

# HAUR HEZKUNTZAKO GRADUA

2021-2022 Ikas urtea

## PROBLEMA GEOMETRIKO BATEN AURREAN HHKO HAURREK ERABILITAKO ESTRATEGIAK

EGILEA: Ane Aguirrechu Oleagordia

TUTOREA: Ainhoa Berciano Alcaraz

Leioan 2022ko maiatzaren 23an

# AURKIBIDEA

SARRERA	3
ESPARRU TEORIKO ETA KONTZEPTUALA	3
METODOLOGIA	8
Lanaren helburuak	8
Testuingurua	9
Planteatutako problema	9
Aurre ezagutza eta problemaren aurrera eramateko diseinua	10
Txokoak	10
Amaierako asanblada	10
Azken lana	11
EMAITZAK	11
Hasierako asanbleako argudioak	11
Problemaren aurrea agertutako estrategiak	15
Bost urteko haurren taldea	15
Lau-bost urteko haurren taldea	17
Lau urteko haurren taldea	19
Amaierako asanblean emandako argumentuak eta estrategiak	20
ONDORIOAK	22
Problemaren inguruan	22
Estrategiak	23
Argumentuak	24
ERREFERENTZIA BIBLIOGRAFIKOAK	25
ERANSKINAK	26
1.ERANSKINA: EMR-ren printzipioak	26
2.ERANSKINA: Matematikako curriculumean oinarritutako prozesua	27
3.ERANSKINA: Alsinasen faseak	29
4.ERANSKINA: Inplementazioa	31
5.ERANSKINA: Van Hieleren mailak	32
6.ERANSKINA: Materialaren argazkiak	34

## **PROBLEMA GEOMETRIKO BATEN AURREAN HHKO HAURREK ERABILITAKO ESTRATEGIAK**

**Ane Aguirrechu Oleagordia**  
UPV-EHU

Lan honen bitartez hurrek problema geometriko baten aurrean erabiltzen dituzten estrategiak aztertzea eta beraien argumentuak nola azaltzen dituzten ikustea bilatzen da. Horretarako HH4 eta HH5 urteko 16 haur geometria oinarri duen problema matematiko baten aurrean kokatu dira, zehazki hurrei kolore, forma eta tamaina ezberdineko piezak eskaini zaizkie eta beraiek kutxa batengatik mugatutako espazio batean ahalik eta pieza gehien sartu behar izan dituzte. Problema matematikoaz gain hurrekin asanblea ezberdinak egin dira beraien argumentuak ikusi ahal izateko. Hurrek erabilitako estrategiak eta argumentuak adinaren arabera ezberdinak izan dira. Estrategien artean, kolorearen erabilera agertu da. Azken hau, haurren adina handituz doan heinean gutxituz joan da. Beste estrategia aipagarri bat zuloak agertu diren momentuan honen aurrean hurrek hartutako jarrera izan da. Bost urtekoak bete egiten zuten bitartean, lau urtekoek estali soilik egiten zutelako. Argumentuak emateko unean berriz, bost urtekoak beraien jarduna azaltzeko gai izan diren bitartean, lau urtekoekin irakaslearen galderak ezinbestekoak izan dira. Azkenik, aipatzeaz gelditzen da, bost urteko haurrak emandako argumentu batzuk Van Hieleren bigarren mailakoak izan direla, beraz, prozesuan aurrera doaz.

Hitz gakoak: Estrategia, argudioak, geometria, problema matematikoa eta Van Hiele

Mediante este trabajo se pretende analizar las estrategias que utilizan los niños y niñas ante un problema geométrico y ver cómo explican sus argumentos. Para ello se ha utilizado una muestra de 16 niños y niñas de HH4 y HH5. El problema planteado es el siguiente: a los niños se les ha ofrecido piezas de diferentes colores, formas y tamaños y ellos mismos han tenido que introducir el mayor número de piezas posible en un espacio delimitado por una caja. Además del problema matemático con los niños se han hecho diferentes asambleas para poder ver sus argumentos. Las estrategias y argumentos utilizados por los niños y niñas han sido diferentes según la edad. Entre las estrategias ha aparecido el uso del color. Este último, a medida que aumenta la edad de los niños, ha ido disminuyendo. Otra estrategia destacada ha sido la actitud de los niños ante la aparición

de los agujeros. Los niños de cinco años llenaban el agujero mientras que los niños de cuatro años sólo los cubrían. En el momento de argumentar, mientras que los cinco años han sido capaces de explicar su acción, con los de cuatro años las preguntas del profesor han sido imprescindibles. Finalmente, queda por mencionar que algunos de los argumentos aportados por el niño de cinco años han sido del nivel dos de Van Hiele, por lo que se avanza en el proceso.

Palabras clave: Estrategia, argumentos, geometría, problemas matemáticos y Van Hiele

The aim of this work is to analyse the strategies used by children when faced with a geometric problem and to see how they explain their arguments. For this purpose, a sample of 16 boys and girls of HH4 and HH5 has been used. The problem posed is the following: the children have been offered pieces of different colours, shapes and sizes and they themselves have had to introduce as many pieces as possible in a space delimited by a box. In addition to the mathematical problem, different assemblies were held with the children in order to see their arguments. The strategies and arguments used by the children have been different according to their age. Among the strategies has appeared the use of color. The latter, as the age of the children increases, has been decreasing. Another strategy that stood out was the attitude of the children to the appearance of the holes. The five-year-olds filled the hole while the four-year-olds only covered them. At the moment of arguing, while the five-year-olds were able to explain their action, with the four-year-olds the teacher's questions were essential. Finally, it remains to be mentioned that some of the arguments provided by the five year old were of Van Hiele's level two, thus advancing the process.

Keywords: Strategy, arguments, geometry, mathematical problem and Van Hiele.

## **SARRERA**

Hurrengo lan honetan “problema matematikoen trataera haur hezkuntzako geletan” gradu amaierako lana aurkezten da. Lan honetan eskola publiko bateko 4-5 urteko gelan egindako ikerketa bat azaldu da. Ikerketa honen gaia haurrek geometria problema baten aurrean erabiltzen dituzten estrategiak ezagutzea da.

Gai honen aukeraketa bi arrazoi nagusigatik eman da. Alde batetik, HHko graduko ikaskideek matematiken inguruan duten iritziagatik, zein orokorrean nahiko negatiboa den. Bestalde, egindako praktikaldietan HHko ikasgeletan matematikaren erabilera ezaren inguruan egindako hausnarketagatik, izan ere, orokorrean ez zaio inolako garrantzirik ematen eta matematikak dituzten onurak ez dira ezagutzen. Gainera, nire biziaren zehar matematikarekiko izan dudana esperientzia oso polita izan da eta denbora pasa edo jolas bezala erabiltzeko oso interesgarria iruditzen zait. Beraz, matematikarekiko dudana zaletasuna transmititzea gustatuko litzaidake. Horrez gain, matematikaren barnean geometria atala aukeratu da, haurren ingurua geometriaz beteta dagoelako, geometriak bere baitan beste ideia eta kontzeptu batzuek hartzen dituelako eta haurren ondorengo gaitasun matematiko egokirako onuragarria izan daitekeelako.

Halaber, ikerketa honekin lortu nahi diren helburuak ondorengoak dira: Haurrek problema geometriko baten aurrean erabiltzen dituzten estrategiak aztertzea eta beraien argumentuak nola azaltzen dituzten ikustea.

Amaitzeko aipatzear gelditzen da, lan hau hiru atal nagusitan bereiztu dela, esparru teoriko eta kontzeptuala, metodologia eta emaitzak eta ondorioak. Horrez gain, lanaren hasieran laburpena eta sarrera aurkitzen dira, eta emaitza eta ondorioei jarraiki erabilitako bibliografia eta eranskinak agertzen dira.

## **ESPARRU TEORIKO ETA KONTZEPTUALA**

Azken urteotan, nazioarteko zenbait erakundek, hala nola, Europar Batasuneko Lankidetzaren eta Garapen Ekonomikorako Erakundeak (ELGA, 2006) edo Ameriketako Estatu Batuetako Matematika Irakasleen Kontseilu Nazionalak (NCTM, 2000), eduki matematikoak eskuratzera soilik bideratutako curriculum batetik abiatzeak, matematika

irakasteko unean dakarren arazoaz ohartarazi dute. Oso modu sintetikoan, organismo horiek adierazten dute matematikaren irakaskuntza edukietan soilik zentratzea baliagarria izan daitekeela eskolan errendimendu matematiko ona izateko, baina horrek ez du esan nahi ikasitako edukiak eguneroko bizitzan aplikatzeko behar den gaitasuna lortzen denik (Alsina, 2012b). Horrekin lotuta Niss-ek (2002, apud Alsina, 2012b) azaltzen du edukietara bideratutako begirada hori sinboloak eta teknikak eskuratzean zentratzen dela soilik, eta ez hainbeste horien erabilera esanguratsuan.

