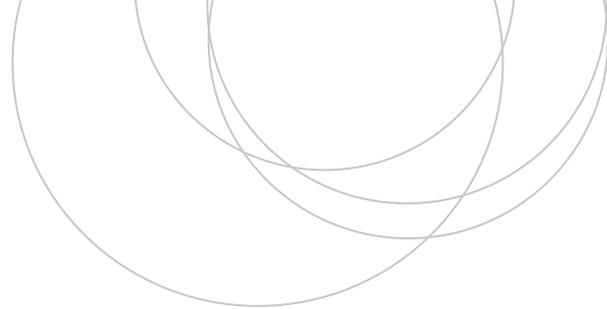




Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

ZIENTZIA
ETA TEKNOLOGIA
FAKULTATEA
FACULTAD
DE CIENCIA
Y TECNOLOGÍA



Gradu Amaierako Lana / Trabajo Fin de Grado
Fisikako Gradua / Grado en Física

Asistencia gravitatoria y anomalía flyby

Egilea/Autor/a:
Jorge Domínguez Becerril
Zuzendaria/Director/a:
Raül Vera Jiménez

Índice

1. Introducción	1
2. Asistencia gravitatoria	2
2.1. Proceso de transferencia de energía en una maniobra flyby	2
2.2. Ventajas y límites de la asistencia gravitatoria	4
3. Anomalía flyby	7
3.1. Método de seguimiento de la sonda	7
3.2. Fórmula empírica de Anderson	8
4. Estimación de los efectos	10
4.1. Efectos clásicos	11
4.2. Efectos relativistas	13
5. Efectos de una corriente de torsión topológica	17
6. Versión causal de la teoría Newtoniana	22
7. Modificación de la inercia	25
8. Anisotropía de la velocidad de la luz	28
9. Conclusiones	33
Bibliografía	34

1. Introducción

Desde sus primeros pasos por el planeta Tierra el ser humano ha sentido curiosidad por los objetos y estructuras presentes en el cielo nocturno. A finales del siglo XVI y principios del siglo XVII, con la aparición de los primeros telescopios ópticos, se empieza a conocer la naturaleza de estos objetos celestes. En los siglos posteriores se desarrollan telescopios más y más potentes que dan lugar al descubrimiento de muchos cuerpos celestes no distinguibles a simple vista. Pero no es hasta el siglo XX cuando se planifican las primeras misiones espaciales para viajar y estudiar los objetos más cercanos a la Tierra, como son los planetas del sistema solar. Estas misiones se basan en la maniobra de asistencia gravitatoria, sin la cual serían totalmente inviables. La asistencia gravitatoria es, como se verá posteriormente, una estrategia de vuelo espacial que utiliza el campo gravitatorio de un objeto celeste para modificar el módulo de la velocidad de una sonda sin utilizar propelente. Esta maniobra tiene sus orígenes en un artículo de 1918-1919 de Yuri Kondratyuk [1]. En él se sugiere que una sonda viajando entre dos planetas se podría acelerar al inicio y al final de su trayectoria utilizando la gravedad de las lunas de ambos planetas.

Durante las asistencias gravitatorias de las sondas Galileo, NEAR, Cassini y Rosetta alrededor de la Tierra se han producido unos incrementos de velocidad distintos de los esperados, y es lo que se conoce como la anomalía flyby. Esta anomalía no ha sido un impedimento para la consecución de las misiones espaciales en las que ha sido detectada. Sin embargo, resulta interesante profundizar en ella ya que podría dar lugar a nueva física.

El objetivo principal de este trabajo consiste en la realización de una revisión documental acerca de la anomalía flyby en aras de proporcionar una visión sobre el estado actual del tema. Para ello, el trabajo ha sido estructurado de la siguiente manera:

- **Capítulo 2.** Fundamentos de la asistencia gravitatoria, proceso de transferencia de energía y ventajas y límites de esta maniobra.
- **Capítulo 3.** Se explica detalladamente en qué consiste la anomalía flyby, se muestra el método de seguimiento utilizado en las sondas y se presenta la fórmula empírica de Anderson, una fórmula fenomenológica cuyos resultados concuerdan con los cambios de velocidad anómalos observados en algunas sondas.
- **Capítulo 4.** Análisis de algunos efectos clásicos y relativistas que podrían ser la causa de la anomalía flyby.
- **Capítulos 5, 6, 7 y 8.** Se exponen algunas de las teorías propuestas para la anomalía flyby. En cada capítulo se desarrolla la idea detrás de cada teoría, se muestran los resultados que se obtienen y se comentan los aspectos más polémicos. Además, cada capítulo termina con una conclusión.

Finalmente, el trabajo termina con una conclusión general, recogida en el capítulo 9, en la que se comparan las teorías propuestas por los distintos autores. Asimismo, se hace referencia a otras líneas de investigación y se discute cómo se podrían comprobar o descartar las teorías.

2. Asistencia gravitatoria

La asistencia gravitatoria o maniobra flyby es una estrategia de vuelo espacial que permite modificar tanto la velocidad (aumentándola o disminuyéndola) como la trayectoria de una nave espacial utilizando el movimiento relativo y el campo gravitatorio de un objeto astronómico. Por lo tanto, esta maniobra constituye un avance en las misiones espaciales de largo alcance ya que prescinde del uso de propergol.

La esfera de influencia gravitatoria de un objeto astronómico se define como la región del espacio en la cual la influencia gravitatoria predominante sobre un cuerpo en órbita es la del objeto astronómico. Cuando una cosmonave penetra en la esfera de influencia gravitatoria de un planeta del sistema solar, la velocidad de la astronave referida al planeta aumenta cuando se acerca al planeta y disminuye cuando se aleja. A la misma distancia del planeta la diferencia en el módulo de la velocidad será nula. Sin embargo, como el planeta orbita alrededor del Sol, la cosmonave se verá afectada por este movimiento orbital y su velocidad respecto al Sol experimentará un cambio no nulo en el módulo. La trayectoria resultante dependerá del ángulo de aproximación al planeta y de la velocidad que tenga la nave al hacerlo.

Cabe destacar que durante un flyby se verifica el principio de conservación de la energía, ya que cualquier cambio en la velocidad de la astronave referida al Sol produce una modificación en la velocidad orbital del planeta. Si bien, para este último dicha modificación no conlleva un cambio significativo en la trayectoria debido a su gran masa.

La maniobra de asistencia gravitatoria se utilizó por primera vez en 1959 cuando la sonda soviética Luna 3 fotografió la cara oculta de la Luna. Desde entonces se ha utilizado con éxito en más de 40 misiones espaciales [2], entre las que destacan las Voyager 1 y 2, Galileo, NEAR, Cassini, Rosetta y MESSENGER, permitiendo tener un mayor conocimiento acerca del origen, evolución y estructura del sistema solar.

2.1. Proceso de transferencia de energía en una maniobra flyby

La maniobra flyby consiste en un problema de tres cuerpos restringido [3] en el que un cuerpo infinitesimal, es decir, una masa cuya influencia gravitatoria sobre el movimiento de los cuerpos astronómicos es despreciable y que en este caso es la cosmonave, está sometido a la atracción gravitatoria de dos cuerpos celestes. Si bien es cierto que en un problema de tres cuerpos la energía total del sistema se conserva, no lo es para cada uno de ellos individualmente, permitiendo modificar la velocidad de la astronave a partir de la variación de velocidad de los cuerpos astronómicos. El cambio de velocidad de los objetos astronómicos es, en cualquier caso, despreciable debido a su gran masa y no presenta una influencia apreciable sobre sus trayectorias. En el problema de tres cuerpos restringido existe una cantidad conservada para la nave espacial en el sistema de referencia del centro de masa, conocida como la integral de Jacobi

$$\mathcal{J} = \mathcal{K} + \mathcal{V} + \mathcal{L} = \mathcal{E} - \omega \hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{v}, \quad (1)$$

siendo \mathcal{K} la energía cinética, \mathcal{V} la energía potencial, \mathcal{L} la energía potencial-rotacional, \mathcal{E} la energía total, todos ellos por unidad de masa de la astronave, ω la velocidad angular del planeta, cuyo vector está alineado con el eje de rotación del planeta $\hat{\mathbf{z}}$, y \mathbf{r} y \mathbf{v} la

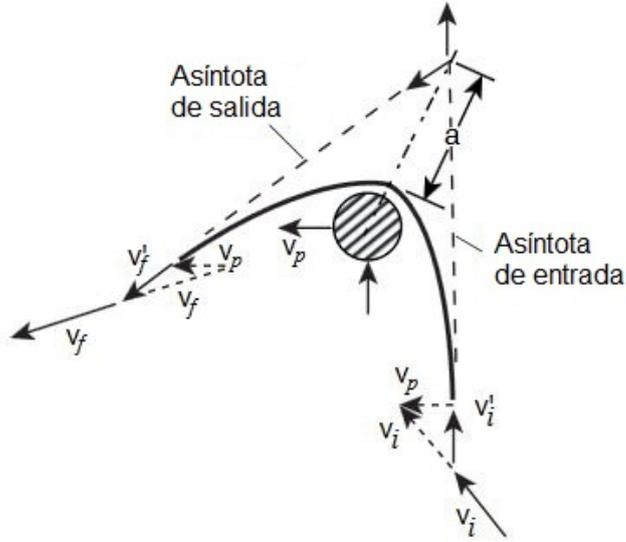


Figura 1: Geometría de la maniobra flyby, del texto [4].

posición y velocidad de la cosmonave respecto al planeta. Estrictamente hablando la integral de Jacobi es una cantidad constante para el problema de tres cuerpos restringido si se consideran órbitas circulares. Para órbitas elípticas esto solo es cierto en un alto grado de aproximación; sin embargo, esta cantidad resulta útil ya que muestra de forma intuitiva cómo se pueden intercambiar la energía cinética y el momento angular durante una maniobra de asistencia gravitatoria.

Los encuentros en el espacio requieren la utilización de tres dimensiones. No obstante, en aras de ilustrar el cambio de energía cinética de la nave se utilizará el modelo bidimensional de la figura 1, relegando a trabajos posteriores el cálculo de trayectorias, en el que se hace necesario un modelo tridimensional. La variación de energía cinética por unidad de masa de la cosmonave $\Delta\mathcal{K}$ viene dada por (ver figura 1)

$$\Delta\mathcal{K} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_f \cdot \mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i), \quad (2)$$

con \mathbf{v}_i y \mathbf{v}_f las velocidades inicial y final de la nave en el sistema de referencia heliocéntrico. Debido a consideraciones geométricas \mathbf{v}_i y \mathbf{v}_f se pueden escribir como

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_p,$$

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{v}'_f + \mathbf{v}_p,$$

donde \mathbf{v}'_i y \mathbf{v}'_f representan las velocidades inicial y final de la sonda en el sistema de referencia planetocéntrico y \mathbf{v}_p representa la velocidad orbital del planeta. Por lo tanto, sustituyendo en la ecuación (2) y teniendo en cuenta que $\mathbf{v}'_f = \mathbf{v}'_i$ ¹ se obtiene la expresión

$$\Delta\mathcal{K} = \mathbf{v}_p \cdot (\mathbf{v}'_f - \mathbf{v}'_i). \quad (3)$$

En virtud de esta ecuación queda patente que se puede tanto aumentar como disminuir la energía cinética de la nave en función de la relación entre los vectores \mathbf{v}'_i , \mathbf{v}'_f y \mathbf{v}_p . Para ver en qué casos el cambio de velocidad de la nave es positivo y en cuales negativo se toma

¹La notación que se utilizará en este trabajo es la negrita para representar vectores y la redonda o normal para su módulo.

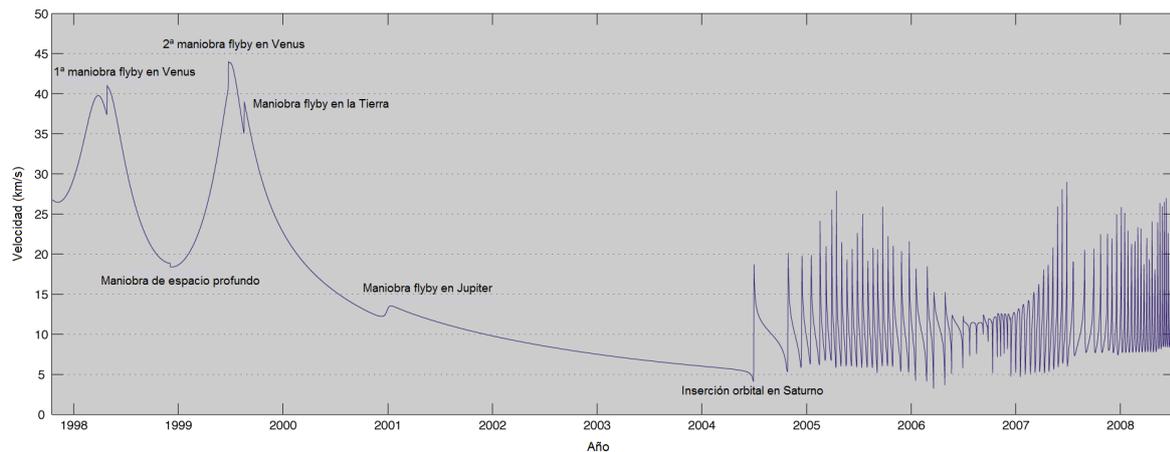


Figura 2: Módulo de la velocidad de la sonda Cassini-Huygens referida al Sol en función del año. Las máximos de la izquierda se producen por las maniobras de asistencia gravitatoria mientras que la variación periódica de la derecha está causada por la órbita de la cosmonave alrededor de Saturno.

la orientación de tal forma que en el sistema solar los planetas orbiten alrededor del Sol en sentido antihorario. Si la astronave proviene del exterior de la órbita planetaria, viaja detrás del planeta y le da la vuelta en sentido horario su energía cinética se verá aumentada como consecuencia del arrastre gravitatorio ejercido por el planeta sobre la misma. Por contra, si la cosmonave proviene del exterior de la órbita planetaria, viaja frente al planeta y le da la vuelta en sentido antihorario esta experimentará un cambio negativo en su energía cinética.

Cuando una nave es lanzada para estudiar un planeta interior del sistema solar su velocidad relativa aumenta debido a la gravedad solar. Aunque la velocidad orbital de los planetas interiores es mayor que la de la tierra, si el propósito de la misión consiste en la inserción orbital en el planeta se requiere frenar la astronave. Por ejemplo, la sonda espacial Messenger [5] realizó tres maniobras de asistencia gravitatoria para reducir su velocidad² en su inserción orbital en Mercurio.

En cambio, una cosmonave lanzada para estudiar un planeta exterior experimentará una disminución de su velocidad relativa, haciéndose necesario aumentar la velocidad de la misma para lograr la inserción orbital en el planeta. En la figura 2 aparece representado el módulo de la velocidad de la sonda Cassini-Huygens [6] en función del año. En este caso han sido necesarias varias maniobras flyby; dos en Venus, una en la Tierra y otra en Júpiter para que la velocidad de la sonda a su llegada a Saturno sea aproximadamente igual a la velocidad orbital del mismo y conseguir la inserción orbital.

2.2. Ventajas y límites de la asistencia gravitatoria

Las misiones espaciales de largo alcance están limitadas, principalmente, por dos factores. Uno de ellos es la energía de lanzamiento C_3 , definida como el cuadrado del exceso

²Además de la asistencia gravitatoria existen otras maniobras de frenado que no utilizan propelente. No obstante, en todas ellas se hace uso de la atmósfera y Mercurio carece de atmósfera.

