreno, J. de la Fuente Vázquez, S. L. Gómez, E. G. de Chávarri Echaniz, M. I. Talegón, eta B. M. Álvarez, “Herramientas de aprendizaje interactivo en la asignatura de producción animal: aplicación informática para la estimación de las emisiones y el consumo de recursos en explotaciones ganaderas,” in *VII Jornada Campus Virtual UCM: valorar, validar y difundir Campus Virtual*. Madrid: Universidad Complutense de Madrid, 2012, 163–170. orr. [Online]. Eskuragarri: <https://eprints.ucm.es/20591/>
- [9] Red Hat, “Open source: ¿Qué es el open source?” redhat.com, 2020. [Online]. Eskuragarri: <https://www.redhat.com/es/topics/open-source/what-is-open-source> (2020/06/07an kontsultatua).
- [10] T. Kluyver, B. Ragan-Kelley, F. Pérez, B. Granger, M. Bussonnier, J. Frederic, K. Kelley, J. Hamrick, J. Grout, S. Corlay, P. Ivanov, D. Avila, S. Abdalla, eta C. Willing, “Jupyter notebooks – a publishing format for reproducible computational workflows,” in *Positioning and Power in Academic Publishing: Players, Agents and Agendas*, F. Loizides eta B. Schmidt, Edk. IOS Press, 2016, 87 – 90. orr.

- [11] Jupyter Team, “The Jupyter Notebook,” [jupyter-notebook.readthedocs.io](https://jupyter-notebook.readthedocs.io), 2015. [Online]. Eskuragarri: <https://jupyter-notebook.readthedocs.io/en/stable/notebook.html> (2020/03/20an kontsultatua).
- [12] Jupyter Team, “Jupyter Proyect,” [jupyter.org](https://jupyter.org), 2020. [Online]. Eskuragarri: <https://jupyter.org> (2020/03/20an kontsultatua).
- [13] H. B. Callen, “First-order phase transitions,” in *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*, 2. ed. Wiley, 1985, 215–241. orr.
- [14] Python Core Team, “Python: A dynamic, open source programming language,” [python.org](https://www.python.org), Python Software Foundation, 2015. [Online]. Eskuragarri: <https://www.python.org> (2020/03/20an kontsultatua).
- [15] R. Bhatia, “Here’s Why Python Continues To Be The Language Of Choice For Data Scientists,” [analyticsindiamag.com](https://analyticsindiamag.com), 2019. [Online]. Eskuragarri: <https://analyticsindiamag.com/heres-why-python-continues-to-be-the-language-of-choice-for-data-scientists/> (2020/03/20an kontsultatua).
- [16] S. van der Walt, S. C. Colbert, eta G. Varoquaux, “The numpy array: A structure for efficient numerical computation,” *Computing in Science & Engineering*, 13. bol., 2. zb., 22–30. orr., 2011. [Online]. Eskuragarri: <https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1109/MCSE.2011.37>
- [17] W. McKinney, “Data structures for statistical computing in python,” in *Proceedings of the 9th Python in Science Conference*, S. van der Walt eta J. Millman, Edk., 2010, 51 – 56. orr.
- [18] Bloomberg, “bqplot,” [bqplot.readthedocs.io](https://bqplot.readthedocs.io), 2015. [Online]. Eskuragarri: <https://bqplot.readthedocs.io/en/latest/introduction.html> (2020/03/20an kontsultatua).
- [19] Bloomberg, “bqplot,” [github.com/bloomberg](https://github.com/bloomberg). [Online]. Eskuragarri: <https://github.com/bloomberg/bqplot> (2020/03/20an kontsultatua).
- [20] J. D. Hunter, “Matplotlib: A 2d graphics environment,” *Computing in Science & Engineering*, 9. bol., 3. zb., 90–95. orr., 2007.
- [21] “Git,” [git-scm.com](https://git-scm.com). [Online]. Eskuragarri: <https://git-scm.com> (2020/03/21ean kontsultatua).
- [22] T. Swicegood, *Pragmatic Version Control Using Git*, 3. ed. The Pragmatic Bookshel, 7 2009.
- [23] V. Driessen, “A successful Git branching model,” [nvie.com](https://nvie.com), 2010. [Online]. Eskuragarri: <https://nvie.com/posts/a-successful-git-branching-model> (2020/06/08an kontsultatua).