NCTMk zehaztu duenez, ikaskuntza esanguratsua gerta dadin, ikasgelan planteatutako jarduerak honako hau sustatu behar dute: Ezagutza matematiko berriaren eraikuntza, problema matematikoak edo beste testuinguru batzuek planteatzea eta askotariko estrategiak aplikatu eta egokitu ahal izatea (Berciano, Jiménez, Salgado, 2017).

Problema ebaztean zentratuz, NCTMren curriculum-proiektuak (2000), interes berezia ematen dio "problema ebaztea" estandarri. Ikasleek problema konpontzen ikasten dutenean, pentsamendu-prozesu ordenatuak garatzen dituztelako, eta, pixkanaka, problema mota jakin batzuetarako estrategia egokiak aurkitzeko gaitasunak garatzen direlako. Horri esker, matematika ulertzeko modu berriak garatzen dira (Sepúlveda, Medina eta Itzel, 2009).

Problema matematikoak izan behar dituzten ezaugarriei dagokienez, Santosek (1997, apud Sepúlveda et al., 2009) zenbait irizpide iradokitzen ditu:

- Problema aurrekari edo baliabide matematiko desberdinak dituzten ikasleen eskura egon behar dira.
- Problema hausnarketa plan bat eskatu behar dute.
- Problema konponbide bat baino gehiago izan behar dute.
- Problemen soluzioek ideia matematikoen erabilera ahalbidetu eta erraztu behar dute.
- Problema hainbat miaketa matematiko egiteko plataforma gisa erabili behar dira.
- Ikasle batek problema bat ebazten duenean, erabilitako prozesuak eta eragiketak identifikatu ahal izango dira.

- Ikasleek aldeztatik aurretik ikasitako esperientzia eta baliabide matematikoak naturaltasun batekin erabil edo eskura ditzaketen testuinguruetan kokatu behar dira problemak.

Aldi berean, problema matematikoez hitz egiten denean kontzeptu oso zabal batez hitz egiten da. Hau horrela delarik, Blancok (1993) zortzi problema matematiko mota bereizten ditu, ikerketa honetan benetako egoerei buruzko arazoak erabili da. Azken hau, trebetasun, kontzeptu eta prozesu matematikoak erabiltzea eskatzen duten egoera errealetatik ahalik eta hurbilen dauden jarduerak planteatzean datza. Beste informazio mota batzuek agertu arren matematikak ezinbestekoak izango dira konponbidea aurkitzeko. Azken hau, datuak antolatzen, sintetizatzen eta irudikatzen laguntzen duen tresna da, prozesuan hartzen diren erabakiei esanahia emanez.

Planteatzen den problemak geometrian izango du oinarria. Geometria, zuzeneko edo zeharkako era batean, gizartearen aurrerabiderako, ikasketarako edo birsortzeko egiten diren hainbat jarduerarekin lotzen da. Geometria garrantzitsua izango da, gizakiak, formen pertzepzioaren bidez, hura inguratzen duen espazioaren bidez eta bizi den mundua sortu eta eraldatzeko behararen bidez, zentzumenei esker hautematen duena azaltzeko modua bilatu duelako. Geometria gizakiarentzat bere mundua deskribatzea eta eraikitzea ahalbidetzen dion hizkuntza unibertsala da, baita mundu horri buruz duen pertzepzioa gizateriaren gainerako kideekin partekatzeko era ere (Vargas eta Gamboa, 2013).

Bestalde, Matematikako Irakasleen Kontseilu Nazionalak (NCTM) (2003) geometria, ikasleak forma eta egitura geometrikoak aztertzeko eta haien ezaugarriak eta erlazioak aztertzen ikasteko erabiltzen duen tresna gisa aipatzen du. Aldi berean, espazioaren bistaratzea pentsamendu geometrikoaren alderdi garrantzitsu gisa adierazten du (Vargas eta Gamboa, 2013).

Beraz, geometriak eta arrazoiketa espazialak lotura handia dute elkarrekin, eta matematikako hezitzaile gehienek badirudi arrazoiketa espaziala hartzen dutela geometriako curriculumaren zati gisa. Arrazoiketa espaziala, prozesu kognitiboen multzoan datza, eta horien bidez objektuen irudikapen mentalak, erlazioak eta eraldaketa espazialak eraiki eta manipulatu dira. (Clements, Battista, 1992 ).

Ondorioz, geometria hauren pentsamendu espaziala garatzeko baliagarria da. Ikerketa Kontseilu Nazionalak pentsamendu espaziala edukian oinarritutako diziplinatzat hartzen ez duen arren, txostenak azpimarratzen du pentsamendu espazialak honako hiru gauza hauen ezagutza inplikatzeko duela: espazioa, errepresentazioa eta arrazoiketa; hirurek lotura sendoak dituzte geometriarekin. (Dindyal, 2015).

Horrez gain, Bruce eta Hawesen ikerketan (2015, apud Dindyal, 2015) agerian geratzen da, ikasleen pentsamendu espaziala hobetzeak efektu bikoitza izan dezakeela, non arrazoiketa espazialaren hobekuntzak oro har matematikaren hobekuntza gisa ere ikus daitezkeen. Beraz, haurrek forma eta irudiekin lan egiteko, haurrek objektu geometrikoen ereduak mugitzeko aukera izan behar dute, eta transformazio geometrikoetan gertatzen denaz ohartarazi behar dira, hala nola irristadura, isla eta errotazioa

Beraz, ondorioztatu dezakegu, geometria eta arrazoiketa espaziala lehen haurtzarorako edozein ikasketa-planen parte izan beharko luketen arlo garrantzitsuak direla (Dindyal, 2015).

Halaber, Matematikako Irakasleen Kontseilu Nazionalak (1989, apud Clements, Battista, 1992) ikasle guztiek, geometriaren inguruan Curriculumak eskatzen dituen hurrengo estandarrak bereganatu behar dituztela adierazten du:

- Figura geometrikoak bi eta hiru dimentsiotan identifikatzea, deskribatzea, alderatzea, moldatzea, marraztea eta sailkatzea.
- Espazioaren ideia garatzea.
- Figura geometrikoen eraldaketa, konbinazio, azpizatiketa eta aldaketaren ondorioak aztertzea.
- Figura geometrikoen propietateak eta haien arteko erlazioak ulertzea, aplikatzea eta ondorioztatzea.
- Geometria mundu fisikoa deskribatzeko eta modelatzeko bitartekotzat hartzea.

Euskal herriko curriculumean zentratuz geometria eta espazioaren inguruko hurrengo aipamenak aurkitzen dira: Matematikarako kompetentzia aipatzean, azken hau, errealitatea ulertu eta interpretatzeko tresnak eskuratzean zentratzen da, ondoren tresna



horien bidez, errealitateko elementuak identifikatzea eta elementu horien arteko erlazioak, formak, denboraren erabilera eta espazioaren adierazpena zehaztuko da. Horrez gain, agertzen diren edukien artean bai espazioari eta baita geometriari ere erreferentzia egiten zaio. Espazioari, “Norberak eta objektuek espazioan duten kokapena. Posizio erlatiboak.” Geometriari, “Inguruneko elementuen forma lauak eta hiru dimentsiokoak identifikatzea. Oinarrizko gorputz geometriko batzuek esploratzea.” Horrez gain ebaluazio irizpideetan zentratzean aipatu egiten dira ere, “Espazio-nozioak erabiltzen ditu bere burua eta objektuak kokatzeko.” (237/2015 Dekretua, 2015-12-22).

Geometrian sakontzeko, Haur Hezkuntzako etaparako, Van Hieleren arrazoiketa geometrikoaren mailak aztertu dira. Maila horiek subjektuen adin kronologikoari lotuta ez dauden ikaskuntza-mailatzat hartzen diren arren, kasu gehienetan haur hezkuntzako haurrek 1. maila baino ez dute lortzen, baina 1. eta 2. mailak lor daitezkeela ikertu da. (Berciano et al., 2017). Maila batetik bestera aurrera egitea hezkuntza-esperientzien mende egongo da. Esperientzia batzuek erraztu edo eragotzi egin dezakete maila baten barruan edo goragoko maila batean aurrera egitea (Mason, 2009).