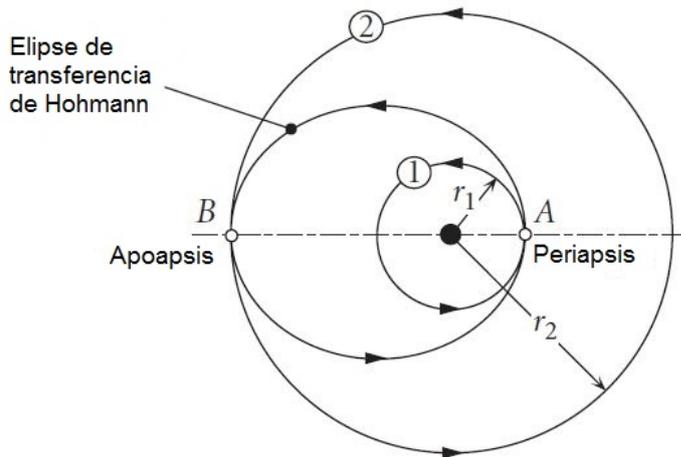


Figura 3: Trayectoria de transferencia de Hohmann, del texto [7].

de velocidad hiperbólica (es decir, la velocidad cuando $r \rightarrow \infty$) de la nave respecto a la Tierra v_∞ . Esta energía está relacionada con el cambio de velocidad que hay que conferir a la astronave durante su lanzamiento para alcanzar su destino. Un C_3 menor implica un cambio de velocidad de la astronave menor y un menor consumo de combustible. El otro factor es el tiempo de vuelo t_v y es deseable que sea el mínimo posible para acometer una exploración práctica del sistema solar. Para calcular ambos factores de forma precisa es necesario tener en cuenta los elementos orbitales de las órbitas de los planetas que intervienen en la misión espacial así como la trayectoria de la nave. Este cálculo es, de forma general, muy complicado de realizar y tampoco es el objetivo de este trabajo. En su lugar, estos factores se calculan utilizando una transferencia de Hohmann. La trayectoria de transferencia de Hohmann es la trayectoria de menor energía de transferencia entre dos órbitas circulares y coplanarias que tienen un foco en común. Esta trayectoria consiste en una órbita elíptica con un periapsis tangente a la órbita de radio r_1 y un apoapsis tangente a la órbita de radio r_2 , como se puede observar en la figura 3. Si bien la mayoría de las transferencias se producen entre órbitas no coplanarias y no circulares, esta es una buena aproximación para muchos problemas de transferencia.

A partir del principio de conservación de la energía se deriva que el módulo del exceso de velocidad hiperbólica de la cosmonave necesario para la transferencia de Hohmann está dado por [7]

$$v_\infty = \sqrt{\frac{\mu_{Sol}}{r_1}} \left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1 \right), \quad (4)$$

siendo $\mu_{Sol} = GM_{Sol}$, G la constante de gravitación universal y M_{Sol} la masa del Sol. La energía de lanzamiento C_3 se calcula de forma inmediata como $C_3 = (v_\infty)^2$. Por otro lado, para calcular el tiempo de vuelo de la sonda en la transferencia Hohmann se utiliza la tercera ley de Kepler

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\mu_{Sol}}, \quad (5)$$

con T el periodo orbital y a el semieje mayor de la elipse de transferencia. El tiempo de vuelo t_v será la mitad de T . En la tabla 1 se recogen los valores de los factores C_3 y t_v para las transferencias de Hohmann a los planetas del sistema solar. Estas trayectorias presentan varios inconvenientes: tienen energías de lanzamiento elevadas y largos tiempos de vuelo. Para atajar estos problemas se puede utilizar una trayectoria que permita una o varias maniobras flyby (y que no tiene porqué coincidir con la de menor distancia al

Tabla 1: Características de las transferencias de Hohmann a los planetas del sistema solar.

Misión	Energía de lanzamiento C_3 (km^2/s^2)	Tiempo de vuelo t_v (años)
Tierra-Mercurio	56.7	0.3
Tierra-Venus	6.2	0.4
Tierra-Marte	8.7	0.7
Tierra-Júpiter	77.4	2.7
Tierra-Saturno	106.1	6.1
Tierra-Urano	127.7	16.0
Tierra-Neptuno	136.9	30.6
Tierra-Plutón	139.2	45.5

destino) ya que el incremento de energía cinética que se produce en cada una de ellas hace que tanto la energía de lanzamiento como el tiempo de vuelo se reduzcan considerablemente. Por ejemplo, la sonda New Horizons [8] se lanzó el 19 de enero de 2006 con una energía de lanzamiento de $166 \text{ km}^2/\text{s}^2$ [9], realizó un flyby en Júpiter y pasó cerca de Plutón el 14 de julio de 2015, con un tiempo de vuelo de 9.5 años aproximadamente. Comparando estos valores con los valores de la misión Tierra-Plutón de la tabla 1 se ve que la energía de lanzamiento es mayor para la New Horizons. Sin embargo, los valores de la tabla se han calculado en la aproximación de órbitas coplanares y circulares y la órbita de Plutón presenta un ángulo de inclinación orbital de 17.2° respecto a la órbita de la Tierra y una excentricidad de 0.244 [10], por lo que en este caso la aproximación no es válida. Un valor más realista de C_3 para la misión Tierra-Plutón que tiene en cuenta la inclinación orbital y la excentricidad de la órbita es $160\text{-}164 \text{ km}^2/\text{s}^2$. Considerando este último valor, la diferencia entre las energías de lanzamiento es mínima. En cambio, la diferencia entre los tiempos de vuelo es de 36 años aproximadamente. Así pues, queda de manifiesto la utilidad de la maniobra flyby ya que permite reducir los tiempos de vuelo con una energía de lanzamiento igual o menor que en las trayectorias de mínima energía.

Cabe destacar que no siempre es posible utilizar una trayectoria que permita realizar maniobras flyby para alcanzar el objetivo de la misión. Es necesario que los objetos astronómicos se encuentren en una determinada posición, constituyendo la principal limitación de la asistencia gravitatoria. Por ejemplo, las misiones Voyager [11] fueron posibles debido al alineamiento de Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno. No obstante, no es necesario un suceso tan poco común como este y es posible lanzar sondas en cuya trayectoria se realice alguna maniobra de asistencia gravitatoria cada pocos años. Otra de las limitaciones de la maniobra de asistencia gravitatoria es que su efectividad (es decir, el cambio en el módulo de la velocidad de la astronave) depende de la distancia de acercamiento entre la nave y el planeta. A menor distancia de acercamiento más efectiva será la maniobra y mayor el cambio en el módulo de la velocidad de la cosmonave. En planetas sin atmósfera esto no supone un problema. Sin embargo, en planetas con atmósfera la distancia de acercamiento tiene que ser mayor. Adelantando un poco lo que se verá posteriormente, cuando una nave penetra en la atmósfera de un planeta con velocidad \mathbf{v}_s , experimenta una fuerza de resistencia proporcional a la densidad de la atmósfera ρ , con la misma dirección pero sentido opuesto a \mathbf{v}_s , a consecuencia de las colisiones con las moléculas de los gases que la componen. El módulo de esta fuerza es mayor cuanto menor es la distancia de acercamiento, por lo que si el propósito es aumentar la velocidad de la nave se tiene que hacer un balance entre la energía cinética ganada en la maniobra flyby y la perdida por

la fuerza de resistencia para determinar la distancia de acercamiento más adecuada.

3. Anomalía flyby

Como ya se ha mencionado anteriormente, la maniobra flyby produce un cambio nulo en el módulo de la velocidad de la cosmonave referida al Sol y una variación nula en el módulo de la velocidad referida al planeta sobre el que se realiza la maniobra. En sentido riguroso siempre se produce un cambio en el módulo de esta última debido a la perturbación del Sol y de los planetas y satélites naturales circundantes. No obstante, teniendo en cuenta tanto estos efectos como el error en los aparatos de medición, se ha observado una variación en el módulo de la velocidad durante los flybys terrestres de origen desconocido, dando lugar a la anomalía flyby. La variación observada es positiva en algunos casos y negativa en otros y es del orden de los mm/s. La anomalía flyby solo se ha observado en maniobras de asistencia gravitatoria terrestres, ya que el hecho de que el campo gravitatorio de otros planetas no se conozca con precisión hace más complicada la evaluación de la variación de la velocidad de la nave durante un flyby en esos planetas. Por lo tanto, en el presente trabajo, siempre que se haga referencia a un flyby, y salvo que se diga lo contrario, será alrededor de la Tierra.

Este fenómeno se detectó por primera vez durante el primer flyby terrestre que ejecutó la sonda Galileo el 8 de diciembre de 1990. Desde entonces, esta modificación anómala de la velocidad se ha medido en los flybys terrestres de las sondas Galileo, NEAR, Cassini y Rosetta. Empero, no siempre se produce esta anomalía (o es despreciable dentro del umbral del error de la medición), como es en el caso de las sondas MESSENGER, Juno y el segundo y tercer flyby de Rosetta. En la tabla 2 se recogen los datos de algunas misiones espaciales durante un flyby terrestre.

3.1. Método de seguimiento de la sonda

Antes de seguir profundizando en la anomalía flyby, conviene estudiar el método de seguimiento utilizado para las sondas. Este método se conoce con el nombre de seguimiento Doppler bidireccional y consiste, de forma simplificada, en el siguiente proceso: un emisor situado en la Tierra emite una señal de frecuencia ν_0 que, vista desde la nave, posee la frecuencia

$$\nu' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(1 - \frac{v}{c}\right) \nu_0, \quad (6)$$

siendo v el módulo de la componente radial de velocidad de la astronave referida a la Tierra y c la velocidad de la luz en el vacío. Posteriormente, la sonda emite una señal de la misma frecuencia ν' de tal forma que en la Tierra se observa una señal de frecuencia

$$\nu'' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(1 - \frac{v}{c}\right) \nu'. \quad (7)$$

Comparando las frecuencias de la señal enviada ν_0 y recibida ν'' , se puede determinar el módulo de la velocidad radial de la cosmonave mediante la relación

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{\nu_0 - \nu''}{\nu_0} = 2 \frac{v/c}{1 + v/c} \approx 2 \frac{v}{c}. \quad (8)$$

Para determinar la distancia entre la Tierra y la astronave se puede añadir un pulso codificado a la señal que emite la Tierra y registrar el tiempo de transmisión hasta la sonda y su posterior retorno a la Tierra.

La frecuencia de la señal recibida ν'' y la distancia Tierra-sonda observada se suelen representar en sendas gráficas de residuos. Estas gráficas consisten en representar la diferencia entre los valores observados y los valores predichos de una magnitud. Para la frecuencia ν'' y la distancia Tierra-sonda los valores predichos se calculan a partir de modelos que tienen en cuenta tanto el campo gravitatorio en el conjunto del sistema solar como las fuerzas no gravitatorias debidas a la radiación solar, el viento solar, el arrastre debido al polvo interplanetario, la radiación térmica de la sonda, etc. Para una explicación más detallada conviene ver [15]. En la figura 4 se muestran las gráficas de residuos para la frecuencia (gráfica de residuos Doppler, figura 4a) y la distancia (gráfica de residuos de distancia, figura 4b) para la sonda Galileo. Estas gráficas se han obtenido ajustando el modelo utilizado a los datos observados antes de que la sonda Galileo pase por el perigeo de su trayectoria. En (a) se ve que después de que la sonda pase por su perigeo se produce una variación de aproximadamente 60 mHz entre las frecuencias observada y calculada, correspondiéndose con la variación de velocidad anómala de 3.92 mm/s de la tabla 2. De forma análoga, en (b) se observa una diferencia entre la posición real de la sonda y la posición calculada después de que la sonda pase por su perigeo, dando cuenta de la existencia de la anomalía flyby.

3.2. Fórmula empírica de Anderson

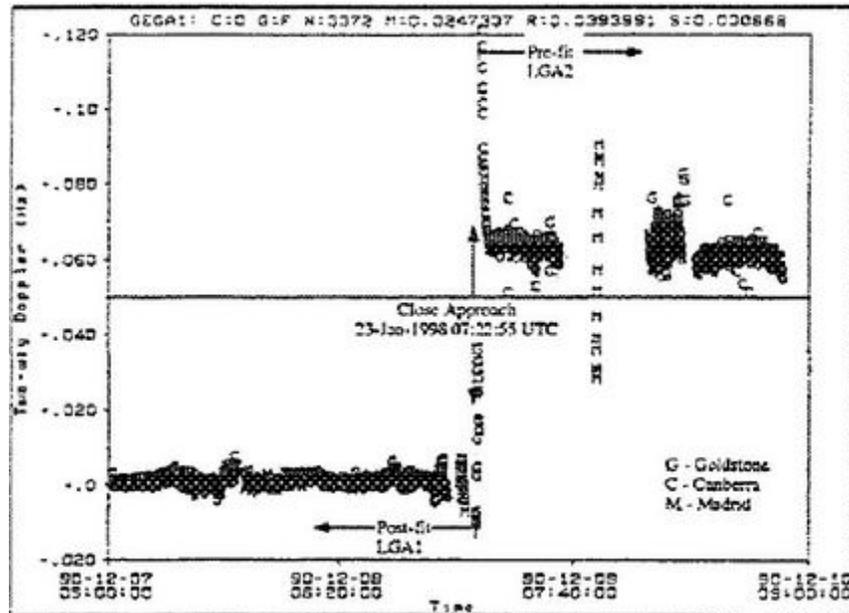
En el artículo publicado en 2008 por Anderson et al. [13] se presenta una fórmula que concuerda con las variaciones anómalas en la velocidad observadas para los flybys de la tabla 2. Esta fórmula se deduce de forma fenomenológica a partir del análisis de los datos de estos flybys. Su expresión es

$$\Delta v_\infty = v_\infty^{\text{in}} K (\cos \lambda_{\text{in}} - \cos \lambda_{\text{out}}), \quad (9)$$

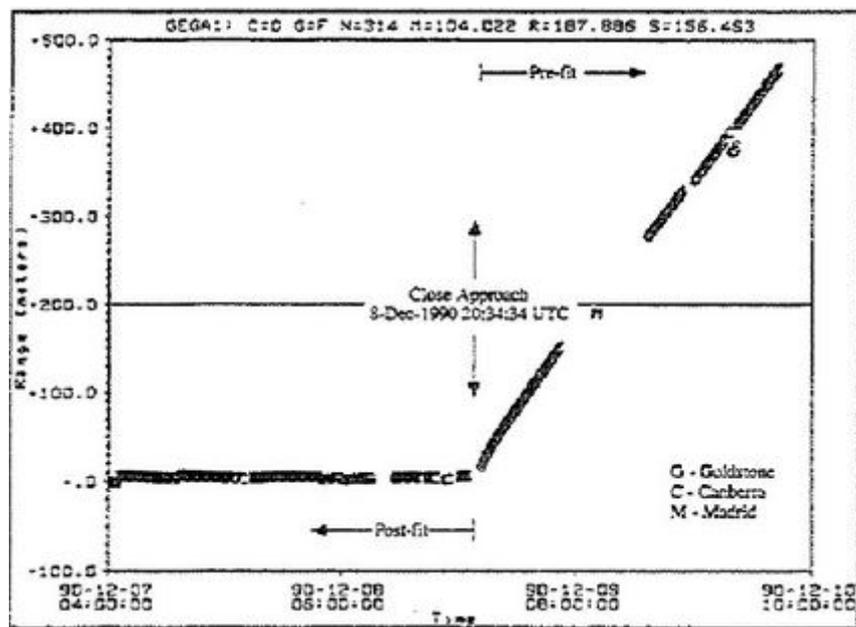
siendo Δv_∞ la diferencia entre el cambio observado en las velocidades asintóticas antes y después del flyby y el cambio calculado de acuerdo a un modelo de las fuerzas gravitatorias y no gravitatorias del sistema solar, λ_{in} y λ_{out} las latitudes geocéntricas de las velocidades asintóticas anterior y posterior al flyby respectivamente y v_∞^{in} el módulo de la velocidad asintótica inicial para la órbita osculante en el perigeo. La órbita osculante en un punto de la trayectoria real de una sonda se define como la órbita de Kepler que tendría la sonda alrededor del planeta sobre el que realiza el flyby en ausencia de perturbaciones, y cuya curvatura es igual que la de la trayectoria real en ese punto. La constante de proporcionalidad K está dada por la ecuación

$$K = \frac{2\omega_E R_E}{c} = 3.099 \times 10^{-6}, \quad (10)$$

con $\omega_E = 7.292115 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ [14] la velocidad angular de rotación de la Tierra alrededor de su eje y $R_E = 6371 \text{ km}$ el radio de la Tierra. Los valores que se obtienen para el cambio de velocidad anómalo Δv_∞ a partir de la ecuación (9) se encuentran tabulados en la última fila de la tabla 2. Estos valores se ajustan bastante bien al Δv_∞ observado para los flybys de la tabla. No obstante, los resultados que se obtienen aplicando la ecuación



(a)



(b)

Figura 4: Gráficas de residuos Doppler (a) y residuos de distancia (b) para la sonda Galileo en su primer flyby terrestre. Las gráficas de los otros flybys son similares y no se muestran.

Tabla 2: Datos de las asistencias gravitatorias terrestres de las misiones espaciales Galileo, NEAR, Cassini, Rosetta y MESSENGER, basada en [13]. Las misiones Galileo I y Galileo II hacen referencia al primer y segundo flyby terrestre respectivamente, Rosetta I al primero de varios flybys terrestres, H es la altura de la astronave en el perigeo respecto a la superficie terrestre, I denota la inclinación del plano de la trayectoria de la sonda respecto al plano ecuatorial terrestre, v_p el módulo de la velocidad de la sonda en el perigeo, σ_{v_∞} el error estimado en Δv_∞ y la última fila se corresponde con la Δv_∞ calculada a partir de la ecuación (9).