- [24] GitHub, “GitHub,” [github.com](https://github.com), 2020. [Online]. Eskuragarri: <https://github.com> (2020/03/21ean kontsultatua).
- [25] GitLab, “GitLab,” [about.gitlab.com](https://about.gitlab.com), 2020. [Online]. Eskuragarri: <https://about.gitlab.com> (2020/03/21ean kontsultatua).
- [26] GitLab, “GitHub vs. GitLab,” [about.gitlab.com](https://about.gitlab.com), 2020. [Online]. Eskuragarri: <https://about.gitlab.com/devops-tools/github-vs-gitlab.html> (2020/03/21ean kontsultatua).
- [27] GitHub, “The State of the Octoverse,” [octoverse.github.com](https://octoverse.github.com), 2019. [Online]. Eskuragarri: <https://octoverse.github.com> (2020/03/21ean kontsultatua).

- [28] GitLab, “Import your project from GitHub to GitLab,” docs.gitlab.com, 2020. [Online]. Eskuragarri: <https://docs.gitlab.com/ee/user/project/import/github.html> (2020/03/21an kontsultatua).
- [29] Project Jupyter, M. Bussonnier, J. Forde, J. Freeman, B. Granger, T. Head, C. Holdgraf, K. Kelley, G. Nalvarte, A. Osheroﬀ, M. Pacer, Y. Panda, F. Perez, B. Ragan-Kelley, eta C. Willing, “Binder 2.0 - Reproducible, interactive, sharable environments for science at scale,” in *Proceedings of the 17th Python in Science Conference*, F. Akici, D. Lippa, D. Niederhut, eta M. Pacer, Edk., 2018, 113 – 120. orr.
- [30] The Binder Team, “Frequently Asked Questions [Sarean],” mybinder.readthedocs.io, 2017. [Online]. Eskuragarri: <https://mybinder.readthedocs.io/en/latest/faq.html> (2020/03/22an kontsultatua).
- [31] Read the Docs, Inc & contributors, “Read the Docs,” readthedocs.org, 2020. [Online]. Eskuragarri: <https://readthedocs.org> (2020/03/22an kontsultatua).
- [32] Read the Docs, Inc & contributors, “Read the Docs: Documentation Simplified,” docs.readthedocs.io, 2020. [Online]. Eskuragarri: <https://docs.readthedocs.io/en/stable> (2020/03/22an kontsultatua).
- [33] “Zenodo,” zenodo.org, 2020. [Online]. Eskuragarri: <https://zenodo.org> (2020/03/22an kontsultatua).
- [34] “The DOI System,” doi.org, 2020. [Online]. Eskuragarri: <https://www.doi.org> (2020/03/22an kontsultatua).
- [35] J. Gabirondo-López, “jongablop/minervalab: First version of minervalab,” Jun. 2020. [Online]. Eskuragarri: <https://doi.org/10.5281/zenodo.3893455>
- [36] S. J. Blundell eta K. M. Blundell, “Phase transitions,” in *Concepts in Thermal Physics*. Oxford University Press, 2009, 305–323. orr.
- [37] S. J. Blundell eta K. M. Blundell, “Thermodynamic potentials,” in *Concepts in Thermal Physics*. Oxford University Press, 2009, 164–167. orr.
- [38] H. B. Callen, “Stability of thermodynamic systems,” in *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*, 2. ed. Wiley, 1985, 207–208. orr.
- [39] Y. Melikhov, R. L. Hadimani, eta A. Raghunathan, “Phenomenological modelling of first order phase transitions in magnetic systems,” *Journal of Applied Physics*, 115. bol., 18. zb., 2014.
- [40] S. J. Blundell eta K. M. Blundell, “Real gases,” in *Concepts in Thermal Physics*. Oxford University Press, 2009, 280–288. orr.
- [41] D. R. Lide, “Fluid properties,” in *CRC Handbook of Chemistry and Physics*, 84. ed. CRC Press, 2003, 43. or.
- [42] P. G. Debenedetti, “Thermodynamics,” in *Metastable liquids: concepts and principles*, ser. Physical chemistry (Princeton, N.J.). Princeton University Press, 1996, 84–88. orr.