Lehenengo mailan ikertu da pertsona gai dela figura geometrikoak bere forma globalagatik ezagutzeko, baina ez du horien zatirik bereizten eta ez da gai figuren propietate determinatzaileak azaltzeko. Deskribapen bisualak, ukipenezkoak eta abar egiten ditu, eta inguruko objektuekin alderatzeko gai da (Berciano et al., 2017). Maila honetan, haurrak ikusmen-ezaugarrien azpimultzo bakarrari jarri diezaioke arreta, halaber forma komun asko identifikatzeko edo klase bereko figurak bereizteko gai ez dira izango (Clements, Swaminathan, Zeitler, Sarama, 1999). Honen adibide hurrengoa izan daiteke, laukizuzen bat itxura hori duen figura bat da (lauki bat marrazten edo identifikatzen du  $90^\circ$ -ko angelu guztiekin eta bi alde luze eta bi laburrekin) (De Villiers, 2010).

Bigarren mailan berriz, pertsona gai da figura geometrikoen zatiak eta propietateak ezagutu eta aztertzeko, eta horien bidez ezagutzen ditu. Propietateak modu enpirikoan ezartzen dira, manipulazioaren eta esperientziazkoaren bidez (Berciano et al., 2017). Honen adibide bat hurrengoa izan daiteke, hitz gutxitan azaldu daitekeena era luzeago batean egitea; adibidez, laukizuzen bat lauki bat da, kontrako aldeak paraleloak eta berdinak dituen, angelu guztiak  $90^\circ$ -koak, diagonal berdinak, buelta erdiko simetria,

kontrako aldeetatik igarotzen diren simetria-ardatz bi, bi alde luze eta bi labur, etab (De Villiers, 2010).

Hurrei maila horietatik igarotzen laguntzea funtsezko hezkuntza-helburutzat har daiteke (Clements et al., 1999). 1. mailatik 2. mailara igarotzeak hizkuntza bereganatze hutsa baino zerbait gehiago dakar. Kontzeptuen arteko erlazio berriak ezagutzea eta lehenik dauden kontzeptuak hobetzea eta berritzea eskatzen du (De Villiers, 2010). Ikasle bat 1. mailatik 2. mailara igaro dadin erlazioen berrantolaketa esanguratsua eta kontzeptuen fintzea gertatu behar da. Beraz, trantsizio honetan ezagutza intuitiboaren hitz-jartze hutsa baino askoz gehiago dago; hitzez esatearekin batera, ezagutzaren berregituraketa ere dagoelako. Berregituraketa hori ikasleak 3. mailan propietate horien arteko harreman logikoak esploratzen hasi aurretik egin behar da. Van Hielek (1973:94) honela adierazten du: "3. mailako harreman-sarea modu esanguratsuan soilik ezar daiteke, 2. mailako harreman-sarea behar bezala ezarrita dagoenean. Bigarren harreman-sarea modu egokian agertzen denean, non egitura agerikoa den eta gainontzekoekin hitz egin daitekeen, orduan prest egongo dira 3. mailako eraikuntza-blokeak "(De Villiers, 2010).

Horrez gain, aipatzekoa da geometriaren irakaskuntza ez dela soilik haurraren ezagutzak eta trebetasunak indartzean oinarritu behar; aitzitik, haurraren gaitasun eta sentimenduetan ere oinarritu behar da. Eskolako programak figura geometrikoetan eta horien irudikapenetan oinarritu beharko lirateke. Azkenik, haurra ebaluatzeko unean haurrekiko konfiantzazko ingurune batean egin behar dela, eta ez da soilik ikaskuntzaren produktuetan oinarritu behar (Dindyal, 2015).

## **METODOLOGIA**

Metodologiaren atal honetan lehenik eta behin lanaren helburuak zehaztuko dira. Ondoren, problema aurrera eramanean den testuingurua azalduko da. Azkenik, planteatutako problemaren inguruan hitz egin da.

### **Lanaren helburuak**

Metodologia atalarekin hasteko ikerketa honekin lortu nahi diren helburuak argi izatea beharrezkoa da, ondorengoak dira lortu nahi diren helburuak: Haurrek problema

geometriko baten aurrean erabiltzen dituzten estrategiak aztertzea eta beraien argumentuak nola azaltzen dituzten ikustea. Galdera horiei erantzuna bilatzeko ikerketa kualitatiboa erabiliko da. Ikerketa kualitatiboa gauzatzeko, hurrek jardueretan zehar izandako elkarrizketak, ikasle-irakasle arteko elkarrizketak, landa-oharrak eta audio-transkripzioen behaketa erabili da. Behaketaren oinarri gisa Van Hieleren mailetan oinarritutako taulan agertzen diren puntu nagusiak erabili dira. Van Hieleren mailen taulak ikusi nahi izatekotan (ikus 5.eranskina)

### **Testuingurua**

Behaketen ildo nagusiak argiturik izanik, ikerketa honen partehartzaileak definituko dira. Hauek, HH4 eta HH5 urteko ikasleak izan dira. Aipatzekoa da eskola honetan adin horietako haurrak nahastuta dauela eta hartu den lagina 16 ikaslez osatutako gela batekoa dela, non 8 ikasle HH4koak diren eta beste 8 ikasle HH5ekoak. Hala ere, aipatzekoa da covid-19a dela eta lau urteko bi haur isolatuta egon direla eta horren ondorioz 14 ikasle izan dira jardueretan parte hartu dutenak. Gela horretan dauden ikasleen adin tartea lau urtetik sei urte arte da, halaber laginaren parte diren haurren artean bi urteko tartea dago.

### **Planteatutako problema**

Lehen aipatu den moduan hurrei geometria oinarri duen problema matematiko bat planteatu zaie. Horretarako kutxa bat eta forma, kolore eta tamaina ezberdinetako piezak erabili dira. Pieza hauek problema honetarako sortutako egurrez egindako piezak dira, guztira 32 pieza ezberdin daude, non lau kolore bereizten diren, gorria (6), urdina (9), berdea (7) eta morea (10). Horrez gain, pieza hauetan forma berdineko hiru tamaina ezberdin daude. Erabili den materialaren argazkiak ikusi nahi izatekotan ikus. 6.eranskina.

Aurretiaz aipatutako puntuak, EMR-ren printzipioak (ikus 1.eranskina), matematikako curriculumak eskaintzen dituen prozesuak (ikus 2.eranskina) eta Alsinaren faseak (ikus 3.eranskina) kontuan izanik, hurrengo inplementazioa gauzatu da. Atal bakoitzean aurreko puntuen ze atal lantzen den ikusi nahi izatekotan (ikus 4.eranskina)

### Aurre ezagutza eta problemaren aurrera eramateko diseinua

Jardueren sekuentziari hasiera emateko irakaslearekin batera talde guztia korroan bildu da. Bertan, irakasleak haurrei egurrezko figura geometriko ezberdinak aurkeztu dizkie. Horretarako, bost figura ezberdin kutxatik atera eta haurrei beraien ezaugarrien inguruan galdetu die. Geroago, piezen inguruko hurrek esandako ezaugarriak kontuan izanik, pieza bakoitzari izen bat jarri zaio, azken hau hurrek aukeratutakoa izan da. Ondoren irakasleak haurrei piezak banan banan eman dizkie, beraien figura hauek ukitu eta esploratu ahal izateko. Ondoren jolas bat planteatu die, lehendik aurkeztutako figurak lerro zuzen batean lurrean kokatu ditu eta haurrei begiak ixtea eskatu die. Geroago, irakasleak figuretako bat ezkutatu du. Hurrek berriro ere begiak ireki dituzte eta ze figura desagertu den asmatu behar dute. Jarduera hau 15 minutuz errepikatu da, taldeko haur bakoitzari behin egiteko aukera emanaz. Honi esker, haurrak figuren ezaugarrietan arreta jartzea eta hauek ezagutzen joatea bilatzen da.

Jolasa bukatu talde handia 4-5 umez osatutako hiru talde txikitik banatu da. Lehenengo taldeko partaideek 5-6 urte dituzte, bigarren taldekoek, 4-5 eta hirugarren taldekoak 4 urte. Banatuta daudelarik taldeak banan jardueraren hurrengo fasera igaro dira.