Flyby	Galileo I	Galileo II ^a	NEAR	Cassini	Rosetta I	MESSENGER
Fecha	08/12/90	08/12/92	23/01/98	18/08/99	04/03/05	02/08/05
Masa (kg)	2497	2497	730	4612	2895	1086
H (km)	960	303	539	1175	1956	2347
I (°)	142.9	138.7	108.0	25.4	144.9	133.1
λ_{in} (°)	-12.52	-34.26	-20.76	-12.92	-2.81	31.44
λ_{out} (°)	-34.15	-4.87	-71.96	-4.99	-34.29	-31.92
v_p (km/s)	13.740	14.080	12.739	19.026	10.517	10.389
v_∞^{in} (km/s)	8.949	8.877	6.851	16.010	3.863	4.056
Δv_∞ (mm/s)	3.92	-4.6	13.46	-2	1.80	0.02
σ_{v_∞} (mm/s)	0.30	1.0	0.01	1	0.03	0.01
Ec. 9 (mm/s)	4.12	-4.67	13.28	-1.07	2.07	0.06

^aEn su segundo flyby terrestre la sonda espacial Galileo alcanzó una altura de 300 km respecto a la superficie terrestre en el perigeo, penetrando en la termosfera y disminuyendo su velocidad como consecuencia de la resistencia atmosférica. En los datos que se proporcionan en esta tabla se ha tenido en cuenta este hecho.

(9) a otros flybys como el Rosetta II, Rosetta III y Juno (que no se encuentran tabulados) no concuerdan con los Δv_∞ medidos. Además, el artículo [13] tampoco proporciona una explicación acerca del origen de esta anomalía más allá de sugerir un efecto Lense-Thirring aumentado como posible causa. El efecto Lense-Thirring consiste en el arrastre de la masa y la energía electromagnética por el campo gravitatorio de un objeto celeste en rotación. En la próxima sección se verá que este efecto es sumamente pequeño (de ahí que Anderson et al. sugieran un efecto Lense-Thirring aumentado, que hasta ahora no se ha detectado) y no puede dar cuenta de la anomalía flyby.

Por otro lado, aunque la fórmula (9) no reproduce adecuadamente los cambios de velocidad de todos los flybys, se pueden inferir las características que debería poseer cualquier teoría que explique la anomalía flyby: (i) el cambio de velocidad debe ser proporcional al cociente v_{eq}/c , con $v_{eq} = \omega_E R_E$; (ii) la fuerza que actúa sobre la sonda debe modificar la componente λ de su velocidad; (iii) el cambio de velocidad debe ser proporcional a v_∞^{in} . En la próxima sección se hará un análisis pormenorizado de los efectos clásicos y relativistas que podrían estar detrás de esta anomalía.

4. Estimación de los efectos

En la búsqueda de una explicación para esta anomalía cabe pensar, en primer lugar, en las fuerzas perturbadoras que actúan en la astronave producidas a causa de algunos

efectos clásicos y relativistas. Teniendo en cuenta el aumento de velocidad de las sondas de la tabla 2 durante el tiempo de vuelo cerca de la Tierra la aceleración anómala estimada es del orden de 10^{-4} m/s². Este valor se utilizará para compararlo con la aceleración producida por las posibles fuerzas perturbadoras. El análisis que se llevará a cabo está dividido en dos partes, correspondientes a los efectos clásicos y a los efectos relativistas, y está basado en los artículos de C. Lämmerzahl, O. Preuss y H. Dittus [15], P. G. Antreasian y J. R. Guinn [16] y L. Iorio [17].

4.1. Efectos clásicos

En esta primera parte se analizan los efectos de la atmósfera terrestre, las mareas oceánicas, las mareas sólidas terrestres, la carga eléctrica de la nave, el momento magnético, el albedo terrestre y el viento solar, en una estimación de primer orden, y se comparan con la aceleración anómala estimada experimentada por algunas sondas en su flyby terrestre.

- **Atmósfera.** Una astronave de masa m_s y área efectiva A_s (área de la proyección de la cosmonave en un plano perpendicular a la dirección del movimiento) moviéndose con velocidad \mathbf{v}_s en un medio de densidad ρ experimenta una fuerza de resistencia dada por

$$F_D = \frac{1}{2} \rho v_s^2 C_D A_s, \quad (11)$$

siendo C_D el coeficiente de arrastre, un factor de proporcionalidad que depende de la geometría de la cosmonave y del número de Reynolds (número adimensional relacionado con la viscosidad del medio). En aras de obtener una estimación de esta fuerza se sustituyen algunos valores razonables como $m_s = 1000$ kg y $A_s = 2$ m². El coeficiente de arrastre se puede calcular de forma aproximada tratando la sonda como un conjunto de varias partes más sencillas y sumando la contribución de cada una de ellas. Estos coeficientes suelen estar tabulados para formas geométricas simples. Suponiendo que la sonda se compone de dos partes, una antena parabólica ($C_{D1} \approx 1.2$) y un cilindro ($C_{D2} \approx 0.8$) [18], se obtiene que $C_D \approx 2$. Además, teniendo en cuenta la altura H de las sondas en el perigeo (ver tabla 2) se reemplaza $\rho \approx 10^{-14}$ kg/m³, la densidad atmosférica a 1000 km de altura aproximadamente, y $v_s \approx 10$ km/s, el módulo de la velocidad de la sonda en el perigeo. El resultado alcanzado es una aceleración en sentido opuesto al movimiento de la nave del orden de 10^{-8} m/s². El orden de la aceleración obtenida difiere en cuatro órdenes de magnitud con el de la aceleración anómala. Además, cabe destacar el hecho de que esta aceleración siempre se produce en sentido opuesto al movimiento de la sonda. Por lo tanto, la atmósfera terrestre no puede ser la causante de la anomalía flyby.

- **Mareas oceánicas.** Las mareas oceánicas producen un cambio en la superficie terrestre del orden de $\delta r \approx 10$ m. En el desarrollo multipolar del potencial gravitatorio terrestre el término cuadrupolar evaluado en la superficie terrestre se puede estimar como

$$V_2 = -\frac{GM_E}{R_E} \frac{2\delta r}{R_E}, \quad (12)$$

siendo $M_E = 5.97 \times 10^{24}$ kg la masa de la Tierra. Sustituyendo estos datos se obtiene que el término $\epsilon = 2\delta r/R_E$ es del orden de 10^{-6} . Por lo tanto, considerando que

la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre es del orden de 10 m/s^2 , la aceleración debida al término cuadrupolar será del orden de 10^{-5} m/s^2 teniendo en cuenta la peor situación posible. El orden de magnitud de la aceleración obtenida no se corresponde con el de la aceleración anómala, pudiendo descartar el efecto de las mareas oceánicas como responsable de la anomalía flyby.

- **Mareas sólidas terrestres.** Las mareas sólidas terrestres consisten en la deformación de la Tierra debido, principalmente, a (i) la rotación de la Tierra en el seno de los campos gravitatorios del Sol y de la Luna y a que (ii) la Tierra no es perfectamente rígida. No obstante, la amplitud de estas mareas es del orden de $\delta r \approx 0.1 \text{ m}$, por lo que la aceleración correspondiente al término cuadrupolar será del orden de 10^{-7} m/s^2 . Por esta razón también se puede descartar el efecto de las mareas sólidas terrestres como el causante de la anomalía flyby.
- **Carga eléctrica de la sonda.** Las sondas espaciales son susceptibles de ser cargadas eléctricamente debido a la acción de los rayos cósmicos y las fulguraciones solares. En la referencia [19] se estudia el proceso de carga de una nave y tomando algunos valores razonables para las dimensiones de la sonda se estima que, en el peor escenario, la carga puede ser de 10^{-5} C . Para una astronave con una masa $m_s = 1000 \text{ kg}$ y carga $q_s = 10^{-5} \text{ C}$ moviéndose con velocidad $v_s = 30 \text{ km/s}$ en el seno del campo magnético terrestre, estimado en 0.2 G , la fuerza de Lorentz es del orden de 10^{-6} N y la aceleración es del orden de 10^{-9} m/s^2 . A la vista de estos resultados queda claro que la carga eléctrica de la sonda no es la responsable de la anomalía flyby.
- **Momento magnético.** Una cosmonave posee un momento dipolar magnético \mathbf{m} no nulo que se debe, principalmente, a la contribución de (i) el momento dipolar constante de la estructura de la astronave y (ii) el momento dipolar variable en el tiempo de los bucles de corriente. De este modo, una sonda en el seno de un campo magnético \mathbf{B} experimentará una fuerza dada por $\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$. A partir de la monografía de S. Schalkowsky y M. Harris [20] se estima que $|\mathbf{m}| = 2 \text{ A} \cdot \text{m}^2$ para una sonda de masa $m_s = 1000 \text{ kg}$. Por otro lado, utilizando el modelo dipolar del campo magnético terrestre [21] se obtiene que $|\Delta\mathbf{B}/\Delta x| \approx 10^{-7} \text{ G/m}$. Sustituyendo estos valores se llega a una aceleración del orden de 10^{-14} m/s^2 , que claramente descarta el efecto del momento magnético como causa de la anomalía flyby.
- **Albedo terrestre.** El albedo terrestre se define como el cociente entre la radiación que refleja la Tierra y la radiación solar que incide sobre ella, teniendo un valor promedio de 0.3. Esta radiación reflejada ejerce una presión sobre la cosmonave. Asumiendo que la astronave refleja perfectamente la radiación, que tiene una área efectiva de 2 m^2 y que la incidencia es perpendicular a esta área efectiva, la fórmula $P = 2I/c$ (siendo $I = 420 \text{ W/m}^2$ la intensidad de la radiación solar reflejada por la Tierra) arroja una fuerza del orden de 10^{-6} N . Para una sonda de masa $m_s = 1000 \text{ kg}$, la aceleración es del orden $a_{\text{albedo}} \approx 10^{-9} \text{ m/s}^2$, descartando este efecto como causa de la anomalía flyby.
- **Viento solar.** El viento solar consiste en un chorro de partículas cargadas constituido por electrones, protones y partículas α principalmente, que se expulsa de la atmósfera solar con velocidad \mathbf{v} y densidad ρ . Este chorro de partículas ejerce una presión dinámica sobre la nave que viene dada por la fórmula $P = \frac{1}{2}\rho v^2$. Asumiendo que $\rho = 1.27 \times 10^{-20} \text{ kg/m}^3$, $v = 450 \text{ km/s}$ (los valores de ρ y v se han obtenido a

partir de [22]), $m_s = 1000$ kg y $A_s = 2$ m², se obtiene una aceleración $a_{SW} \approx 10^{-12}$ m/s² suponiendo que el viento sea perpendicular al área efectiva A_s . Por lo tanto, el viento solar tampoco puede ser el autor de la anomalía flyby.

En el artículo de P. G. Antreasian y J. R. Guinn [16] también se consideran los efectos de la Luna incluyendo su elipticidad, el Sol, la influencia de otros planetas del sistema solar y la elipticidad de la Tierra. En la tabla 3 se recogen las aceleraciones producidas por estos efectos, calculadas mediante métodos numéricos, para los flybys Galileo I y NEAR. Salvo la aceleración producida por la elipticidad de la Tierra, todas las demás son varios órdenes de magnitud menores que la aceleración anómala y no pueden dar cuenta de la anomalía flyby. Por otro lado, aunque la aceleración producida por la elipticidad de la Tierra es dos órdenes de magnitud mayor que la aceleración anómala, el error cometido en el cálculo de la misma es del orden de 10^{-7} m/s² [16], de modo que tampoco puede ser la responsable de la anomalía flyby. Para ver esto supóngase que el error cometido en el cálculo es del orden de 10^{-3} m/s². En este caso la anomalía flyby podría estar contenida dentro del error en el cálculo, ya que es del orden de 10^{-4} m/s². Sin embargo, como el error cometido en el cálculo es varios órdenes de magnitud menor que la aceleración de la anomalía flyby, también se puede descartar el efecto de la elipticidad de la Tierra como la causa de la anomalía flyby.

En base al análisis realizado se puede determinar que ninguno de los efectos clásicos considerados da cuenta de la aceleración anómala experimentada en los flybys de la tabla 2. Cabe pensar en una acumulación de las aceleraciones originadas por estos efectos. No obstante, los efectos considerados se han estimado mediante modelos muy naïfs y rara vez se van a corresponder con la realidad. Un cálculo más preciso de estos efectos utilizando modelos más sofisticados muestra que estas aceleraciones son menores de lo estimado. En la tabla 3 se encuentran tabuladas estas aceleraciones para los efectos de la atmósfera terrestre, las mareas oceánicas, el albedo terrestre y el viento solar. Por lo tanto, la acumulación de aceleraciones tampoco puede dar cuenta de la aceleración anómala.

4.2. Efectos relativistas

Además de los efectos clásicos también se deben tener en cuenta las perturbaciones producidas por los efectos de la relatividad general. En esta sección se muestra el impacto de las fuerzas gravitomagnética y gravitoeléctrica en el movimiento de la sonda, cuya estimación se realiza utilizando métodos numéricos, así como el efecto del acoplamiento spin-rotación.

- **Gravitoelectromagnetismo.** Las ecuaciones de campo de Einstein, que describen la curvatura del espacio-tiempo como resultado de la presencia de materia y energía, se escriben como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (13)$$

con $R_{\mu\nu}$ el tensor de curvatura de Ricci, $g_{\mu\nu}$ la métrica, R el escalar de curvatura de Ricci y $T_{\mu\nu}$ el tensor energía-momento. En la aproximación de campo débil la métrica $g_{\mu\nu}$ se puede tratar como una perturbación pequeña de la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (14)$$

Tabla 3: Magnitud de las aceleraciones (m/s^2) producidas por los efectos de la Luna y su elipticidad, el Sol, la influencia de otros planetas del sistema solar, la elipticidad de la Tierra, la atmósfera terrestre, las mareas oceánicas, el albedo terrestre y el viento solar calculadas mediante métodos numéricos para los flybys Galileo I y NEAR, del texto [16].

Aceleración	Galileo I	NEAR
Luna	1.5×10^{-5}	1.3×10^{-5}
Elipticidad Luna	4.5×10^{-13}	3.0×10^{-13}
Elipticidad Tierra	8.1×10^{-3}	1.3×10^{-2}
Sol	1.2×10^{-5}	7.7×10^{-6}
Mercurio	2.1×10^{-12}	7.0×10^{-13}
Venus	5.7×10^{-12}	1.0×10^{-9}
Marte	2.0×10^{-11}	1.6×10^{-13}
Júpiter	7.8×10^{-11}	2.6×10^{-11}
Saturno	2.3×10^{-12}	1.8×10^{-12}
Otros planetas	$< 1.0 \times 10^{-13}$	$< 1.0 \times 10^{-13}$
Atmósfera	3.9×10^{-8}	2.5×10^{-7}
Mareas oceánicas	1.4×10^{-7}	1.9×10^{-7}
Albedo terrestre	1.9×10^{-9}	2.0×10^{-7}
Viento solar	5.9×10^{-8}	9.2×10^{-8}

donde $h_{\mu\nu}$ es la perturbación, que depende de la condición gauge. Resulta útil definir la cantidad $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$, con $h = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$. Imponiendo la condición gauge de Lorentz $\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$ y cogiendo solo los términos lineales en $h_{\mu\nu}$ las ecuaciones de campo de Einstein (13) se reescriben como

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (15)$$

siendo $\square \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2$, el operador D'Alembertiano. La solución de esta ecuación es (función de Green aplicada a $T_{\mu\nu}$) [24]

$$\bar{h}_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) = \frac{4G}{c^4} \int \frac{T_{\mu\nu}(\mathbf{x}', ct - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' \quad (16)$$

con el tensor energía-momento evaluado en el tiempo retardado $ct - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$. Suponiendo que la fuente de este campo gravitatorio débil es un cuerpo astronómico en rotación que se mueve con velocidad \mathbf{v} ($v \ll c$, régimen no relativista) las componentes del tensor energía-momento son $T^{00} = \rho_g c^2$, $T^{0i} = c j_g^i$ y $|T^{ij}| \ll |T^{0i}| \ll |T^{00}|$, con ρ_g la densidad volumétrica de masa del cuerpo astronómico y $\mathbf{j}_g = \rho_g \mathbf{v}$ el vector densidad de corriente de masa. En este punto es conveniente definir los potenciales gravitoelectromagnéticos $\Phi_g(\mathbf{x}, t)$ (potencial gravitoelectrónico) y $\mathbf{A}_g(\mathbf{x}, t)$ (potencial vector gravitomagnético) como

$$\bar{h}_{00}(\mathbf{x}, t) = -\frac{4\Phi_g(\mathbf{x}, t)}{c^2}, \quad \bar{h}_{0i} = \frac{2A_{gi}(\mathbf{x}, t)}{c^2}, \quad (17)$$

donde

$$\Phi_g(\mathbf{x}, t) = -G \int \frac{\rho_g(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}', \quad \mathbf{A}_g(\mathbf{x}, t) = -\frac{2G}{c} \int \frac{\mathbf{j}_g(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}'. \quad (18)$$

Los términos \bar{h}_{ij} restantes tienen una dependencia en c^{-4} , de modo que se desprecian en este desarrollo. Por lo tanto, la condición gauge de Lorentz se puede reescribir en términos de los potenciales Φ_g y \mathbf{A}_g como

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_g}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \mathbf{A}_g \right) = 0. \quad (19)$$

Comparando esta ecuación con la condición de Lorentz del electromagnetismo

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (20)$$

se puede establecer la analogía $\Phi \rightarrow \Phi_g$ y $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}_g/2$ entre el electromagnetismo y la gravitación en la aproximación de campo débil. Siguiendo con la analogía se definen los campos gravitoelectrónico \mathbf{E}_g y gravitomagnético \mathbf{B}_g de la forma

$$\mathbf{E}_g = -\nabla \Phi_g - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{A}_g \right), \quad \mathbf{B}_g = \nabla \times \mathbf{A}_g. \quad (21)$$

Estos campos inducen las fuerzas gravitoelectrónica y gravitomagnética respectivamente en una partícula de prueba (por ejemplo, una cosmonave) cercana, modificando la trayectoria de la misma.