### Txokoak

Talde txikietan banatuta daudelarik, irakasleak erronka planteatu die. Pieza guztiak kutxatik atera ditu eta haurrei altuera maximo bat igaro gabe ia pieza guztiak kutxa barruan sartzeko gai ziren planteatu die. Ondoren, jarduera burutzeko talde bakoitzari behar bezain denbora eskaini die. Batzuek 25minutu iraun dute, beste batzuek, 20 eta azken taldeak 15 minutu.

### Amaierako asanblada

Txokoen momentua bukatua delarik haurrak berriro ere talde handian bildu dira. Bertan, irakasleak, planteatutako arazoaren inguruan hitz egitera animatu ditu, nola lortu duten, zer iruditu zaien, gustatu zaien ala ez... galdetuz. Honen bitartez haurren jakintzak ezagutzea eta hurrek beraien jakintza nola transmititzen duten ikustea bilatzen da.

## Azken lana


Jarduera sekuentziarekin bukatzeko hurrei egindakoaren inguruko irudi bat egitea eskatu zaie. Honi esker haurrak prozesuan zehar barneratutakoa ikusi ahal izan da.




## **EMAITZAK**

Atal honi esker, aurretiaz planteatutako helburuei erantzuna bilatu zaie. Horretarako, problemaren planteamenduaren barnean egindako ataletatik hurrek erabilitako argumentuak eta estrategiak kontuan hartu dira. Egindako lehenengo asanbleatik hurrek emandako argumentuen maila aztertu da. Ondoren, problemaren aurrean, haur talde bakoitzak erabilitako estrategiak aztertu dira. Azkenik, amaierako asanbleari esker, hurrek emandako argumentuak eta horrekin batera prozesuan erabilitako estrategiak aztertu dira.

## **Hasierako asanbleako argudioak**

Hasierako asanblea honi esker haurrak piezen ezaugarrietan arreta jartzeko unean zer nolako argumentuak erabili dituzten aztertu da. Horrekin batera, esaten dutena Van Hieleren mailetako ezaugarriekin lotuz. Horretarako, piezak aurkezteko unean hauek banan atera dira eta hurrei beraien ezaugarrien arabera izen bat jartzea eskatu zaie. Hona hemen pieza bakoitzarekin izandako elkarrizketa zatiak:

 <p><i>Irudia 1: Gorri</i></p>	 <p><i>Irudia 2: Kubito</i></p>	
<p>IK1: Deko forma bat IR: Ze forma deko? Zerena? IK2: Da L IR: L forma deko?</p>	<p>IR: a ber eta zeren antza deko? IK: kubitoa IK2: Hirukia</p>	<p>IK6: Eta puntak? IK2: Kaxa IK2: Zortzi</p>

<p>IK3: Eezz</p> <p>IK2: Bai</p> <p>(Denbora bat igaro da)</p> <p>IK3: Ez L forma hori ez da, (arbelera doa eta L bat idazten du) L forma da hau</p> <p>IR: IK3k esaten du ez dekola L forma</p> <p>IK2: Bai IK3, begira ikusi (pieza hartzen du eta posizio batean jartzen du)</p>	<p>IR: Kuboa</p> <p>IK2: Kuboa eta morea</p> <p>IK5: Eta laukia</p> <p>IR: Eta zeren antza deko?</p>	<p>IR: IK2 zortzi dekoz? Konta a ber</p> <p>(IK6 erpinak kontatzen hasten da)</p> <p>IK6: 1,2,3,4 (Pieza errotatu) 5,6,7, 8 (Pieza errotatu)9,10, 11,12(Pieza errotatu) 13,14, 15 ,16 (gero eta baxuago esaten ditu eta azkenean irakasleari begiratzen dio)</p> <p>IR: kontakodugu danon artean?</p> <p>IK: Baaaiiii</p> <p>GUZTIOK:: 1,2,3,4,5,6,7,8</p>
 <p><i>Irudia 3: T txikia</i></p>	 <p><i>Irudia 4: L letra</i></p>	 <p><i>Irudia 5: Palito</i></p>
<p>IR: a ber hau</p> <p>IK: morea</p> <p>IR: morea da bebai, bai eta zeren antza deko?</p> <p>IK4: Teilatua</p> <p>IR: Teilatuan antza?</p> <p>IK2: Ez, T baina txikia</p> <p>IK4: Teilatua baina horrela (pieza errotatzen du)</p> <p>IR: teilatua horrela, bale</p> <p>IK4: hau da tximenea</p>	<p>(Irakasleak aurreko piezen izenak erreparatzen ditu)</p> <p>IR: eta zelan deituko diogu honeri?</p> <p>IK: gorri</p> <p>IR: honeri zelan deituko diogu?</p> <p>IK4: more</p> <p>IK1: kubito</p> <p>IR: Kubito igual hobeto, eta honeri</p>	<p>IR: eta a ber hau</p> <p>IK4: palito</p> <p>IR: Palito?</p> <p>IK 1 eta 2: I</p>

<p>IR: bale hau da teilatua eta hau tximenea (Pieza berdineko bi atal ezberdinei egiten die erreferentzia) IK6: eta T</p> <p>IR: eta horrela T txikitxo bat (IK1ek bi pieza bata bestearen ondoan kokatzen ditu)</p> <p>IK1: eta hau ipintzen baduzu holan, hau ipintzen duzu holan.</p>	<p>IK2: T</p> <p>IK4 eta IK5: more</p> <p>IK1 eta IK8:T</p> <p>IR: eta honeri? (atera berri den pieza)</p> <p>IK4 eta 5: more</p> <p>IK1 IK2 eta IK4: L</p> <p>IK2: IK3 ez dakizu</p> <p>IK8: da L begira</p> <p>IR: L forma deko IK8?</p> <p>IK8: Bai</p>	
--	--	--

Lehenengo pieza aurkezterakoan parte hartu duten ikasleak bost urteko haurrak izan dira. Ikusi izan da errotazioak erraztasunez engaina ahal dituela eta batzuek ezaugarri konkretuetara jotzen duten bitartean beste batzuek pieza orokortasunean hartzen dutela. Hau da, Van Hieleren lehenengo mailako ezaugarri bat betetzen da, haurrak ez dira gai figura mota jakin baten aldakuntza amaigabeetan pentsatzeko (De Villiers, 2010). Gainera, gatazkaren aurrean ez da adostasunik egon eta bakoitzak bere ideia mantendu eta defendatu du. Horrekin lotuta, Van Hielek bigarren mailan aipatzen duen beste ezaugarri bat betetzen da, zehazki, beste pertsona batek emandako definizioak ez ditu onartzen eta norberaren definizioen alde egiten du (De Villiers, 2010).

Bigarren pieza aurkezterakoan, IK 4 5 eta 6 lau urteko umeak izan dira eta IK2 bost urtekoa. Ikusi izan da lau urteko umeak hiru dimentsioko figurak bi dimentsioko figurekin erlazionatzeko ahalmena dutela, baina aldi berean hauek nahastu egiten dituztela. Horrez gain aipatzekoa da bost urteko haurren artean hirukia bezalako izenak ezagunak egiten zaizkiela, nahiz eta hauek zeintzuk diren ez identifikatu. Gainera, talde gisa piezaren ezaugarrietan sakontzeko interesa piztu da, izan ere beraiek izan dira, piezaren erpin kopurua kontatzea proposatu dutenak. Erpin kopuruarekin jarraituz, ikusi izan da bost urteko haurrek honen kopurua adierazteko erraztasunak adierazten dituztela

eta berriz lau urteko umeen kasuan errotazioak erraz engainatzen dituela, pieza biratzen zuen bakoitzean beste lau erpin agertzen zaizkiolako.

Hirugarren piezaren aurkezpenarekin lotuta, esan daiteke parte hartu duten haurren artean bost eta lau urteko haurrak daudela. Ikusi izan da pieza bat deskribatzeko unean lehenengo joera koloreari erreferentzia egitea dela baina beste era bateko antzekotasunak bilatzeko gai direla. Izan ere, kolore berdineko pieza bat baino gehiago ateratzeak horrek koloreagatik soilik definitzea baliagarria ez dela adierazi du. Hala ere, ikusi izan da Van Hieleren lehenengo mailari erreferentzia eginez, haurra sarritan, ikusizko propietate hutsalak erabiltzen dituela figurak identifikatzeko, alderatzeko, sailkatzeko eta deskribatzeko unean (De Villiers, 2010). Horrez gain, aipatzekoa da, bost urteko haurren artean pieza ezberdinen arteko erlazioak egiteko gaitasuna dutela, begi hutsez eta piezak ukitu gabe, bi piezak ahokutzen dutela ondorioztatzen dutelako, Nahiz eta ondoren era praktikoan frogatzeko beharra eduki. Azken hau Van Hileren bigarren mailako, egia ezartzeko ikuspegi enpirikoa erabiltzen du, ezaugarriarekin bat dator (De Villiers, 2010).

Laugarren piezaren aurkezpenarekin batera, ikusi izan da bost urtekoak formaren arabera identifikatzen duten bitartean lau urtekoak oraindik ere kolorean zentratzen direla. Izan ere, piezak nahiz eta guztiz ezberdinak izan guztiei more izena jarri nahi diotela ikusi da. Azken hau, Van Hieleren lehenengo mailako ondorengo ezaugarriarekin lotu daiteke: Figuren sailkapen inkoherenteak erabiltzen dituzte; adibidez, propietate hutsalak erabiltzea (De Villiers, 2010). Hala ere, bost urtekoak proposatzen dituzten izenak onartzen dituzte eta momentu batetik aurrera horrela deitzen hasten dira. Gainera aipatzekoa da IK2 eta IK3ren artean lehen egon den desadostasunak oraindik jarraitzen duela. Izan ere, oraingoan ateratako piezak L itxura handiagoa duelako.

Azken pieza aurkeztean argi geratu da piezak letrekin konparatzeko dagoen joera. Izan ere, jarduera burutu zen egunetan letrak lantze zeudelako.

Piezak aurkeztuta daularik ikasleei hauek esploratzeko momentu bat eman zaie eta banan piezak ukitu dituzte. Hemen ikusi izan da pieza berdina haurren mundua inguratzen duten zenbait gauzekin konparatzeko gai direla. Besteak beste, autobusak, tximiniak, hidrogelaren botea... Esplorazioaren ondoren planteatu zaien jolasean ikusi



izan da haurrak begiak ixterakoan, nahiz eta piezaren bat errotatu edota pieza bat baino gehiago kendu, falta zen pieza identifikatzeko gai izan direla.

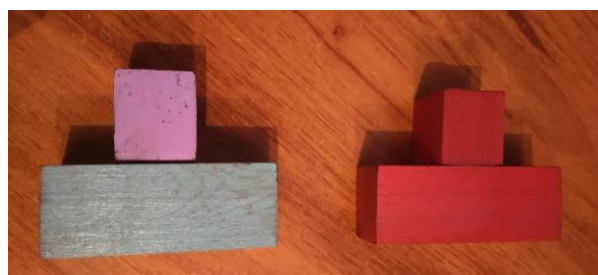
### **Problemaren aurrea agertutako estrategiak**

Txokoen unean zentratuz, azken hau hiru talde txikietan egin da, bost urteko haurrak, lau-bost urteko haurrak eta lau urteko haurrak. Talde bakoitzari problema ebazten hasi aurretik piezak ezaugarri ezberdinen arabera sailkatzea eskatu zitzairen. Jarduera hauetatik, haurrak adinaren arabera, problema baten aurrean erabiltzen dituzten estrategia ezberdinak aztertu dira.

#### Bost urteko haurren taldea

Lehenengo taldea bost urteko haurren taldea izan da, azken hau, hiru neska eta bi mutil ez osatu da. Nesken artean, jarduna gidatzeko nahiarekin liskarrak sortu dira. Bestalde mutilen kasuan ez da inolako interesik egon jarduera egiteko unean, horietako bat pieza batzuek hartu eta eraiketak egiten hasi da, besteak berriz, momentu batean pieza kuxara sartzen saiatu da, baina hiru neska “IK9 que asi no” esan eta berak jarritako pieza atera dute. Horren aurrean ez du bestelako saiakerarik egin.

Txokoetako lehen momentuan, kuxaren erronka planteatu baino arinago taldea piezak beraien artean erlazionatzen eta beste batzuek sortzen hasi ziren. Sortutako piezak hasierako asanblean aurkeztutako piezen antzekoak izan ziren.



*Irudia 7: Figuren deskonposizioa*

Sailkapenaren momentuarekin jarraituz, talde honek, piezak, kolorearen, formaren eta erpin kopuruaren arabera sailkatu zituen. Gainera, momentu honetan berriro ere talde lanaren falta agerian geratu zen, pieza berdina haur batek baino gehiagok kontatzen zutelako edota batek multzo batean kokatutako pieza beste batek lekuz mugitzen zuelako ezer ez esan gabe.

Nahiz eta erpinen arabera sailkatzea beraien ideia izan, hauek kontatzen hasteko unean arazoak izan zituzten eta piezetako asko, nahiz eta forma berdina eduki, erpin kopuru ezberdina zutela jarri zuten.



*Irudia 8: Bost urte, formaren arabera*



*Irudia 9: Bost urte, erpinaren arabera*

Planteatutako erronkarekin jarraituz, azken honi soluzioa bilatzeko pieza txikienak eta konbinatzeko errazenak zirenetatik hasi ziren, ondoren tamaina handiagoa eta forma aldetik konbinatzeko zailagoak zirenekin jarraitu zuten. Pieza zailagoak sartzeko errazagoak direnak mugitzen hasi ziren, zailei tokia egiteko. Kasu honetan, ez zen kolorearen araberrako erabakirik hartu eta tamainaren garrantzia txikia izan zen. Izan ere, pieza handi batzuek sartzeko unean arazoak izan zituzten eta horietako batzuek kanpoan gelditu ziren. Bestalde, kutxan zeuden pieza luzeenak erabili zituzten.

Prozesu guztian zehar piezen errotazioa estrategia eta baliabide gisa erabili zuten, azken hau nahiz eta baten baino gehiagotan eman, hurrengo bi egoerak esanguratsuenak izan ziren. Momentu batean hurrek pieza bat etzanda jarri zuten eta honen zergatia galdetzerakoan bestela honek altuera maximoa pasatzen zuela erantzun zuten.

- IR: eta zergatik jarri dozue pieza hau hemen horrela eta ez zutunik?
- IK8: zergatik bakarrik egin ahal dira bi fila

Beste egoera bat, Z itxura duen pieza batekin eman zen, hau kokatzeko zailtasunak agertu zitzaizkien, baina, pieza eskuen artean hartu eta hau alde batera eta bestera mugitzen hasi ziren. Azkenik, piezaren posizio egokia aurkitu zuten eta sortutako zuloa estali zuten. Hona hemen errotazioaren inguruan hurrek izandako beste elkarrizketa zati batzuk:

- IK1: hau ez, hau ez hau ez
- IK8: ba hori tumbata, ze ipini behar da dena

- 
- IK1: pues este igual es asi
  - IK8: nonono este tiene que ser por aqui
- 

- IK8: IK1 hau izan behar da horrela joe

Bost urteko haurren taldearekin bukatzen joateko aipatu beharra dago kanpoan gelditu ziren piezen zergatia zorizkoa izan zela, izan ere, hurrei zergatiaz galdetu eta lekurik gabe gelditu zirela esan zuten. Azkenik, harrigarria izan da haurretako batek, piezak sartzen ez zirela ikusi zuenean hauek ezkututzen saiatu zela.

#### Lau-bost urteko haurren taldea

Txokoetara sartutako bigarren taldea, lau bost urteko haurrak nahastuta zituen taldea izan da, azken hau, lau urteko bi umez eta bost urteko hiru umez osatuta egon da. Harrigarria izan da, bost urtekoekin ez bezala, kasu honetan, mutilak izan direla ekintza burutu dutenak, nesken arreta beste toki batean zegoen bitartean.

Erronka planteatu baino arinago hurrei aurreko egunean piezei jarritako izenak gogoratzea eskatu zaie eta hau oso ondo egin zuten. Ondoren, piezen sailkapena egitea eskatu zitzaientean, hauek kolorearen arabera erraztasunez egin zuten, baina forma kontzeptua agertu denean zailtasunak agirian gelditu ziren, hala ere denborarekin sailkapen hau era egoki batean egitea lortu zuten. Erpin kopuruari dagokionean, azken hau ez zen aipatu ere egin.