- **Fuerza gravitomagnética.** La fuerza gravitomagnética que experimenta una partícula test en las inmediaciones de un cuerpo celeste se produce como consecuencia de su momento angular intrínseco, que se denotará por \mathbf{S} . Esta fuerza desvía la trayectoria de la astronave en función de la orientación mutua entre \mathbf{S} y el momento angular orbital \mathbf{L} de la nave y es la causa del efecto Lense-Thirring explicado anteriormente. Habida cuenta de la validez de la aproximación de campo débil, el campo gravitomagnético lejos de un cuerpo celeste en rotación se puede escribir como un campo dipolar

$$\mathbf{B}_g = -\frac{G}{cr^3} [\mathbf{S} - \frac{3}{r^2} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}], \quad (22)$$

donde \mathbf{r} es el vector dirigido según la línea que une los centros de masa del objeto astronómico y la sonda. Una partícula test moviéndose con velocidad \mathbf{v} en el seno del campo gravitomagnético experimentará una aceleración análoga a la producida por la fuerza de Lorentz del electromagnetismo [24]

$$\mathbf{a}_{GM} = -\frac{2}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_g. \quad (23)$$

La magnitud de esta aceleración puede ser tanto positiva como negativa en función de la orientación mutua entre los vectores \mathbf{v} y \mathbf{B}_g . Para cuerpos astronómicos ordinarios como la Tierra o el Sol, el módulo de \mathbf{a}_{GM} es varios órdenes de magnitud menor que la aceleración producida por el término monopolar del desarrollo multipolar del potencial gravitatorio Newtoniano, $a_N = GM/r^2$. En aras de estimar la magnitud de la aceleración \mathbf{a}_{GM} se utilizan los datos de la posición y velocidad [17] así como la altura H (ver tabla 2) de la sonda NEAR [25] cerca del perigeo de su órbita hiperbólica. Sustituyendo en la ecuación (23) se obtiene que $a_{GM} = 3.8 \times 10^{-10} \text{ m/s}^2$, descartando la fuerza gravitomagnética como la responsable de la anomalía flyby.

- **Fuerza gravitoelectrónica.** La fuerza gravitoelectrónica que experimenta una partícula test en las inmediaciones de un objeto astronómico se produce como consecuencia de la masa del mismo. Esta fuerza, a diferencia de la gravitomagnética, siempre es atractiva y no depende de la orientación $\mathbf{L}\text{-}\mathbf{S}$. La aceleración inducida en la cosmonave por el campo gravitoelectrónico producido por un objeto astronómico de masa M en la aproximación post-Newtoniana de orden $\mathcal{O}(c^{-2})$ [17] es

$$\mathbf{a}_{GE} = \frac{GM}{c^2} \left[\frac{4GM}{r^4} \mathbf{r} - \frac{v^2}{r^3} \mathbf{r} + \frac{4(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})}{r^3} \mathbf{v} \right], \quad (24)$$

siendo \mathbf{r} el vector dirigido según la línea que une los centros de masa del cuerpo celeste y la sonda y \mathbf{v} la velocidad de la sonda. Para obtener una estimación del módulo de la aceleración \mathbf{a}_{GE} se utilizan nuevamente los datos de la sonda NEAR cerca del perigeo. Sustituyendo en la ecuación (24) se obtiene que $a_{GE} = 6.35 \times 10^{-9} \text{ m/s}^2$, concluyendo que la fuerza gravitoelectrónica tampoco da cuenta de la anomalía flyby.

- **Acoplamiento spin-rotación.** Entre dos sistemas de referencia no inerciales como, por ejemplo, la Tierra y una astronave, se produce un acoplamiento de la helicidad de las ondas (que se utilizan para determinar la velocidad de la cosmonave, como se ha explicado anteriormente) con la rotación de estos sistemas [23] dado por la fórmula

$$\omega' = \gamma \left[(\omega - \hat{\mathbf{H}} \cdot \boldsymbol{\Omega}) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} \right], \quad (25)$$

siendo ω y ω' las frecuencias angulares de las señales emitida por un sistema de referencia y recibida por el otro respectivamente, $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, $\hat{\mathbf{H}} = \pm c\mathbf{k}/\omega$ el vector helicidad unitario de los fotones, \mathbf{v} la velocidad relativa entre ambos sistemas de referencia y $\boldsymbol{\Omega}$ la velocidad angular de rotación del sistema de referencia que recibe la señal. Esto hace que se produzca un cambio aparente en la velocidad de la sonda respecto a la Tierra de magnitud $\Delta v = c\boldsymbol{\Omega}/\omega$ que realmente no existe. No obstante, este efecto solo se manifestaría en una gráfica de residuos Doppler y no en una gráfica de residuos de distancia, que es independiente del acoplamiento helicidad-rotación, pudiendo descartar este efecto como responsable de la anomalía flyby.

En esta sección se ha visto que los efectos relativistas del gravitoelectromagnetismo y del acoplamiento spin-rotación tampoco aclaran el origen de la anomalía flyby. Algunas de las explicaciones que se han dado para este cambio anómalo en la velocidad son las siguientes: (i) la velocidad de la luz c es anisótropa y depende de la densidad de energía total localmente, de modo que el origen de la anomalía flyby es consecuencia de la suposición de que c es invariante en el método de seguimiento utilizado; (ii) versión causal de la teoría Newtoniana debido a un retraso temporal del campo gravitatorio; (iii) efectos de una corriente de torsión topológica; (iv) modificación de la inercia. En las próximas secciones se profundizará en estas teorías, discutiendo la validez de las aproximaciones realizadas y los resultados que se obtienen.

5. Efectos de una corriente de torsión topológica

En la sección 2.1 se ha visto que la maniobra flyby consiste esencialmente en un problema de tres cuerpos entre la cosmonave, el Sol y la Tierra. La cosmonave (sistema) y el Sol y la Tierra (ambiente) se intercambian energía, por lo que el sistema no está en equilibrio termodinámico con el ambiente. En el artículo de M. J. Pinheiro [26] se presenta una explicación teórica del proceso físico que subyace a los cambios de velocidad anómalos basada en el concepto de la maximización de la entropía a un sistema físico fuera del equilibrio. Para derivar esta explicación se considera un sistema compuesto por un conjunto de N partículas puntuales de masa $m^{(\alpha)}$, coordenadas $x_i^{(\alpha)}$ y componentes de velocidad $v_i^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2, \dots, N; i = 1, 2, 3$) en un sistema de referencia inercial. Los subíndices latinos hacen referencia a las componentes cartesianas y los superíndices griegos diferencian las masas. La energía interna $U^{(\alpha)}$ de cada partícula puntual moviéndose con momento lineal $\mathbf{p}^{(\alpha)}$ en un sistema de referencia inercial es [27]

$$U^{(\alpha)} = E^{(\alpha)} - \frac{(\mathbf{p}^{(\alpha)})^2}{2m^{(\alpha)}} - \frac{(\mathbf{L}^{(\alpha)})^2}{2I^{(\alpha)}} - q^{(\alpha)}V^{(\alpha)} + q^{(\alpha)} (\mathbf{A}^{(\alpha)} \cdot \mathbf{v}^{(\alpha)}) ,$$

con $q^{(\alpha)}$ la carga eléctrica, $E^{(\alpha)}$ la energía total, $I^{(\alpha)}$ el momento de inercia, $\mathbf{L}^{(\alpha)}$ el momento angular, todos ellos de la partícula α , y $V^{(\alpha)}$ y $\mathbf{A}^{(\alpha)}$ el potencial electrostático y el potencial vector magnético a los que está sometida la partícula α . La entropía de cada partícula puntual es una función de la energía interna, $S^{(\alpha)}(U^{(\alpha)})$. Sumando la contribución de cada una de ellas se obtiene la entropía total del sistema,

$$S = \sum_{\alpha=1}^N S^{(\alpha)} \left(E^{(\alpha)} - \frac{(\mathbf{p}^{(\alpha)})^2}{2m^{(\alpha)}} - \frac{(\mathbf{L}^{(\alpha)})^2}{2I^{(\alpha)}} - q^{(\alpha)}V^{(\alpha)} + q^{(\alpha)} (\mathbf{A}^{(\alpha)} \cdot \mathbf{v}^{(\alpha)}) \right) . \quad (26)$$

Para un sistema totalmente aislado la energía total E , el momento lineal total \mathbf{P} y el momento angular total \mathbf{L} son absolutamente conservadas, de modo que

$$E = \sum_{\alpha=1}^N E^{(\alpha)} , \quad (27)$$

$$\mathbf{P} = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{p}^{(\alpha)} , \quad (28)$$

y

$$\mathbf{L} = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{L}^{(\alpha)} = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{r}^{(\alpha)} \times \mathbf{p}^{(\alpha)} + \mathbf{J}^{(\alpha)} , \quad (29)$$

donde el momento angular de cada partícula puntual se ha escrito como la suma de dos contribuciones, el momento angular orbital $\mathbf{r}^{(\alpha)} \times \mathbf{p}^{(\alpha)}$, con $\mathbf{r}^{(\alpha)}$ el vector de posición de la partícula α respecto a un sistema de referencia inercial \mathcal{R} , y el momento angular intrínseco $\mathbf{J}^{(\alpha)}$ (ver figura 5). De acuerdo al principio de entropía máxima se buscan los extremos de la ecuación (26) sujeta a las ligaduras (27), (28) y (29). Para ello se utiliza el método de los multiplicadores de Lagrange, que consiste en construir la función

$$\bar{S} = \sum_{\alpha=1}^N [S^{(\alpha)}(U^{(\alpha)}) + \mathbf{a} \cdot \mathbf{p}^{(\alpha)} + \mathbf{b} \cdot (\mathbf{r}^{(\alpha)} \times \mathbf{p}^{(\alpha)} + \mathbf{J}^{(\alpha)})] , \quad (30)$$

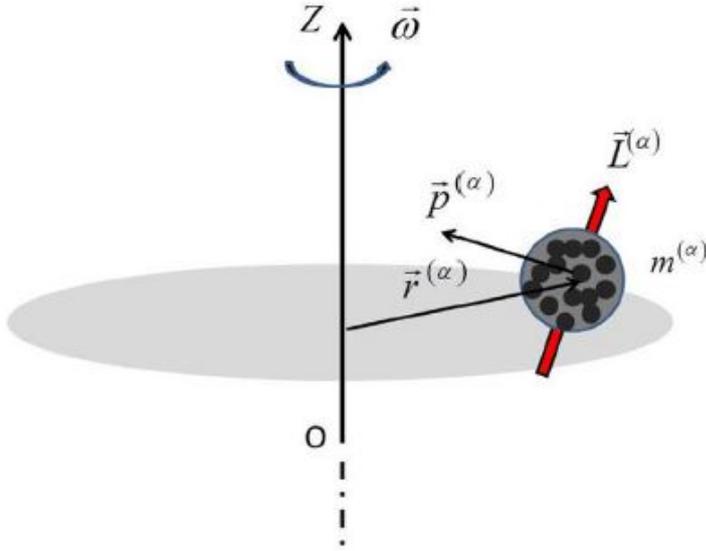


Figura 5: Conjunto de partículas de masa $m^{(\alpha)}$ rotando alrededor del eje OZ con velocidad angular ω , del texto [27].

con \mathbf{a} y \mathbf{b} los multiplicadores de Lagrange (escritos como vectores), y calcular sus extremos. Las ecuaciones que se obtienen son

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial \mathbf{p}^{(\alpha)}} \geq 0, \quad (31)$$

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial \mathbf{r}^{(\alpha)}} = -\frac{1}{T^{(\alpha)}} \nabla_{\mathbf{r}^{(\alpha)}} U^{(\alpha)} - \frac{1}{T^{(\alpha)}} m^{(\alpha)} \frac{\partial \mathbf{v}^{(\alpha)}}{\partial t} \geq 0, \quad (32)$$

donde $1/T^{(\alpha)} \equiv \partial \bar{S} / \partial U^{(\alpha)}$ y $\nabla_{\mathbf{r}^{(\alpha)}} \equiv \frac{\partial}{\partial r_1^{(\alpha)}} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial r_2^{(\alpha)}} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial r_3^{(\alpha)}} \hat{\mathbf{k}}$, con $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$ los vectores unitarios asociados a las direcciones de los ejes cartesianos. La igualdad de estas ecuaciones se da cuando el sistema está en equilibrio termodinámico con el ambiente y la desigualdad cuando está fuera del equilibrio. Manipulando las ecuaciones (31) y (32) para un sistema con carga eléctrica nula en presencia de un campo gravitatorio y pasando de un sistema discreto a uno continuo ($\sum \rightarrow \int$) se deriva la ecuación general de la dinámica para sistemas gravitatorios [27]

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla \phi + m[\mathbf{A} \times \boldsymbol{\omega}], \quad (33)$$

siendo m la masa de la sonda, \mathbf{v} la velocidad de la cosmonave relativa a la Tierra, ϕ el potencial gravitatorio terrestre, \mathbf{A} el potencial vector gravitatorio terrestre y $\boldsymbol{\omega}$ el vector velocidad angular de rotación de la Tierra alrededor de su eje. Cabe destacar que la ecuación (33) también se puede aplicar a flybys alrededor de otros planetas. El primer término de la derecha es el gradiente del término monopolar de la expansión multipolar del potencial gravitatorio terrestre $\phi = -GmM_E/r^2$, siendo r la distancia relativa entre la Tierra y la sonda, mientras que el segundo término de la derecha representa la corriente de torsión topológica (en adelante TTC, por sus siglas en inglés), expresada como el producto vectorial de \mathbf{A} y $\boldsymbol{\omega}$. Teniendo en cuenta el retardo del campo gravitatorio se considera el potencial vector gravitatorio en la forma (Liénard-Wiechert)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{G}{c^2} \frac{M_E \mathbf{v}}{r(1 - \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}/c)}, \quad (34)$$

siendo \mathbf{r} el vector posición de la sonda respecto a la Tierra y $\hat{\mathbf{n}}$ el vector unitario \mathbf{r}/r . La ecuación general de la dinámica muestra que la TTC solo aparece en sistemas fuera del

equilibrio como resultado de la rivalidad entre la energía mecánica mínima y la entropía máxima del sistema (y no solo de la imposición del criterio de mínima energía). Para simplificar el problema matemático se asume la geometría de la figura 6. En esta figura aparecen dos sistemas de referencia, el $\{\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{J}}, \hat{\mathbf{K}}\}$ y el $\{\mathbf{x}_o, \mathbf{y}_o, \mathbf{z}_o\}$. El primero de ellos es el sistema de referencia ecuatorial terrestre y está definido de tal forma que $\hat{\mathbf{K}}$ coincide con la dirección y sentido de $\boldsymbol{\omega}$ e $\hat{\mathbf{I}}$ y $\hat{\mathbf{J}}$ son dos vectores cualesquiera perpendiculares entre ellos y con $\hat{\mathbf{K}}$, de modo que se encuentran en el plano ecuatorial. El sistema de referencia $\{\mathbf{x}_o, \mathbf{y}_o, \mathbf{z}_o\}$ se corresponde con una rotación de ángulo I del sistema de referencia ecuatorial terrestre alrededor del eje $\hat{\mathbf{J}}$, siendo I el ángulo de inclinación del plano que contiene la trayectoria de la cosmonave con el plano ecuatorial terrestre. De esta forma \mathbf{z}_o es perpendicular al plano que contiene la trayectoria de la astronave y \mathbf{x}_o e $\mathbf{y}_o \equiv \hat{\mathbf{J}}$ están contenidos en el mismo. El término de la TTC se escribe como ($\boldsymbol{\omega} = \omega_E \hat{\mathbf{K}}$)

$$\mathbf{A} \times \boldsymbol{\omega} = \omega_E \sin I (A_{x_o} - A_{z_o}) \mathbf{y}_o, \quad (35)$$

donde A_{x_o} y A_{z_o} son las componentes de \mathbf{A} en el sistema de referencia $\{\mathbf{x}_o, \mathbf{y}_o, \mathbf{z}_o\}$. Por otro lado, desarrollando en serie de Taylor el potencial vector gravitatorio terrestre hasta primer orden se obtiene que

$$\mathbf{A} \approx \frac{GM_E}{c^2} \frac{\mathbf{v}}{r} + \frac{GM_E}{c^2} \frac{\mathbf{v}}{r} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{c} \right). \quad (36)$$