*Irudia 10: Lau-bost urte, formaren arabera*

Erronka planteatzeko unean, bost urtekoei bezala, talde honi altuera batetik gora piezak ez jartzea eskatu zitzaien. Kasu honetan argi geratu da bost urtekoek kontzeptu hori bereganatuta zutela, berriz, lau urtekoen kasuan, baldintza horrek ez zuen inolako eraginik. Hona hemen lau eta bost urteko haurrek prozesuan zehar izandako elkarrizketen zatiak:

- IK4: IK6 zaude pasatzen
- IK6: ez
- IK4: que begira

—

- IK4: eta IK6 betikolez pasatu da
- IK6: ez

Gainera, aipatzekoa da etapa honetan koloreen erabilera nahiz eta guztiz argia ez izan indarra hartzen zuela, izan ere, pieza guztiak kokatu ondoren kolore bereko ia pieza guztiak kutxaren alde berdinean zeudela hauteman zen eta kolore berdineko baina beste leku batean kokatutako piezen zergatia, agertutako zulo ezberdinak estaltzea izan zen.



*Irudia 11: Lau-bost urte, azken emaitza*

Agertutako zuloen kontzeptuarekin jarraituz, esan daiteke talde honetako haurrek zuloa estaltzearekin batera, azken hau desagertzen zela uste zutela. Izan ere, beraien helburua piezak kutxan sartu ahala agertzen ziren zuloak estaltzea zen, nahiz eta zuloa ez bete.

- IR: Eta hor dago zulo bat zer sartuko duzue
- IK4: kubitto bat

Jardueran zehar ikusi izan da lau urteko haurrek ez zirela errotazioaren kontziente. Hau da, momentu batzuetan zulo baten aurrean aurkitzen zirenean pieza era batera sartzen

saiatzen ziren, hau ez lortzerakoan pieza alde batera utzi eta beste bat hartzen zuten. Hala ere, esan beharra dago, momentu batzuetan bost urteko haurrak, lau urtekoei “horrela ez, horrela, bestela ez da sartzen.” bezalako esaldiekin lau urtekoen jarduna bideratzen zutela.

Jarduera bukatutik, talde honi kanpoan gelditutako piezak, kutxako piezarik handienak izan ziren, izan ere, erabilitako estrategia bat pieza txikiak zuloak tapatzeko erabiltzea izan zen, baina pieza txikiak bukatu zirenean handiak sartzeko zailtasunak agertu ziren, ondorioz azken hauek kanpoan geldituz.

### Lau urteko haurren taldea

Azkeneko taldea lau urteko haurrez osatutako taldea izan da, azken hau, bi neska eta bi mutil ez osatuta egon da. Kasu honetan, aurreko bi taldeekin ez bezala guztiek parte hartu dute eta guztiak batera lanean ibili dira.

Sailkapenak egiterako unean talde honek kolorearen arabera ondo bereiztu zituen, bakoitzak kolore bat aukeratu zuen eta kolore horretako piezak hartu zituen. Hala ere, formaren arabera bereizteko unean tamainak errez engainatzen zituen eta forma berdineko piezak multzo ezberdinetan kokatu zituzten.

Erronka planteatu ondoren haurren jardueran ikusi izan zen errotazioaren inguruko kontzientzia ez zutela eta pieza bat era batera sartzen ez bazen beste bat erabiltzen zutela.



*Irudia 12: Lau urte, azken emaitza*

## **Amaierako asanblean emandako argumentuak eta estrategiak**

Azkenik amaierako asanblean hurrei egindakoaren inguruan galdetu zaie eta honi esker beraien jarduna azaltzeko unean erabiltzen dituzten argumentuak ikusi ahal izango ditugu. Horrez gain, ematen dituzten argumentuei esker haurrak prozesuan erabilitako estrategiak argiago ikusi ahal izango ditugu. Azalpenak eman dituen lehenengo taldea bost urteko ahurren taldea izan da:

- IR: ze hasi zarete egiten lehenengo bekoa edo goikoa?
- IK1 eta 8: bekoa
- IR: eskinak edo barrukoa?
- IK8: barrukoa
- IR: Erditik kanpora edo kanpotik barrura?
- IK1: Kanpotik barrura
- IR: eta koloreak?
- IK1: koloreak ipini doguz hola zergatik hau egoten bada zutunik ezin da kabitu
- IK2: ipini dituguz guk nahi dugun koloreetatik ba holan
- IR: ez duzue jarraitu kolore bat?
- IK1,2, eta 8: ez
- IR: eta pieza hauek dira zailagoak?
- IK8 bai
- IR: eta ze piezetatik hasi zarie, hauek direla errezak edo hauek direla zailak?
- IK8: errezak

Ikusi da beraien estrategia kanpo aldetik hasi eta barrurantz piezak sartzen joatea izan zela, aldi berean kutxa beko solairutik goiko solairura betez. Gainera, altuera maximoaren kontzeptua ulertu zuten eta errotazioa erabili zuten arau hori betetzeko. Azkenik, esan beharra dago beraien estrategia ez zela kolorearen arabera gidatua izan, baizik eta piezak tamainaren edota formaren arabera erabili zituztela, errazenetik hasiz eta zailenekin bukatuz.

Lau eta bost urteko haurrak nahastuta zeuden taldeak ondorengo azalpenak eman ditu:

- IR: IK6 kontako diguzu zelan jarri dituzun piezak
- IK6: Bata bestearen gainean

- IR: Jarri dozuz hemen moreak danak batera?
- IK6: bai
- IR: IK4 eta zuk zelan lagundu duzu
- IK4: ba jartzen gainean gainean eta gainean
- IR: eta zulo hau zeinekin tapatuko zenuke?
- IK4: gorrigaz
- IR: eta hau horrela jartzen badot sartzen da kutxan?
- IK4: ez
- IR: eta ez dauz zuloak hortik? dena gelditu da tapata?
- IK3: ez, dago ze hau dago tapatuta
- IR: tapatu dozuen zuloak beste pieza batzuegaz?
- IK3: tapatu tapatu tapatu
- IR: eta hau ez da sartzen?
- IK3 ez da sartzen

Ikusi izan da lau-bost urteko haurren talde honetan koloreak pisua hartu zuela eta jardueraren gidari izan zela. Aldi berean, talde honen helburua begi hutsez zuloak ez ikustea izan zen eta horretarako pieza errazenak erabili zituzten. Berriz, piezen errotazioak erraz engainatzen zituen eta zuloak estaltzeko unean piezak posizio bakarrean erabiltzen zituzten.

Lau urteko haur taldeak honela azaldu du bere jarduna:

- IR: Zelan egin dozu
- IK5: ondo
- IR: baina zelan? Jarri dozuz piezak eta gero joan zara mugitzen esta?
- IK5: bai
- IR: zer da egin dozuna?
- IK5: ipini horrek
- IR: ordenean jarri dozuz
- IK5: bai
- IR: ze orden?
- IK5: horrela
- IR: sartu dozuz eta gero joan zara mugitzen esta?
- IK5: eta gero sarratu dugu kutxa

Argi geratu da, haur hauen estrategia kutxa barruan ahalik eta pieza gehien sartzea eta ondoren hauek mugituz beste piezentzako tokia egitea izan zela. Hala ere, azalpenak emateko unean zailtasunak agertu ziren.

## **ONDORIOAK**

Lan honen ondorioak ateratzeko unean hiru azpiatal bereiztu dira. Lehenengoa problemaren inguruan, bertan planteatutako problema eta teoriak aipatzen dituen zenbait irizpide alderatu dira. Bigarrena, estrategiak, bertan lanaren lehenengo helburuaren inguruan ateratako ondorioak azaldu dira. Azkenik, argudioak atalean, haurrek prozesuan emandako argudioetatik ateratako argudioak aztertu dira.

### **Problemaren inguruan**

Jarduera honen bitartez, haurrak ezagutza matematikoa eraikitzeke baliagarria den problema baten aurrean kokatzen dira, honi esker estrategia ezberdinak pentsatzeko aukera izan dute eta azken hauek era praktikoa batean frogatzeko aukera eskaini zaie

Prozesuan zehar beraien ideiak ordenatzeko beharra izan dute, problema zehatz bati ahalik eta konponbide egokiena eman ahal izateko. Gainera, haurrei beraien egindakoaren inguruko azalpenak eskatzerakoan, egindako jardunaren inguruko hausnarketa bultzatu da.

Horrez gain, Santosek (1997, apud Sepúlveda et al., 2009) problema matematikoak izan behar dituzten ezaugarrien inguruan aipatzen duenarekin lotuta. Haurrek esplorazioaren bitartez problemaren ebazpen ezberdinak lortzeko aukera izan dute. Honi esker planteatu zaien problema maila kognitibo ezberdina duten haurretara egokitzea posiblea izan da.

Planteatutako problema NCTMk aipatzen duen moduan, baliagarria izan da haurrek forma eta egitura geometrikoak aztertzeke eta haien ezaugarriak eta erlazioak aztertzen ikasteko (Vargas eta Gamboa, 2013). Izan ere, planteatutako problemak hiru dimentsioko piezak manipulatzeko eta haien artean erlazioak ezartzeko aukera eman die. Gainera, Bruce eta Hawesen ikerketan (2015, apud Dindyal, 2015) haurrek forma eta irudiekin lan



egiteko, hurrek objektu geometrikoen ereduak mugitzeko aukera izan behar dutela aipatzen da, honi esker irristadura, isla edota errotazioa bezalako transformazio geometrikoetatik ohartaraziz. Azken hau hurrek, espazioarekin lotuta dauden zenbait kontzeptu estrategia moduan erabili dutenean ikusi izan da. Besteak beste, errotazioa.

Planteatutako problemak alde negatiboak ere baditu, izan ere, haur batzuk prozesuan aspertu eta saiatzeari utzi diote. Hau da, haurren izaera determinatzailea izan da eta horren arabera haurren jarduna aktiboa edo pasiboa izan da.

## **Estrategiak**

Adin ezberdinetako hurrek prozesuan zehar erabilitako estrategiak desberdintasuna abiapuntutzat hartuta hurrengo ondorioak agertu dira. Lau urteko umeak ikusmenean oinarritzen direla eta ikusten ez dutena ez dutela kontuan hartzen. Azken hau agerian geratu da zuloak agertu diren uneetan. Horrekin lotuta, bost urteko haurrak errotazioa estrategia moduan erabiltzen duten heinean, lau urtekoek ez dira piezak errotatzen saiatu ere egin. Horrez gain, aipatzekoa da lau eta bost urteko haurren artean koloreak gutxinaka garrantzia galtzen duela. Hau piezen ezaugarriak aipatzeko unean edota kutxa barruan piezak kokatzeko eran ikusi izan da. Gainera, bost urteko haurrak erpina bezalako kontzeptuak ulertzeko eta hauek era praktikoa batean erabiltzeko gai diren heinean, lau urtekoen kasuan kontzeptua ulertzea zaila egiten zaie eta piezen errotazioak erraz engainatzen ditu. Azkenik, taldeetan zehar ikusi izan da, talde bakoitzak piezen ezaugarri batean jarri duela arreta. Lau urtekoak kolorean, lau-bost urtekoak tamainan eta bost urtekoak forman. Beraz, ikusi da haurren adinak gora egiten duen heinean problema ebasteke unean erabiltzen den piezen ezaugarri nagusia gero eta konplexuagoa dela, propietate kualitatiboetatik kuantitatiboetara igaroz.

Talde guztietan agertutako estrategia komun hauez gain bost urteko haurren taldean erabilitako bestelako estrategietatik abiatuz, hurrengo ondorioak atera daitezke: Piezen arteko deskonposizioz ohartarazten hasi direla eta pieza ezberdinak sortzeko gai direla. Horrez gain, erpinen kontaktarekin ikusi izan da, piezen ezaugarrietan arreta jartzen ez dutela eta kontaketa estrategia gisa erabiltzen dutela. Azkenik, haur batek, problema ebatzi ezinaren aurrean piezak izkutatzearen estrategia erabili du.

## Argumentuak

Prozesuan hurrek emandako argumentuei erreparatuz, argi geratu da, orokorrean egindako jarduna azaltzeko unean, ume gehienak ez direla egiten hari diren zergatiaren kontziente eta jarduna azaltzeko unean zailtasunak agertu direla. Horrekin lotuta, argudioak ematerako unean, haurrak gero eta gazteagoak izan irakaslearen paperak gero eta garrantzi handiagoa hartzen du. Izan ere, lau urtekoen kasuan, irakasleak egindako galderak zehatzagoak ziren, bost urtekoegi egindako galderak zabalagoak ziren bitartean. Hau horrela egin da, bost urtekoek azalpenak emateko gaitasun handiagoa adierazi dutelako, beraz, irakaslearen interbentzioa ez da hain garrantzitsua izan. Azkenik, aipatzeko gelditzen da haur gehienak Van Hieleren lehenengo mailako ezaugarriak betetzen dituztela, baina, jardueretan emandako azalpenak kontuan izanik bost urteko haur batzuk Van Hieleren bigarren mailako argudioak ematen hasi dira. Beraz, Van Hieleren bigarren mailara salto egiteko pausoak ematen hasi direla ondoriozta daiteke, horrekin batera argudio matematikoak eskainiz.

Azkenik, lanaren helburu pertsonalei erreparatuz, agerian geratu da matematikak jolas bezala erabiltzea eta horren bitartez ikastea posiblea dela. Izan ere, haurrak prozesu guztian oso motibatuta agertu dira eta jolasa errepikatzeko eskakizuna egin dute. Beraz, beraiek adierazitako motibazioa matematikak irakasteko funtsezko baliabide gisa erabili daiteke.

## ERREFERENTZIA BIBLIOGRAFIKOAK

- 237/2015 Dekretua (2015-12-22). *Haur Hezkuntzako curriculuma zehaztu eta Euskal Autonomia Erkidegoan ezartzekoa*. 142, 2016ko Urtarrilaren 15a. Hemendik hartua: <https://elearning3.hezkuntza.net/013159/mod/resource/view.php?id=14594>
- Alsina, A. (2012). Hacia un enfoque globalizado de la educación matemática en las primeras edades. *Números*, Bol (80), 7-24.or.
- Alsina, A. (2012). Más allá de los contenidos, los procesos matemáticos en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 1(1), 1-14.or.
- Berciano, A., Jiménez, C. eta Salgado, M. (2017). Razonamiento y argumentación en la resolución de problemas geométricos en educación infantil: un estudio de caso. En Muñoz, J.M.; Arnal, A., Beltrán, P., Callejo, M.L., Carrillo, J. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 147-156). Zaragoza, España: Universidad de Zaragoza.
- Blanco, L. (1993). Una clasificación de problemas matemáticos. *Épsilon*, Bol (25), 49-60. or.
- Clements, D. H., eta Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 420-464.or.
- Clements, H., Swaminathan, S., Zeitler, M. A. eta Sarama, J. (1999). Young children's concepts of shape. En ProQues(Ed). *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 192.
- De Villiers, M. (2010). Some reflections on the van Hiele theory. En Academia, *Invited plenary from 4th Congress of teachers of mathematics*.
- Dindyal, J. (2015). Geometry in the early years: a commentary. *ZDM Mathematics Education*, Bol (47), 519–529 or.
- Mason, M. (2009). The van Hiele levels of geometric understanding. *Colección Digital Eudoxus*, Bol 1(2).
- Sepúlveda, A. Medina, C. eta Itzel, D. (2009). La resolución de problemas y el uso de tareas en la enseñanza de las matemáticas. *Scielo*, Bol (21).
- Vargas, G. Gamboa, R. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia*, Bol (27), 74-95.or.
- Vanegas, J., Henao, S. (2013). Educación Matemática Realista: la modelación matemática en la producción y uso de modelos cuadráticos. En SEMUR, *Sociedad de Educación Matemática Uruguaya (Ed.), VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 2883-2890). Montevideo, Uruguay: SEMUR.