Teniendo en cuenta que $\hat{\mathbf{n}} \equiv \mathbf{u}_r$ (vector unitario en la dirección radial de la Tierra), el producto escalar $\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} = v_r$ es la componente radial de la velocidad de la sonda respecto a la Tierra. Por lo tanto, sustituyendo en la ecuación (36) se tiene que

$$\mathbf{A} \approx \frac{GM_E}{c^2 r} \left(v_{x_o} + \frac{v_{x_o} v_r}{c} \right) \mathbf{x}_o + \frac{GM_E}{c^2 r} \left(v_{y_o} + \frac{v_{y_o} v_r}{c} \right) \mathbf{y}_o. \quad (37)$$

Reemplazando las ecuaciones (35) y (37) en (33) y haciendo una transformación del sistema de referencia $\{\mathbf{x}_o, \mathbf{y}_o, \mathbf{z}_o\}$ al sistema de coordenadas de Hill $\{\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\varphi, \mathbf{z}_o\}$ [28] se tiene que el conjunto de ecuaciones diferenciales (teniendo en cuenta que, como $\mathbf{v} \perp \mathbf{z}_o$, $A_{z_o} = 0$) que gobierna el movimiento de la cosmonave durante la maniobra de asistencia gravitatoria es

$$m \frac{dv_r}{dt} = -(\nabla \phi)_r, \quad (38)$$

$$m \frac{dv_\varphi}{dt} = m \omega_E \frac{u}{r} v_r \sin I + 2m \omega_E \frac{u}{r} \frac{v_r^2}{c} \cos \varphi' \sin I, \quad (39)$$

$$m \frac{dv_z}{dt} = 0, \quad (40)$$

siendo v_r , v_φ y v_z las componentes del vector \mathbf{v} en el sistema de referencia $\{\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\varphi, \mathbf{z}_o\}$, $u \equiv GM_E/c^2$, ω el argumento osculante del perigeo a lo largo de la órbita de la sonda desde el ecuador, φ el ángulo que forma el vector posición de la sonda con el vector posición del perigeo de su trayectoria y $\varphi' = \omega \mp \dot{\varphi}$ (ver figura 6). El signo \mp sale de que antes de que la sonda pase por el perigeo de su trayectoria el signo del ángulo φ es positivo mientras que después de que la sonda pase por su perigeo el signo es negativo.

Considerando que la cosmonave realiza el flyby en dirección prograda, es decir, en el mismo sentido de rotación que la Tierra, la representación general de las componentes del vector velocidad de la sonda en el sistema de referencia terrestre es

$$v_{x_o} = -v_\infty^{\text{in}} \cos \varphi', \quad (41)$$

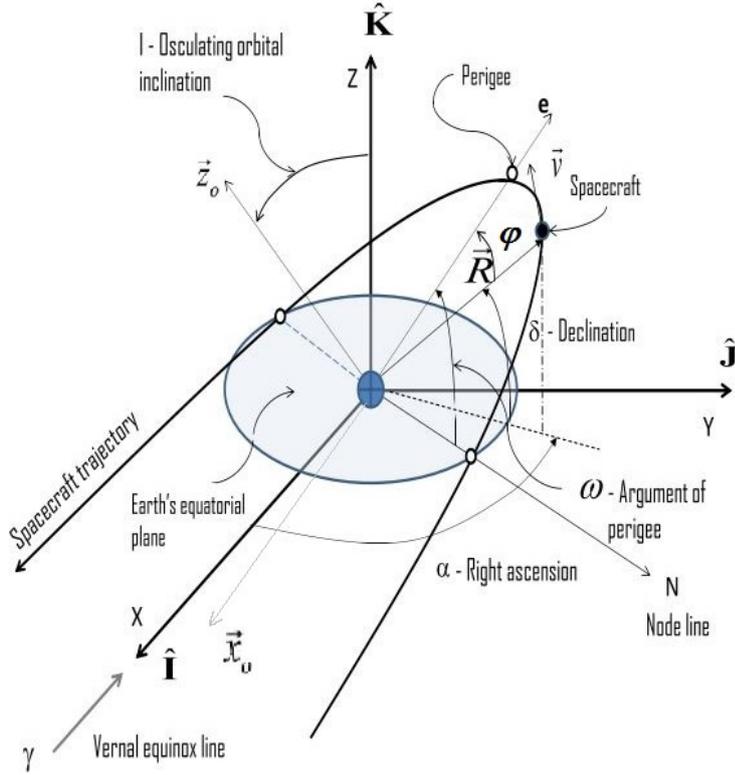


Figura 6: Geometría de la maniobra flyby y sus parámetros orbitales, del texto [26].

$$v_{yo} = v_{\infty}^{\text{in}} \sin \varphi', \quad (42)$$

y $v_{zo} = 0$, de acuerdo a la geometría de la figura 6. Las condiciones iniciales son $\mathbf{v}(t = 0) = \mathbf{v}_{\infty}^{\text{in}}$, con $t = 0$ en el punto de entrada de la sonda en la esfera de influencia gravitatoria terrestre. Debido a la complejidad del problema solo se desea resolver el sistema de ecuaciones (38)-(40) en la región en la que ocurre el flyby, por lo que se realizan las aproximaciones (i) $r \approx R_E + H$, con H la altura de la sonda en el perigeo (ver tabla 2) y (ii) $v_{xo} \approx 0$ y $v_{xo}v_{\infty}^{\text{in}}/v \sim v_{\varphi}$ ya que se asume una trayectoria cuasicircular durante el flyby. Por lo tanto, la ecuación (39) se reescribe como

$$\frac{dv_{\varphi}}{d\varphi'} = \left(\frac{Kcv_r}{v_{\varphi}} \sin I + \frac{Kv_{\infty}^{\text{in}}v_r}{c} \cos 2\varphi' \sin I \right) \cos \varphi', \quad (43)$$

donde $K = 2\omega_E/(R_E + H)$ y se ha tenido en cuenta que $dt = (R_E + H)d\varphi'/v_{\varphi}$ debido a la suposición de una trayectoria cuasicircular. En la figura 7a se presenta una solución de esta ecuación. Destaca el hecho de que la velocidad acimutal de la sonda antes y después del flyby (extremos de la figura) es igual, produciéndose un cambio nulo en la misma.

En cambio, si el flyby se realiza en dirección retrógrada, es decir, en sentido opuesto al sentido de rotación terrestre, la representación general de las componentes del vector velocidad de la sonda en el sistema de referencia terrestre es

$$v_{xo} = v_{\infty}^{\text{in}} \cos \varphi', \quad (44)$$

$$v_{yo} = -v_{\infty}^{\text{in}} \sin \varphi', \quad (45)$$

y $v_{zo} = 0$. En este caso las condiciones iniciales son las mismas que para el flyby en dirección prograda y la ecuación del movimiento acimutal de la astronave es (utilizando las aproximaciones realizadas anteriormente)

$$\frac{dv_{\varphi}}{d\varphi'} = \left(\frac{Kcv_r}{v_{\varphi}} \sin I + \frac{Kv_{\infty}^{\text{in}}v_r}{c} \cos \varphi' \sin I \right) \cos \varphi'. \quad (46)$$

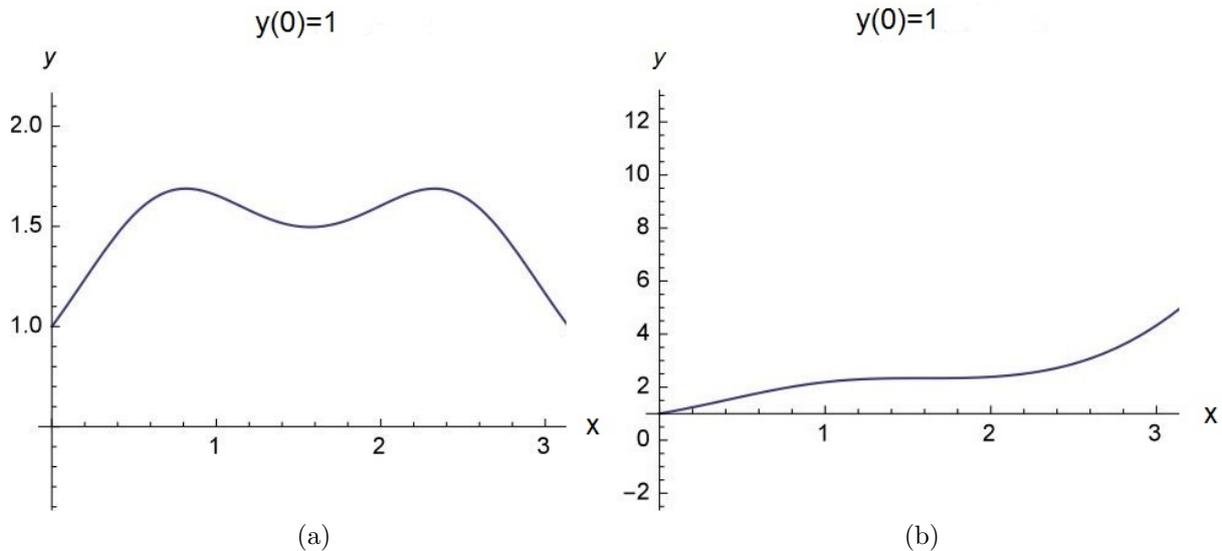


Figura 7: Representación de la velocidad acimutal $y = v_\varphi$ (en mm/s) en función del ángulo $x = \varphi'$ (en radianes, de 0 a π) normalizada a $y = 1$ mm/s en $x = 0$. En la figura (a) se representa una solución típica de (43) para un flyby en dirección progradada mientras que en (b) se representa una solución de (46) para un flyby en dirección retrógrada. Cabe destacar que los valores de la anomalía en la velocidad, la diferencia entre los valores $y(0)$ e $y(\pi)$, no están escalados a valores reales. Figuras extraídas de [29].

En la figura 7b se presenta una solución para esta ecuación. La diferencia entre las velocidades antes y después del flyby (extremos de la figura) es distinta de cero, por lo que en este caso sí que se produce una anomalía en la velocidad de la cosmonave.

En conclusión, de acuerdo a esta teoría cuando una nave realiza un flyby en dirección progradada la diferencia entre las velocidades antes y después del flyby es nula y no se observa una diferencia anómala en la velocidad. En cambio, si el flyby se realiza en dirección retrógrada se produce un cambio anómalo en la velocidad de la sonda. Las ecuaciones del movimiento acimutal de la astronave (43) y (46) verifican las tres características de la fórmula empírica de Anderson. Además, la dependencia de la ecuación (46) en el factor $\sin I$ indica que no se produce una aceleración anómala cuando el ángulo de inclinación orbital I es nulo. Este resultado es consistente con los datos de la tabla 2. Por ejemplo, la sonda Cassini presenta un incremento de velocidad anómalo pequeño porque $I = 25.4^\circ$. Por el contrario, cuando $I \sim 90^\circ$, como en el caso de la sonda NEAR, la variación de velocidad es mayor. Asimismo, debido al carácter vectorial de la TTC la variación en la velocidad anómala puede ser tanto positiva como negativa dependiendo de si el encuentro entre la cosmonave y la Tierra se produce en el lado anterior o posterior de su trayectoria orbital. Pese a todo, esta teoría presenta el interrogante de si es capaz de reproducir los cambios de velocidad anómalos observados para los flybys de la tabla 2 ya que el punto de entrada de cada sonda en la esfera de influencia gravitatoria terrestre no ha sido publicado en ningún artículo, de modo que no se puede resolver la ecuación diferencial (43) o (46) (dependiendo de cada caso) para los flybys de la tabla 2.

6. Versión causal de la teoría Newtoniana

La teoría clásica de la gravitación newtoniana no satisface el principio de causalidad ya que esta se basa en una acción instantánea en la distancia. El principio de causalidad indica que el efecto de cualquier campo físico requiere un tiempo finito para propagarse desde la fuente al punto en el que se calculan los efectos producidos por el mismo. En el artículo de J. C. Hafele [30] se deriva una versión causal de la teoría clásica acausal Newtoniana, a partir de la cual se obtiene una fórmula que reproduce adecuadamente los cambios anómalos en la velocidad de las sondas en términos de un campo de inducción.

Partiendo de las ecuaciones de campo de Einstein y utilizando la aproximación de campo débil se derivan las ecuaciones para el potencial gravitoelectrónico retardado φ , el campo gravitoelectrónico retardado \mathbf{e} , el potencial vector gravitomagnético retardado \mathbf{a} y el campo de inducción gravitomagnético retardado \mathbf{h} [31] de un objeto astronómico

$$\begin{aligned}\varphi &= G \iiint \left[\frac{\rho}{r''} \right] dV, & \mathbf{a} &= \frac{G}{c} \iiint \left[\frac{\rho \mathbf{u}}{r''} \right] dV, \\ \mathbf{e} &= -\nabla \varphi, & \mathbf{h} &= \nabla \times 4\mathbf{a},\end{aligned}$$

donde ρ es la densidad de masa del planeta, \mathbf{u} es la velocidad de un elemento de masa dm' del objeto celeste en un sistema de referencia inercial, \mathbf{r}'' es el vector de posición del punto donde se quiere calcular el campo gravitatorio respecto al elemento de masa dm' (ver figura 8) y las funciones entre corchetes denotan que deben ser evaluadas en el tiempo retardado, es decir, el tiempo que tarda el campo gravitatorio en propagarse con velocidad c_g aproximadamente igual a la velocidad de la luz desde el elemento de masa hasta el punto del campo.

Como ya se ha mencionado anteriormente, una partícula test cuyo vector de posición es \mathbf{r} y vector velocidad \mathbf{v} sometida a la acción de un campo gravitoelectromagnético experimenta una aceleración análoga a la fuerza de Lorentz del electromagnetismo dada por $\mathbf{g} = -(\mathbf{e} + \mathbf{v} \times \mathbf{h}/c)$. Por lo tanto, sustituyendo los campos gravitoelectrónico y gravitomagnético se obtiene que

$$\mathbf{g} = -\nabla \left(G \iiint \left[\frac{\rho}{r''} \right] dV \right) - \left(\mathbf{v} \times \left(\nabla \times \left(\frac{4G}{c^2} \iiint \left[\frac{\rho \mathbf{u}}{r''} \right] dV \right) \right) \right). \quad (47)$$

De acuerdo a la ecuación (47) la aceleración inducida por el campo gravitoelectrónico es independiente de c mientras que aquella producida por el campo gravitomagnético está multiplicada por un factor $1/c^2$. Considerando que la magnitud de la aceleración debida a los efectos del campo gravitoelectrónico es del orden de 10 m/s^2 (campo gravitatorio en la superficie terrestre) y que la magnitud de la aceleración causada por el campo gravitomagnético es del orden de 10^{-10} m/s^2 (estimación realizada en la sección 4.2), se puede despreciar esta última. Por lo tanto, la ecuación (47) se transforma en

$$\mathbf{g} = -\nabla \left(G \iiint \left[\frac{\rho}{r''} \right] dV \right). \quad (48)$$

Esta ecuación presenta un gran parecido para con la ley de gravitación de Newton con la salvedad de que el integrando está evaluado en el tiempo retardado. Conviene puntualizar que solo es válida en la aproximación de campo débil y siempre que las velocidades

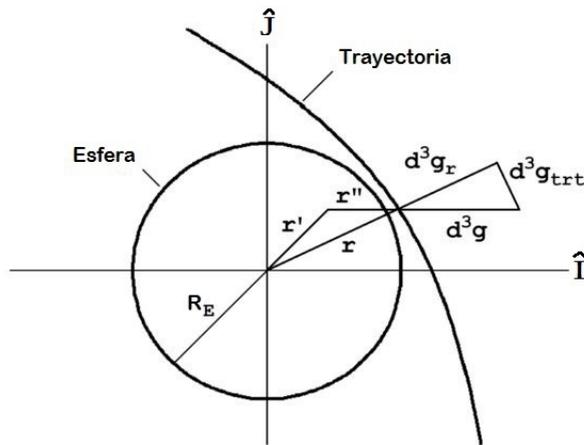


Figura 8: Geometría que interviene en el cálculo de las componentes $d^3\mathbf{g}_r$ y $d^3\mathbf{g}_{trt}$ del campo gravitatorio elemental creado por un elemento de masa dm' en el sistema de referencia ecuatorial terrestre $\{\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{J}}, \hat{\mathbf{K}}\}$. El eje $\hat{\mathbf{K}}$ es paralelo al eje de rotación terrestre. Los vectores \mathbf{r} y \mathbf{r}' denotan, respectivamente, el vector radial del origen al punto del campo y el vector radial del origen al elemento de masa del planeta. La curva etiquetada como trayectoria es la proyección de la trayectoria de la cosmonave en el plano ecuatorial $(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{J}})$. Figura extraída de [30].

involucradas sean no relativistas. Diferenciando la ecuación (48) y teniendo en cuenta que $dm' = \rho(r')dV$ resulta

$$d^3\mathbf{g} = -G \frac{dm' \mathbf{r}''}{r''^2 r''}. \quad (49)$$

Esta fórmula expresa el campo gravitatorio elemental total $d^3\mathbf{g}$ creado por el elemento de masa dm' , que consiste en una componente radial $d^3\mathbf{g}_r$ y una componente transversal $d^3\mathbf{g}_{trt}$ de tal forma que $d^3\mathbf{g} = d^3\mathbf{g}_r + d^3\mathbf{g}_{trt}$. La fórmula diferencial para cada una de ellas es

$$d^3\mathbf{g}_r = -G \frac{dm'}{r''^2} \left(\frac{\mathbf{r}''}{r''} \right)_r, \quad d^3\mathbf{g}_{trt} = -G \frac{dm'}{r''^2} \left(\frac{\mathbf{r}''}{r''} \right)_{trt}, \quad (50)$$

siendo $(\mathbf{r}''/r'')_r$ y $(\mathbf{r}''/r'')_{trt}$ las componentes radial y transversal del vector unitario \mathbf{r}''/r'' respectivamente (ver figura 8). Integrando la componente transversal $d^3\mathbf{g}_{trt}$ en el volumen del cuerpo celeste en el tiempo retardado y considerando la geometría de la figura 8, la fórmula resultante para la magnitud de la componente transversal es

$$g_{trt}(\theta) = -G \frac{I_E}{R_E^4} \frac{v_{eq}}{c_g} \frac{\omega_\phi(\theta) - \omega_E}{\omega_E} \cos^2(\lambda(\theta)) PS(r(\theta)), \quad (51)$$

donde I_E es el momento de inercia terrestre en la aproximación esférica, ω_E el módulo de la velocidad angular terrestre, v_{eq} el módulo de la velocidad de la superficie ecuatorial terrestre, θ el ángulo polar de la astronave en el plano de la órbita, $\omega_\theta = d\theta/dt$ la velocidad angular de la nave, ω_ϕ la componente acimutal ϕ de ω_θ , λ la latitud geocéntrica de la sonda, r la distancia entre la Tierra y la cosmonave y $PS(r)$ una serie de potencias que aproxima la integral triple sobre el volumen terrestre. La fórmula para $PS(r)$ es

$$PS(r) \equiv \left(\frac{R_E}{r} \right)^3 \left(C_0 + C_2 \left(\frac{R_E}{r} \right)^2 + C_4 \left(\frac{R_E}{r} \right)^4 + C_6 \left(\frac{R_E}{r} \right)^6 \right),$$

siendo C_0 , C_2 , C_4 y C_6 unos coeficientes calculados mediante el ajuste de la serie de potencias al valor de la integral triple y cuyos valores son

$$C_0 = 0.50889, \quad C_2 = 0.13931, \quad C_4 = 0.01013, \quad C_6 = 0.14671.$$

Tabla 4: Datos y resultados del cálculo de los cambios de velocidad anómalos de las sondas Galileo, NEAR, Cassini, Rosetta y MESSENGER, extraídos de [32]. Los ángulos θ_{min} y θ_{max} representan los valores mínimo y máximo de θ , Δv_{obs} denota el cambio de velocidad anómalo observado, Δv_{trt} es el cambio de velocidad calculado a partir de (53)-(54) y c_g/c y v_k/v_{eq} son los valores que mejor ajustan Δv_{trt} a Δv_{obs} .

Flyby	Galileo I	Galileo II	NEAR	Cassini	Rosetta I	MESSENGER
θ_{min} ($^\circ$)	-113.62	-115.32	-123.12	-99.75	-137.28	-136.39
θ_{max} ($^\circ$)	113.62	115.32	123.14	99.75	138.67	136.53
Δv_{obs} (mm/s)	3.92 ± 0.30	-4.6 ± 1.0	13.46 ± 0.01	-2 ± 1	1.80 ± 0.03	0.02 ± 0.01
Δv_{trt} (mm/s)	3.92 ± 0.30	-4.6 ± 1.0	13.46 ± 0.01	-2 ± 1	1.80 ± 0.03	0.02 ± 0.01
c_g/c	1	1	1.000 ± 0.001	1	1.00 ± 0.02	1
v_k/v_{eq}	12 ± 3	14 ± 3	6.530 ± 0.005	17 ± 9	7.1 ± 0.2	7 ± 4

De acuerdo con las condiciones que impone la fórmula empírica de Anderson, la ecuación (51) debe modificar la magnitud del vector \mathbf{v}_λ (el vector velocidad de la astronave se puede descomponer en tres vectores mutuamente ortogonales, de forma que $\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\phi + \mathbf{v}_\lambda$) de la velocidad de la astronave. No obstante, este vector es ortogonal a \mathbf{g}_{trt} , por lo que \mathbf{g}_{trt} no puede cambiar la magnitud de \mathbf{v}_λ sino solo su dirección. Para satisfacer este requerimiento se introduce un hipotético campo de inducción, denotado por \mathbf{F}_λ , dirigido en la dirección de \mathbf{v}_λ . Por analogía con el electromagnetismo se asume que el rotacional de \mathbf{F}_λ solo tiene componente acimutal ϕ y es igual a $-k d\mathbf{g}_{trt}/dt$, siendo k un parámetro ajustable. Integrando $\nabla \times \mathbf{F}_\lambda$ se obtiene una fórmula para la magnitud de \mathbf{F}_λ (para un desarrollo detallado ver [32])

$$F_\lambda = \frac{v_{eq}}{v_k} \frac{R_E}{r(\theta)} \int_0^\theta \frac{r(\theta) \omega_\theta(\theta)}{R_E \omega_E} \frac{1}{R_E} \frac{dr}{d\theta} \frac{dg_{trt}}{d\theta} d\theta, \quad (52)$$

donde se ha redefinido el parámetro ajustable como $v_k \equiv 1/k$, llamado velocidad de inducción. Finalmente, a partir de la potencia desarrollada por la fuerza \mathbf{F}_λ se deriva una fórmula para el cambio anómalo en la velocidad asintótica de la cosmonave

$$\Delta v_{trt} = \Delta v_\infty^{in} + \Delta v_\infty^{out}, \quad (53)$$

siendo

$$\Delta v_\infty^{in} = \Delta v(\theta_{min}), \quad \Delta v_\infty^{out} = \Delta v(\theta_{max}),$$

y

$$\Delta v(\theta) = \frac{v_\infty^{in}}{2} \int_0^\theta \frac{r_\lambda(\theta) F_\lambda(\theta)}{(v_\infty^{in})^2} \frac{d\lambda}{d\theta} d\theta. \quad (54)$$

Los ángulos θ_{min} y θ_{max} denotan los valores mínimo y máximo de θ . El cambio de velocidad de la ecuación (54) es proporcional a v_∞^{in} , otra de las características de la ecuación empírica de Anderson. Utilizando los valores de θ_{min} y θ_{max} de la tabla 4 junto con las ecuaciones (53)-(54) e imponiendo que $\Delta v_{trt} = \Delta v_{obs}$, es decir, el cambio de velocidad anómalo observado, se obtienen los parámetros c_g y v_k para cada flyby (también presentes en la tabla 4).

En conclusión, en esta sección se ha mostrado una versión causal de la teoría newtoniana a partir de las ecuaciones de Einstein en la aproximación de campo débil. Esta teoría permite explicar y calcular de forma precisa los cambios anómalos en la velocidad

de las sondas tras una maniobra de asistencia gravitatoria a partir del ajuste de la velocidad de inducción v_k . Por lo tanto, según esta teoría el origen de la anomalía flyby se encontraría en el efecto producido por el retraso temporal del campo gravitatorio. No obstante, esto no ha podido detectarse en el pasado debido a que este efecto disminuye con la tercera potencia de la distancia, tal y como se puede apreciar en la serie de potencias de la ecuación (51). Pese a todo, uno de los interrogantes que presenta esta teoría es que como se deriva a partir de la teoría de la relatividad general entonces la teoría de la relatividad general también debería explicar esta anomalía. Sin embargo, en la sección 4.2 se ha visto que la teoría de la relatividad general en la aproximación de campo débil no puede explicar la anomalía flyby, por lo que esto genera ciertas dudas en la teoría de J. C. Hafele. Otro de los aspectos más controvertidos es la inclusión de un campo de inducción F_λ . Este campo de inducción es uno de los aspectos esenciales de su teoría, sin el cual no se podría explicar la anomalía flyby. Hafele introduce el campo de inducción en su teoría para que los resultados estén de acuerdo con las observaciones, pero en ningún momento explica el origen del mismo.

7. Modificación de la inercia

En el artículo [33] M. E. McCulloch propone un modelo en el que la masa inercial de la cosmonave depende de la aceleración de la misma, de tal forma que la masa se reduce ligeramente cuando la aceleración decrece. Considerando la aceleración de la sonda respecto a cada elemento de masa de la Tierra este modelo predice una reducción de la masa inercial a medida que aumenta la latitud geocéntrica, ya que cerca de los polos la aceleración relativa promedio es menor. Por lo tanto, teniendo en cuenta la ley de conservación del momento lineal, se produce un aumento en la velocidad de la astronave. A partir de este modelo se deriva una ecuación que presenta ciertas similitudes con la fórmula empírica de Anderson y, aplicándola a los flybys de la tabla 2, ajusta adecuadamente los cambios de velocidad anómalos observados en las sondas Galileo y Rosetta en su primer flyby terrestre y NEAR.

La teoría de la dinámica modificada (MOND, por sus siglas en inglés) propuesta por Milgrom [34] es una teoría alternativa a la materia oscura que atribuye la discrepancia de masa evidenciada por galaxias y sistemas galácticos a una ruptura con la dinámica estándar. Esta teoría establece que en el límite de aceleraciones bajas la dinámica debe modificarse. El modelo propuesto por M. E. McCulloch se basa en esta teoría. Sin embargo, plantea que la masa inercial varía de forma inversamente proporcional a la aceleración y no como expone Milgrom [34]. De esta forma, establece que

$$m_i = m_g \left(1 - \frac{\beta \pi^2 c^2}{a \Theta} \right), \quad (55)$$

siendo m_i y m_g las masas inercial y gravitatoria de la sonda respectivamente, $\beta = 0.2$, $\Theta = 2c/H$, con $H = 68.5$ km/s/Mpc la constante de Hubble, y a el módulo de la aceleración de la astronave relativa a la materia en su entorno, en este caso la Tierra. Este modelo no requiere explicar las órbitas de los planetas. Además, está en desacuerdo con precisas observaciones del principio de equivalencia ($m_i = m_g$) realizadas tanto en experimentos en la superficie terrestre (Schlamminger et al. [35]) como en el espacio (P. Touboul et al. [36]). Para soslayar estos inconvenientes McCulloch sugiere que su modelo solo es aplicable

a órbitas abiertas y, según él, el modelo no entra en conflicto con los experimentos del principio de equivalencia ya que estos se realizan en órbitas cerradas. No obstante, esto último no es cierto. De acuerdo a la teoría de la relatividad general la órbita de la Tierra no es cerrada, de modo que los experimentos del principio de equivalencia no deberían distinguir entre órbitas abiertas y órbitas cerradas. Pese a estas objeciones, en los párrafos venideros se sigue con el desarrollo del modelo propuesto por McCulloch.

Para calcular el cambio anómalo en la velocidad de las sondas se utiliza el principio de conservación del momento lineal

$$M_E \mathbf{V}_E^{\text{in}} + m_{\text{in}} \mathbf{v}_{\infty}^{\text{in}} = M_E \mathbf{V}_E^{\text{out}} + m_{\text{out}} \mathbf{v}_{\infty}^{\text{out}}, \quad (56)$$

donde los términos $M_E \mathbf{V}_E^{\text{in}}$ y $M_E \mathbf{V}_E^{\text{out}}$ se corresponden con los momentos lineales inicial y final de la Tierra y los términos $m_{\text{in}} \mathbf{v}_{\infty}^{\text{in}}$ y $m_{\text{out}} \mathbf{v}_{\infty}^{\text{out}}$ con los momentos lineales inicial y final de la astronave. Sustituyendo la ecuación (55) para las masas inerciales de la sonda m_{in} y m_{out} se obtiene que

$$M_E \mathbf{V}_E^{\text{in}} + m_g \left(1 - \frac{\beta \pi^2 c^2}{a_{\text{in}} \Theta}\right) \mathbf{v}_{\infty}^{\text{in}} = M_E \mathbf{V}_E^{\text{out}} + m_g \left(1 - \frac{\beta \pi^2 c^2}{a_{\text{out}} \Theta}\right) \mathbf{v}_{\infty}^{\text{out}}, \quad (57)$$

con a_{in} y a_{out} los módulos de las aceleraciones inicial y final de la cosmonave relativas a la Tierra. Despejando la diferencia entre las velocidades inicial y final de la nave, $\Delta \mathbf{v}$, se llega a

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_{\infty}^{\text{out}} - \mathbf{v}_{\infty}^{\text{in}} = \frac{M_E}{m_g} (\mathbf{V}_E^{\text{in}} - \mathbf{V}_E^{\text{out}}) + \frac{\beta \pi^2 c^2}{\Theta} \left(\frac{\mathbf{v}_{\infty}^{\text{out}}}{a_{\text{out}}} - \frac{\mathbf{v}_{\infty}^{\text{in}}}{a_{\text{in}}} \right). \quad (58)$$

El primer término del miembro de la derecha es el que se obtiene asumiendo el principio de equivalencia, de modo que no aporta nada nuevo. El segundo término, que se denota por $\Delta \mathbf{v}'$, se origina debido a la modificación de la inercia y es el que se estudia,

$$\Delta \mathbf{v}' = \frac{\beta \pi^2 c^2}{\Theta} \left(\frac{\mathbf{v}_{\infty}^{\text{out}}}{a_{\text{out}}} - \frac{\mathbf{v}_{\infty}^{\text{in}}}{a_{\text{in}}} \right). \quad (59)$$

Con el propósito de analizar este término se toman los estados inicial y final de la sonda de forma que $a_{\text{in}} = a_{\text{out}}$ y se asume que las aceleraciones de la sonda relativas a cada elemento de masa de la Tierra también contribuyen a las aceleraciones \mathbf{a}_{in} y \mathbf{a}_{out} . Para imaginar estas aceleraciones se puede trazar una línea imaginaria que conecta cada elemento de masa de la Tierra con la sonda y se mide la aceleración a la que aumenta o disminuye el tamaño de la línea para determinar la masa inercial de cada interacción gravitatoria. La magnitud de la aceleración de un elemento de masa de la Tierra (en la aproximación de esfera uniforme) a una distancia k del eje de rotación es $a = v^2/k$, con v el módulo de la velocidad del elemento de masa. Expresando v en términos de la magnitud de la velocidad ecuatorial, $v = v_{eq} k / R_E$, se obtiene que $a = v_{eq}^2 k / R_E^2$. Para calcular la aceleración relativa media de la sonda se asume que está muy alejada de la Tierra en la dirección \mathbf{x} (figura 9) y solo ve la componente x de \mathbf{a}

$$a_x = \frac{v_{eq}^2 k}{R_E^2} \sin \varphi \sin \theta, \quad (60)$$

siendo θ el ángulo polar y φ el ángulo acimutal. Usando $k = r \sin \theta$, con r la distancia radial a un elemento de masa de la Tierra, se tiene que

$$a_x = \frac{v_{eq}^2 r \sin \theta}{R_E^2} \sin \varphi \sin \theta. \quad (61)$$

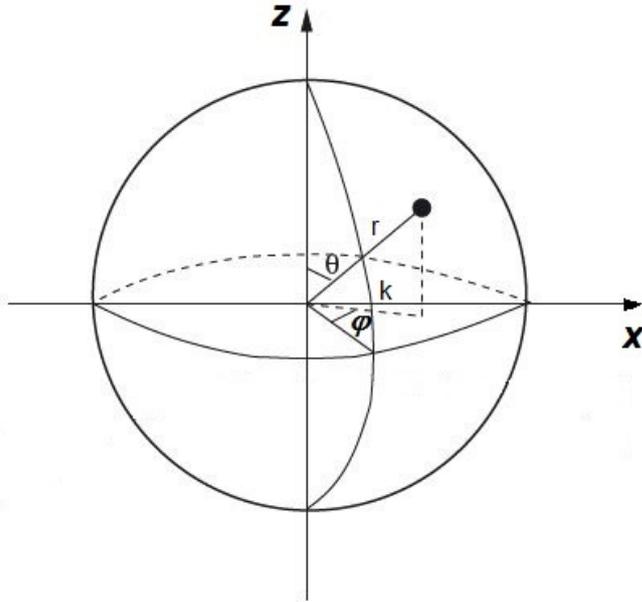


Figura 9: Geometría utilizada en el cálculo de la aceleración de la sonda relativa a cada elemento de masa terrestre, del texto [33].

Para integrar esta expresión sobre el volumen de la Tierra se utiliza un modelo lineal de su densidad, $\rho(r) = (R_E - \alpha r)/R_E$, donde ρ es la densidad terrestre y $\alpha = 0.974$,

$$\bar{a}_x = \frac{1}{(4/3)\pi R_E^3} \times \int_{r=0}^{R_E} 2 \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{v_{eq}^2}{R_E^2} r^3 \frac{R_E - \alpha r}{R_E} (\sin \theta)^3 \times \sin \varphi dr d\varphi d\theta. \quad (62)$$

El resultado de esta integración es la aceleración relativa media de la sonda respecto a la Tierra,

$$\bar{a}_x = \frac{4v_{eq}^2}{\pi R_E} \left(\frac{1}{4} - \frac{\alpha}{5} \right) \approx 0.07 \times \frac{v_{eq}^2}{R_E}. \quad (63)$$

Teniendo en cuenta la latitud geocéntrica λ de la sonda, la aceleración promedio es $a = (0.07v_{eq}^2/R_E) \cos \lambda$. Reemplazando a_{in} y a_{out} por este resultado en la ecuación (59) se alcanza la expresión

$$\Delta \mathbf{v}' = \frac{\beta \pi^2 R_E c^2}{0.07 v_{eq}^2 \Theta} \times \left(\frac{\mathbf{v}_{\infty}^{out} \cos \lambda_{in} - \mathbf{v}_{\infty}^{in} \cos \lambda_{out}}{\cos \lambda_{in} \cos \lambda_{out}} \right). \quad (64)$$

Sustituyendo los valores $R_E = 6371$ km, $c = 3 \times 10^8$ m·s⁻¹, $v_{eq} = 465$ m·s⁻¹ y $\Theta = 2.7 \times 10^{26}$ m se obtiene la ecuación

$$\Delta \mathbf{v}' = 2.8 \times 10^{-7} \times \left(\frac{\mathbf{v}_o \cos \lambda_i - \mathbf{v}_i \cos \lambda_o}{\cos \lambda_i \cos \lambda_o} \right). \quad (65)$$

Esta ecuación evoca la fórmula empírica de Anderson. Utilizando los datos de la tabla 2 se puede calcular el cambio de velocidad anómalo que se espera en cada flyby. Los resultados que se obtienen se encuentran tabulados en la tabla 5 junto con las velocidades anómalas observadas y las calculadas con la fórmula empírica de Anderson. El cambio de velocidad $\Delta \mathbf{v}'$ calculado está de acuerdo con las observaciones para los flybys Galileo I, NEAR y Rosetta. Para las sondas Cassini y MESSENGER el valor calculado ni siquiera reproduce el signo de los valores observados y para Galileo II la discordancia con el valor observado puede deberse a una subestimación del error introducido en los datos al penetrar en la atmósfera terrestre. En cualquier caso, los cambios de velocidad anómalos calculados con

Tabla 5: Cambios de velocidad anómalo observado Δv_{obs} , calculado con la ecuación (65) $\Delta v'$ y calculado con la ecuación (9) $\Delta v''$ para los flybys Galileo I, Galileo II, NEAR, Cassini, Rosetta I y MESSENGER.

Flyby	Galileo I	Galileo II	NEAR	Cassini	Rosetta I	MESSENGER
Δv_{obs} (mm/s)	3.92 ± 0.30	-4.6 ± 1.0	13.46 ± 0.01	-2 ± 1	1.80 ± 0.03	0.02 ± 0.01
$\Delta v'$ (mm/s)	2.9 ± 0.6	-0.9 ± 0.2	20.1 ± 4.0	0.9 ± 0.2	3.2 ± 0.6	-1.3 ± 0.2
$\Delta v''$ (mm/s)	4.12	-4.67	13.28	-1.07	2.07	0.06

la ecuación (65) se ajustan peor a los cambios observados que aquellos calculados mediante la fórmula (9).

En conclusión, a partir de la modificación del principio de equivalencia se ha obtenido una ecuación que permite calcular los cambios de velocidad anómalos de algunos flybys. Los resultados obtenidos para los flybys de la tabla 2 son peores que los que se obtienen con la fórmula empírica de Anderson. No obstante, no se debe olvidar que la ecuación (65) se ha logrado a partir de la MOND mientras que la fórmula de Anderson se deriva de forma fenomenológica a partir de los datos de la tabla 2. Pese a todo, este modelo provoca cierta desconfianza. La variación de masa inercial está en desacuerdo con precisas observaciones del principio de equivalencia. Estas observaciones se realizan tanto en experimentos en la superficie terrestre como en el espacio. Uno de los más recientes es la misión MICROSCOPE, en la que se determina que el principio de equivalencia es correcto con una precisión de una parte en 10^{15} [36]. Además, McCulloch no explica cuál es la razón de que este modelo solo sea válido para órbitas abiertas. Simplemente impone esta condición para que su modelo no esté en desacuerdo con los resultados experimentales.

8. Anisotropía de la velocidad de la luz

En la sección 3.1 se ha explicado el método de seguimiento Doppler bidireccional, uno de los métodos utilizados para determinar la distancia Tierra-sonda y el módulo de la velocidad radial de la sonda. Conociendo las frecuencias de la señal emitida ν_0 y recibida ν'' se puede calcular el módulo de la velocidad radial de la cosmonave a partir de la ecuación (8). En esta ecuación se asume que la velocidad de la luz es constante e igual a $c = 299792458$ m/s, de acuerdo al segundo postulado de la relatividad especial. Pero ¿qué pasaría si la velocidad de la luz en el espacio vacío no fuese invariante e isótropa en todas las direcciones? Esto es lo que plantean E. D. Greaves, C. Bracho e I. Mikoss en el artículo [37]. En este sentido existen antecedentes de autores que proponen que la velocidad de la luz puede estar influida por el potencial gravitatorio. Un artículo que apoya esta idea es el de R. Dicke [38], que propone una formulación alternativa de la teoría de la relatividad general de Einstein basada en un espacio plano y una velocidad de la luz c' variable dada por

$$n = 1 + \frac{2GM}{rc^2},$$

siendo $n = c'/c$ y M la masa del objeto astronómico que produce el campo gravitatorio. Además, en los últimos años se han desarrollado modelos gravitatorios con una velocidad de la luz variable que están de acuerdo con algunos test de relatividad general (ver, por ejemplo, [39]).

El artículo [37] se basa en la hipótesis de Céspedes-Curé, que establece que la velocidad de la luz en el espacio vacío depende de la densidad de energía total localmente, de acuerdo a la fórmula

$$c = \frac{k}{\sqrt{\rho}}, \quad (66)$$

con k una constante de proporcionalidad y ρ la suma de las densidades de energía gravitatoria ρ_G , eléctrica ρ_E , magnética ρ_M y cualquier otra presente localmente. Por lo tanto, según esta hipótesis, el origen de la anomalía flyby se encontraría en la subestimación o sobrestimación de la velocidad de la luz utilizada en el método de seguimiento de la sonda para calcular su velocidad.

Las densidades de energía eléctrica ρ_E y magnética ρ_B asociadas a la presencia de un campo eléctrico \mathbf{E} y un campo magnético \mathbf{B} respectivamente están dadas por

$$\rho_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2, \quad (67)$$

y

$$\rho_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2, \quad (68)$$

siendo ϵ_0 la permitividad dieléctrica del vacío y μ_0 la permeabilidad magnética del vacío. Estas fórmulas se derivan a partir de la teoría clásica de campos. Por analogía entre el campo gravitatorio asociado a una masa puntual y el campo eléctrico asociado a una carga puntual también se puede definir la densidad de energía gravitatoria vinculada con la presencia de un campo gravitatorio \mathbf{g} como

$$\rho_G = \frac{g^2}{8\pi G}. \quad (69)$$

Esto solo es válido para la teoría clásica de la gravitación newtoniana. En la teoría de la relatividad general, debido al principio de equivalencia, siempre se puede escoger un sistema de referencia de tal forma que el campo gravitatorio local se anula y, por ende, también la densidad de energía gravitatoria [40]. Por lo tanto, en este caso no se puede definir una densidad de energía gravitatoria. Teniendo en cuenta que el campo gravitatorio \mathbf{g} producido por una distribución esférica de masa M a una distancia r de su centro es $\mathbf{g} = -GM\mathbf{r}/r^3$, la ecuación (69) se reescribe como

$$\rho_G = \frac{GM^2}{8\pi r^4}. \quad (70)$$

En el sistema solar los campos eléctricos y magnéticos más intensos son del orden de 10^7 V/m y 1 T respectivamente [41]. Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (67) y (68) se obtiene que $\rho_E \sim 10^3$ J/m³ y $\rho_B \sim 10^5$ J/m³. En la tabla 6 se muestran las densidades de energía gravitatoria en la superficie terrestre producidas por las estrellas y galaxias lejanas, el Sol, la Tierra, la Luna y los planetas vecinos. Las contribuciones más importantes se deben a la densidad de energía cósmica, cuya fuente son las estrellas y galaxias lejanas, y a la densidad de energía gravitatoria producida por el campo gravitatorio terrestre. Comparando la densidad de energía gravitatoria con la eléctrica y la magnética se ve que estas últimas son varios órdenes de magnitud menores y no se tendrán en cuenta en este análisis.

A partir de las ecuaciones (8) y (66) y denotando por c la velocidad de la luz en el vacío medida en la superficie terrestre y c' la velocidad de la luz en un punto de la

Tabla 6: Valores de la densidad de energía gravitatoria en la superficie terrestre producida por las estrellas y galaxias lejanas, el Sol, la Tierra, la Luna y los planetas vecinos Júpiter, Venus y Marte. La unidad de longitud AU hace referencia a la unidad astronómica y E_{SI} denota el radio de la esfera de influencia gravitatoria terrestre, cuyo valor es de 929000 km. Tabla extraída de [37].

Fuente de densidad de energía	Símbolo	Densidad de energía debida a la fuente en	Magnitud (J/m ³)
Estrellas y galaxias lejanas	ρ^*	Tierra	1.094291×10^{15}
Sol	ρ_S	Tierra 1 AU	2.097×10^4
Sol	ρ_S^{AU-}	1 AU- E_{SI}	2.150250×10^4
Sol	ρ_S^{AU+}	1 AU+ E_{SI}	2.046034×10^4
Tierra	ρ_E	Superficie terrestre	5.726×10^{10}
Luna	ρ_{Moon}	Tierra	6.57×10^{-1}
Jupiter	ρ_{Jup}	Tierra	1.91×10^{-2}
Venus	ρ_{Ven}	Tierra	2.14×10^{-5}
Marte	ρ_{Mars}	Tierra	2.91×10^{-8}

trayectoria de la astronave, se obtiene una expresión para el módulo de la velocidad radial de la nave v en términos de la densidad de energía

$$v = c' \frac{\Delta\nu}{2\nu_0} = c \frac{\Delta\nu}{2\nu_0} \sqrt{\frac{\rho}{\rho'}}, \quad (71)$$

donde ρ' es una función de la posición que da cuenta de la densidad de energía gravitatoria en cada punto de la trayectoria de la cosmonave y ρ es la densidad de energía en la superficie terrestre, cuyo valor es $\rho \approx \rho^* + \rho_E + \rho_S$. Para calcular ρ' es necesario conocer la distancia radial de la sonda a los centros de la Tierra y del Sol, de acuerdo a la ecuación (70). Denotando por r_S la distancia al centro del Sol y r_E la distancia al centro de la Tierra, la densidad de energía ρ' en cada punto de la trayectoria de la cosmonave estará dada por

$$\rho' = \rho^* + \frac{GM_S^2}{8\pi r_S^4} + \frac{GM_E^2}{8\pi r_E^4}, \quad (72)$$

con M_S la masa solar. Debido a la dependencia en $1/r^4$ la densidad de energía gravitatoria terrestre solo es importante a pequeñas distancias cerca de la superficie terrestre. Por ejemplo, si $r_E = E_{SI}$, esta se reduce a 127 J/m³ y las contribuciones predominantes serán debidas a la densidad de energía gravitatoria del Sol y de las estrellas y galaxias lejanas. Sustituyendo esta ecuación en la fórmula (71) se llega a la ecuación corregida para el cálculo de la velocidad de la astronave

$$v = c \frac{\Delta\nu}{2\nu_0} \sqrt{\frac{\rho}{\rho^* + \frac{GM_S}{8\pi r_S^4} + \frac{GM_E}{8\pi r_E^4}}}. \quad (73)$$

Esta expresión presenta un término de raíz cuadrada derivado de la hipótesis de Céspedes-Curé que sería el responsable de la anomalía flyby. Si se utiliza esta ecuación para medir la velocidad radial de las sondas el cambio de velocidad anómalo debería ser nulo.

En aras de calcular la diferencia de velocidad anómala experimentada por las sondas en los flybys terrestres supóngase que la velocidad de la nave se mide en sendos puntos de entrada (v_∞^{in}) y salida (v_∞^{out}) de la esfera de influencia gravitatoria terrestre. Si se ignora el cambio de c las velocidades medidas estarán dadas por

$$v_\infty^{\text{out}(1)} = c \frac{\Delta\nu^{\text{out}}}{2\nu_0} \quad \text{y} \quad v_\infty^{\text{in}(1)} = c \frac{\Delta\nu^{\text{in}}}{2\nu_0},$$

y el cambio de velocidad anómalo será

$$\Delta v_\infty^{(1)} = v_\infty^{\text{out}(1)} - v_\infty^{\text{in}(1)} = \frac{c}{2\nu_0} (\Delta\nu^{\text{out}} - \Delta\nu^{\text{in}}). \quad (74)$$

Por otro lado, si se tiene en cuenta el cambio en la velocidad de la luz c , las velocidades v_∞^{in} y v_∞^{out} se escribirán como

$$v_\infty^{\text{out}(2)} = c \frac{\Delta\nu^{\text{out}}}{2\nu_0} \sqrt{\frac{\rho}{\rho^* + \frac{GM_S}{8\pi(r_S^{\text{out}})^4} + \frac{GM_E}{8\pi(r_E^{\text{out}})^4}}}, \quad (75)$$

$$v_\infty^{\text{in}(2)} = c \frac{\Delta\nu^{\text{in}}}{2\nu_0} \sqrt{\frac{\rho}{\rho^* + \frac{GM_S}{8\pi(r_S^{\text{in}})^4} + \frac{GM_E}{8\pi(r_E^{\text{in}})^4}}}, \quad (76)$$

siendo r_E^{in} y r_E^{out} las distancias radiales desde el centro de la Tierra a los puntos de entrada y salida de la esfera de influencia gravitatoria terrestre respectivamente y r_S^{in} y r_S^{out} las distancias de estos puntos respecto del centro del Sol. En el sistema de referencia de la Tierra la energía se conserva, de modo que se tiene que verificar que $v_\infty^{\text{out}(2)} - v_\infty^{\text{in}(2)} = 0$. Si los términos de raíz cuadrada son diferentes, entonces $\Delta\nu^{\text{out}} \neq \Delta\nu^{\text{in}}$ y las mediciones hechas con la ecuación (74) resultarán en una anomalía en la velocidad de la cosmonave no nula. La anomalía está contenida en la diferencia entre los términos de raíz cuadrada de las ecuaciones (75) y (76) y, teniendo en cuenta que $v_\infty^{\text{out}(1)} \approx v_\infty^{\text{in}(1)} \equiv v_\infty$, se obtiene la ecuación para el cálculo de la anomalía flyby

$$\Delta v_\infty^{(2)} = v_\infty^{\text{out}(2)} - v_\infty^{\text{in}(2)} = v_\infty \left[\sqrt{\frac{\rho}{\rho^* + \frac{GM_S}{8\pi(r_S^{\text{out}})^4} + \frac{GM_E}{8\pi(r_E^{\text{out}})^4}}} - \sqrt{\frac{\rho}{\rho^* + \frac{GM_S}{8\pi(r_S^{\text{in}})^4} + \frac{GM_E}{8\pi(r_E^{\text{in}})^4}}} \right] \quad (77)$$

Para predecir el cambio de velocidad anómalo de una cosmonave con esta ecuación es necesario conocer la velocidad de la misma en el punto de entrada así como los puntos de entrada y salida respecto al Sol y la Tierra. A partir del análisis numérico de esta ecuación es posible identificar tres casos distintos:

1. $r_S^{\text{out}} = r_S^{\text{in}}$ y $r_E^{\text{out}} = r_E^{\text{in}}$, los términos entre corchetes de esta ecuación se cancelan y no se produce ninguna anomalía. El caso $r_S^{\text{out}} = r_S^{\text{in}}$ y $r_E^{\text{out}} \neq r_E^{\text{in}}$ se engloba dentro de este ya que la contribución de la densidad de energía gravitatoria terrestre es muy pequeña a distancias a las que la nave comienza su acercamiento a la Tierra.
2. $r_S^{\text{out}} \neq r_S^{\text{in}}$ y $r_E^{\text{out}} = r_E^{\text{in}}$. En este caso los términos de raíz cuadrada de (77) son diferentes. No obstante, los cálculos numéricos muestran que la anomalía es del orden de 10^{-15} m/s, tan pequeña que no se puede medir.
3. $r_S^{\text{out}} \neq r_S^{\text{in}}$ y $r_E^{\text{out}} \neq r_E^{\text{in}}$. En este caso los términos de raíz cuadrada de (77) también son diferentes. Sin embargo, a diferencia del segundo caso, los cálculos numéricos muestran una anomalía del mismo orden de magnitud que las comunicadas por Anderson et al. [13], con un valor y signo que depende de los puntos de entrada y salida de la esfera de influencia gravitatoria terrestre.

Tabla 7: Distancias respecto del Sol (r_S) y de la Tierra (r_E) de los puntos de entrada y de salida de la esfera de influencia gravitatoria terrestre para los flybys Galileo I y NEAR. Estas distancias están calculadas a partir de la ecuación (77) para el mejor ajuste con el cambio de velocidad anómalo observado (Δv_∞). También se presentan el módulo de la velocidad asintótica inicial de la nave (v_∞^{in}) y la variación relativa entre el cambio de velocidad observado y el cambio de velocidad calculado a partir de la ecuación (77). Tabla extraída de [37].

	Galileo I		NEAR	
	Punto de entrada	Punto de salida	Punto de entrada	Punto de salida
r_S (m)	1.502803×10^{11}	1.502831×10^{11}	1.495630×10^{11}	1.495950×10^{11}
r_E (m)	1.7651×10^7	1.4864×10^7	7.20000×10^7	1.2200×10^7
v_∞ (km/s)	8.949		6.851	
Δv_∞ (mm/s)	3.930		13.46	
Ec. (77) (mm/s)	3.944		13.38	
Diferencia (%)	+0.40		-0.57	

Para los flybys de la tabla 2 solo está disponible la velocidad de cada astronave en el punto de entrada (que es diferente para cada una). Las distancias a los puntos de entrada y salida respecto al Sol y la Tierra no han sido publicadas en ningún artículo. Esto presenta el problema de que no se puede comprobar si la teoría expuesta concuerda en magnitud y signo con los cambios de velocidad anómalos observados. Pese a todo, a partir de los parámetros de ascensión recta y declinación publicados por Anderson et al. [13], se pueden determinar las distancias a los puntos de entrada y salida que mejor reproducen el cambio de velocidad anómalo. En la tabla 7 se muestran los resultados que se obtienen para los flybys Galileo I y NEAR (los resultados para otros flybys no se muestran ya que los valores que se obtienen de r_E y r_S no se pueden comparar con los valores reales porque se desconocen).

En conclusión, la suposición de una velocidad de la luz c variable de acuerdo a la hipótesis de Céspedes-Curé permite explicar la anomalía flyby. Los resultados obtenidos, recogidos en la tabla 7, muestran que esta teoría es capaz de reproducir la magnitud y el signo del cambio anómalo experimentado por las sondas de la tabla 4. Para calcular estos valores es necesario conocer los puntos de entrada y salida de la sonda así como la velocidad de la misma en esos puntos. La teoría expuesta se ha particularizado para los flybys terrestres, sin embargo, su generalización a maniobras de asistencia gravitatoria alrededor de otros cuerpos celestes es inmediata. También se puede generalizar a otros métodos de seguimiento distintos del método Doppler bidireccional. Aun así, esta teoría adolece de algunos problemas. La detección de las ondas gravitatorias del experimento LIGO en 2016 [42] pone en tela de juicio las teorías de una velocidad de la luz variable (VSL, por sus siglas en inglés). Además, de acuerdo a la hipótesis de Céspedes-Curé, si la densidad de energía total $\rho \rightarrow 0$ entonces la velocidad de la luz $c \rightarrow \infty$. Esto es algo cuanto menos sorprendente ya que está en desacuerdo con la teoría de la relatividad general, una de las más probadas experimentalmente.

9. Conclusiones

La maniobra de asistencia gravitatoria constituye una potente estrategia de vuelo en misiones espaciales de largo alcance debido a la reducción en el tiempo de vuelo y energía de lanzamiento de la sonda. Esta maniobra ha sido esencial en las misiones espaciales de las últimas décadas, permitiendo un mayor conocimiento acerca del sistema solar y los planetas que lo constituyen. Algunas de las sondas que han utilizado esta estrategia de vuelo han experimentado una diferencia entre las velocidades asintóticas anterior y posterior al flyby distinta de aquella calculada de acuerdo a un modelo de las fuerzas gravitatorias y no gravitatorias del sistema solar, dando lugar a la anomalía flyby.

En aras de determinar el origen de esta anomalía primeramente se ha mostrado una estimación del impacto de algunos efectos clásicos y relativistas en la velocidad de la nave basada en los artículos de C. Lämmerzahl, O. Preuss y H. Dittus [15], P. G. Antreasian y J. R. Guinn [16] y L. Iorio [17]. La conclusión a la que se llega es que estos efectos no pueden ser responsables del cambio anómalo observado. En consecuencia, se han examinado varias líneas de investigación propuestas en la literatura: (i) Efectos de una corriente de torsión topológica, de M. J. Pinheiro [26]; (ii) Versión causal de la teoría Newtoniana, de J. C. Hafele [30]; (iii) Modificación de la inercia, de M. E. McCulloch [33]; (iv) Anisotropía de la velocidad de la luz, de E. D. Greaves, C. Bracho e I. Mikoss [37], con un origen distinto de la anomalía flyby en cada una de ellas.

Las teorías (i) y (iv) son capaces de describir de forma cualitativa la anomalía flyby. Sin embargo, debido a la falta de datos en los flybys no se puede comprobar si los cálculos realizados a partir de estas teorías se ajustan a los cambios anómalos observados. Las teorías (ii) y (iii) sí que consiguen resultados a partir de los datos de los que se dispone. La (ii) consigue unos resultados que se ajustan a los valores observados en términos de un parámetro ajustable, la velocidad de inducción v_k , mientras que los resultados de la (iii) son peores. Aun así, esta última no posee ningún parámetro ajustable, por lo que el simple hecho de lograr unos resultados decentes supone todo un logro. Pese a todo, todas las teorías presentan ciertos aspectos que les restan credibilidad.

Un hecho destacable es que en las teorías (i)-(iii) la magnitud de la anomalía flyby depende del radio R y la velocidad ecuatorial v_{eq} del planeta sobre el que se realiza la maniobra. Por lo tanto, el análisis de flybys alrededor de otros objetos celestes podría ser de utilidad en un futuro (cuando se conozca con mayor precisión el campo gravitatorio de otros planetas) para determinar si estas teorías son correctas o, por el contrario, se pueden descartar. Esto también es útil para confirmar o descartar la teoría (iv), ya que en esta la magnitud de la anomalía depende de la densidad de energía gravitatoria.

Una línea de investigación en la que no se ha profundizado son los sistemas de seguimiento de la sonda. Este trabajo se ha centrado exclusivamente en varias líneas de investigación que proponen algún cambio en la física conocida para intentar explicar y entender los cambios de velocidad anómalos. No obstante, podría no ser el caso y ser los sistemas de seguimiento los responsables de la anomalía flyby. Además, los artículos utilizados durante el desarrollo de este trabajo han estado lastrados por el escaso número de flybys del que se dispone. Una mayor base de datos podría permitir descartar algunas o todas las teorías que se han tenido en cuenta en este trabajo.

Bibliografía

- [1] Y. V. Kondratyuk, “To Whomsoever Will Read in Order to Build” In: T. M. Mel’kumov (ed), *Pioneers of Rocketry: Selected Papers*, NASA Technical Translation F-9285, 1965.
- [2] Anon. (2020). List Of Planetary Flybys [online]. Available at: https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_planetary_flybys (Accessed: 15 July 2021).
- [3] J. M. A. Danby, *Fundamentals of Celestial Mechanics*, 1st ed. (The Macmillan Company, New York, 1962), chapter 8.
- [4] J. D. Anderson, J. K. Campbell, and M. M. Nieto, “The energy transfer process in planetary flybys”, *New Astronomy*, vol. **12**, no. 5, pp. 383–397, 2007.
- [5] T. Talbert. (2019). MESSENGER [online]. Available at: https://www.nasa.gov/mission_pages/messenger/main/index.html (Accessed: 15 July 2021).
- [6] T. Greicius. (2019). Cassini at Saturn [online]. Available at: https://www.nasa.gov/mission_pages/cassini/main/index.html (Accessed: 15 July 2021).
- [7] H. D. Curtis, *Orbital Mechanics for Engineering Students*, 1st ed. (Elsevier Butterworth-Heinemann, Oxford, 2005), chapter 6.
- [8] T. Talbert. (2019). New Horizons [online]. Available at: https://www.nasa.gov/mission_pages/newhorizons/main/index.html (Accessed: 15 July 2021).
- [9] Y. Guo, and R. W. Farquhar, “New Horizons Mission Design”, *Space Sci. Rev.* **140**, pp. 49–74, 2008.
- [10] D. R. Williams. (2019). Planetary Fact Sheet - Metric [online]. Available at: <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/> (Accessed: 15 July 2021)
- [11] J. Nelson. (2019). Voyager [online]. Available at: <https://voyager.jpl.nasa.gov/> (Accessed: 15 July 2021).
- [12] T. Greicius. (2018). Juno [online]. Available at: https://www.nasa.gov/mission_pages/juno/main/index.html (Accessed: 15 July 2021).
- [13] J. D. Anderson, J. K. Campbell, J. E. Ekelund, J. Ellis, and J. F. Jordan, “Anomalous Orbital-Energy Changes Observed during Spacecraft Flybys of Earth”, *Phys. Rev. Lett.*, vol. **100**, 091102, 2008.
- [14] F. Stacey, and P. Davis, *Physics of the Earth*, 4th ed. (Cambridge University Press, Cambridge, 2008), Appendix A.
- [15] C. Lämmerzahl, O. Preuss, and H. Dittus. (2008). “Is the physics within the Solar system really understood?”. In: H. Dittus, C. Lämmerzahl, S. G. Turyshev (eds), *Lasers, Clocks and Drag-Free Control. Astrophysics and Space Science Library*, vol. **349**. Springer, Berlin, Heidelberg.
- [16] P. G. Antreasian and J. R. Guinn, “Investigations into the Unexpected delta-V Increases during the Earth Gravity Assists of Galileo and NEAR”, In., editor, *Astrodynamics Specialist Conf. and Exhibition*, pages paper no 98–4287, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1998.

- [17] L. Iorio, “The Effect of General Relativity on Hyperbolic Orbits and Its Application to the Flyby Anomaly”, Scholarly Research Exchange, 2009.
- [18] B. R. Munson, D. F. Young, and T. H. Okiishi, *Fundamentals of Fluid Mechanics*, 3rd ed. (John Wiley & Sons Inc, New York, 1998), chapter 9.
- [19] H. B. Garrett and A. C. Whittlesey, *Guide to Mitigating Spacecraft Charging Effects*, 1st ed. (John Wiley & Sons Inc, New York, 2011), chapter 2.
- [20] S. Schalkowsky, and M. Harris. (1969). SPACECRAFT MAGNETIC TORQUES [online]. Available at: <https://ntrs.nasa.gov/citations/19690020961> (Accessed: 15 July 2021).
- [21] W. Campbell, *Introduction to Geomagnetic Fields*, 2nd ed. (Cambridge University Press, Cambridge, 2003), chapter 1.
- [22] M. G. Kivelson, and C. T. Russell (Eds), *Introduction to Space Physics*, 1st ed. (Cambridge University Press, Cambridge, 1995), chapter 4.
- [23] J. D. Anderson and B. Mashhoon, “Pioneer anomaly and the helicity-rotation coupling”, *Phys. Lett.*, A315, pp. 199-202, 2003.
- [24] B. Mashhoon, “Gravitoelectromagnetism: A Brief Review”, in *The Measurement of Gravitomagnetism: A Challenging Enterprise*, L. Iorio (Ed), pp. 29-39, NOVA, Hauppauge, 2007.
- [25] A. A. Siddiqi. (2019). NEAR Shoemaker [online]. Available at: <https://solarsystem.nasa.gov/missions/near-shoemaker/in-depth/> (Accessed: 15 July 2021).
- [26] M. J. Pinheiro, “The Flyby Anomaly and the Effect of a Topological Torsion Current”, *Physics Letters A*, vol. **378**, pp. 3007-3011, 2014.
- [27] M. J. Pinheiro, “A Variational Method in Out-of-Equilibrium Physical Systems”, *Sci Rep* 3, 3454, 2013.
- [28] T. Reid, “The Effect of Aerodynamic Drag Forces on the Formation Flying of Satellites”, Thesis for Bachelor of Engineering, 2009.
- [29] M. J. Pinheiro, “Some effects of topological torsion currents on spacecraft dynamics and the flyby anomaly”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. **461**, pp. 3948-3953, 2016.
- [30] J. C. Hafele, “Causal Version of Newtonian Theory by Time-Retardation of the Gravitational Field Explains the Flyby Anomalies”, *Progress in Physics*, vol. **2**, 2013.
- [31] W. Rindler, *Relativity: Special, General, and Cosmological*, 2nd ed. (Oxford University Press, Oxford, 2006), chapter 15.
- [32] J. C. Hafele, “Earth flyby anomalies explained by time-retarded causal version of Newtonian gravitational theory”, *The Abraham Zelmanov Journal*, 2012.
- [33] M. E. McCulloch, “Modelling the flyby anomalies using a modification of inertia”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, vol. **389**, issue 1, pp. L57-L60, 2008.

-
- [34] M. Milgrom, “Dynamics with a Nonstandard Inertia-Acceleration Relation: An Alternative to Dark Matter in Galactic Systems”, *Annals of Physics*, vol. **229**, issue 2, pp. 384-415, 1994.
- [35] S. Schlamminger et al., “Test of the Equivalence Principle Using a Rotating Torsion Balance”, *Phys. Rev. Lett.*, vol. **100**, issue 4, 2008.
- [36] P. Touboul et al., “Space test of the Equivalence Principle: first results of the MICROSCOPE mission”, *Class. Quantum Grav.*, vol. **36**, issue 22, 2019.
- [37] E. D. Greaves, C. Bracho, and I. Mikoss, “A Solution to the Flyby Anomaly Riddle”, *Progress in Physics*, vol. **20**, issue 1, 2020.
- [38] R. Dicke, “Gravitation without a Principle of Equivalence”, *Reviews of Modern Physics*, vol. **29**, issue 3, pp. 363–376, 1957.
- [39] J. Broekaert, “A spatially-VSL gravity model with 1-PN limit of GRT”, *Foundations of Physics*, vol. **38**, pp. 409-435, 2008.
- [40] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation* (W. H. Freeman and Co., New York, 1973).
- [41] E. D. Greaves. (2015). The index of refraction of quasi-empty space [online]. Available at: <http://www.nuclear.fis.usb.ve/fn/wp-content/uploads/2015/07/GREAVES-ED-Index-of-refraction-of-quasi-empty-space-V11.pdf> (Accessed: 15 July 2021)
- [42] B. P. Abbott et al., “Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger”, *Phys. Rev. Lett.*, vol. **116**, 2016.