## ERANSKINAK

### 1.ERANSKINA: EMR-ren printzipioak (Vanegas, Henao, 2013):

EMR-ren printzipioak
<p><u>Errealitatearen printzipioa</u>: testuinguru eta egoera errealistatik abiatu behar dela adierazten du, ikasleek arazo-egoera matematizatzeko beharra senti dezaten. Testuinguru eta egoera errealista horiek nolabaiteko lotura dute mundu errearekin, baina, batez ere, ikasleen buruan errealak diren egoerak dira, eta, beraz, egoera errealistek izatea erlatiboa da, ikasleen alde aurreko esperientziaren edota ikasleek egoera irudikatzeko duten gaitasunaren arabera izan daiteke, eta ez dira zertan mundu errealetik datozen arazoak izan behar</p>
<p><u>Mailaren printzipioa</u>: modelazio matematikoaren prozesuan, ikasleek ulermen-maila desberdinak dituzte: testuinguruari estuki lotutako soluzio informalak asmatzeko gaitasunetik, egoeraren eskematizazio orokorretatik pasatuz, beste testuinguru eta egoera batzuetan aplikatu daitezkeen harreman zabalagoak eskuratzera.</p>
<p><u>Elkarloturaren printzipioa</u>: eskolako eduki matematikoen artean erlazio eta integrazio handia dago; izan ere, egoera errealistak ebazteko, askotan, tresna eta ezagutza matematiko anitzekin loturak ezarri behar dira.</p>
<p><u>Orientazio-printzipioa</u>: irakasleek berebiziko garrantzia dute ikasleek ezagutzak eskuratzeko duten moduan, eta ezinbestekoa da ezagutza horiek jakintza matematikoak eraikitzeko espazioak sustatzea.</p>
<p><u>Jarduera-printzipioa</u>: esan nahi du ikasleek egoera arazotsuei egin behar dietela aurre, eta egoera horietan beren ezagutza informalekin bidez matematika berrasmatzen dutela ikaskuntza-prozesuan parte-hartzaile aktibo gisa.</p>
<p><u>Elkarrekintzaren printzipioa</u>: matematika ikastea gizarte-jarduera bat da, non talde-elkarreraginak (ikasle-ikasleak eta ikasle-irakasleak) ulermen-mailak areagotzea sustatzen duen. Horrek ez du esan nahi ikasle guztiek ulermen-maila bera lortzen dutenik, baizik eta ikasle bakoitzak bere ikaskuntza-ibilbideari jarraitzen diola.</p>

**2.ERANSKINA: Matematikako curriculumean oinarritutako prozesua** (Alsina, 2012b)

Arazoak konpontzea:	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Ezagutza matematiko berria eraikitzea, problemak ebatziz.</li> <li>- Matematikatik eta beste testuinguru batzuetatik sortzen diren problemak ebaztea.</li> <li>- Problema ebazteko estrategia egokiak aplikatzea eta egokitzea.</li> <li>- Problema matematikoak ebazteko prozesuak kontrolatzea eta horiei buruz hausnartzea.</li> </ul>
Arrazoiketa eta frogapena:	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Arrazoiketa eta proba matematikaren funtsezko alderdi gisa ezagutzea.</li> <li>- Iritzi matematikoak egitea eta ikertzea</li> <li>- Argudioak eta probak garatzea eta ebaluatzea.</li> <li>- Hainbat arrazoibide eta froga-metodo hautatzea eta erabiltzea</li> </ul>
Komunikazioa	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Komunikazioaren bidez bere pentsamendu matematikoa antolatzea eta sendotzea.</li> <li>- Bere pentsamendu matematikoa modu koherente eta argian komunikatzea ikaskideei, irakasleei eta beste pertsona batzuei.</li> </ul>
Ordezkaritza	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Ideia matematikoak antolatzeko, erregistratzeko eta komunikatzeko irudikapenak sortzea eta erabiltzea.</li> </ul>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Problemak ebazteko irudikapen matematikoak hautatu, aplikatu eta itzultzea.</li> <li>- Irudikapenak erabiltzea fenomeno fisikoak, sozialak eta matematikoak modernizatzeko eta interpretatzeko.</li> </ul>
Konexioak	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Ideia matematikoen arteko loturak ezagutzea eta erabiltzea.</li> <li>- Ideia matematikoak nola erlazionatzen diren eta osotasun koherente batean nola antolatzen diren ulertzea.</li> <li>- Matematika-ideiak testuinguru ez-matematikoetan ezagutzea eta aplikatzea.</li> </ul>

### 3.ERANSKINA: Alsinasen faseak (Alsina, 2012a)

Hezkuntza Matematikoa eguneroko bizitzan	
1. fasea: testuinguruaren matematizazioa	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Fase honetan oraindik ez dute ikasleek esku hartzen: aukeratutako ikaskuntzaren testuinguruan landu daitezkeen eduki matematiko guztiak aztertzen dira (zenbaketa eta kalkulua, geometria, aljebra, datuen neurketa eta analisisia eta probabilitatea).</li> </ul>
2. fasea: ikasgelako aldez aurreko lana	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Ikaskuntza-testuingurua aurkezten da: eskolako patioa, herriko plaza, etab.</li> <li>- Ikasleekin elkarrizketa bat hasten da, haien aurretiazko ezagutzak eta esperientziak jasotzeko. Horretarako, honako galdera hau erabili daitezke: zer matematika dago?</li> <li>- Guztion artean lana testuinguruan dokumentatzeko behar den materiala erabakitzen da: kamera digital bat, zinta metriko bat, kalkulagailu bat, aurkikuntzak idazteko edo marrazteko libreta bat, etab.</li> </ul>
3. fasea: Lan testuinguratua	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Ikasleek aukeratutako ikaskuntza-testuinguruan dagoen matematika aztertzen dute.</li> <li>- Deskubritzen dutena dokumentatzen dute argazkien, marrazkien, liburuxkako oharren eta abarren bidez.</li> <li>- Irakaslea galderak egiten oinarritzen daa,</li> </ul>

	azalpenak alde batera utziz.
4.fasea: Ikasgelako ondorengo lana	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Elkarrizketa bat ezartzen da ikasleekin, aurkitu dutena komunika dezaten, matematika-hizkuntza egokia erabil dezaten saiatuz.</li> <li>- Irudiak hainbat alderdi matematiko lantzeko oinarri gisa erabiltzen dira (ezaugarri sensorialak, kantitateak, posizioak eta formak, ezaugarri neurgarriak eta abar ezagutzea, erlazionatzea edo erabiltzea).</li> <li>- Grafikoki irudikatzen da testuinguruan egindako lana poster baten bidez, fitxa batean, etab.</li> </ul>



#### 4.ERANSKINA: Inplementazioa

Izena	Alsinasen fasea	EMR-ren printzipioa	Matematikako curriculum	Helburua
Aurre ezagutza eta problemaren planteamendua	Ikasgelako aldez aurreko lana	Errealitatearen printzipioa Mailaren Printzipioa Elkarloturaren printzipioa Orientazioaren printzipioa		Haurrak gaiak kokatzea eta figuren ezaugarrietan arreta jartzen hastea  Problema planteatzea
Txokoak	Lan testuinguratua	Jarduera printzipioa Elkarrekintza printzipioa	Arazoak konpontzea Komunikazioa	Erabiltzen dituzten estategiak aztertzea
Amaierako asanblea	Ikasgelako ondorengo lana		Arrazoiketa eta frogapena Konexioak	Haurren argumentuak entzutea eta beraien jarduna hobeto ulertu eta aztertu ahal izatea
Irudia			Ordezkaritza	Haurrek egindakoaren gordekina eskuratzea

**5.ERANSKINA: Van Hieleren mailak** (De Villiers, 2010).

VAN HIELE 1.MAILA	BAI	EZ
(1) Sarritan, ikusizko propietate hutsalak erabiltzen ditu figurak identifikatzeko, alderatzeko, sailkatzeko eta deskribatzeko.		
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Figurak tamaina edota kolorearen arabera bereizten ditu?</li> <li>- Figurak identifikatzeko unean, ingurune objektuei egiten die erreferentzia?</li> </ul>		
(2) Figuren ikusizko prototipoei egiten die erreferentzia eta figuren orientazioak erraz engainatzen du.		
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Figura berdina posizioaz aldatzerakoan beste era batean definitzen du?</li> <li>- Zailtasunak agertzen dira, figuraren momentuko posizioa eta problema ebazteko figurak hartu behar duen posizioa desberdina denean?</li> </ul>		
(3) Figura mota jakin baten aldakuntza amaigabeetan pentsatzeko ezintasuna (adibidez, orientazioari eta formari dagokienez).		
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Figurak posizio bakarrean erabiltzen ditu?</li> <li>- Figuren errotazioaz ohartarazten da?</li> </ul>		
(4) Figuren sailkapen inkoherenteak; adibidez, propietate ez ohikoak edo propietate hutsalak erabiltzea figurak sailkatzeko.		
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Problema ebazteko unean kolorea edota tamaina bezalako propietateak erabiltzen ditu figurak multzokatzeko?</li> </ul>		
(5) Figuren deskribapen (definizio) osatugabeak, beharrezko baldintzak (askotan ikusizkoak) baldintza nahikotzat hartzen ditu.		
GALDERA BALIAGARRIAK: Zergatik jarri duzue x pieza kokapen horretan? Posiblea da x pieza beste era batera kokatzea? Nola? Nola deituko zenuke x pieza? eta orain?		

VAN HIELE 2.MAILA		
(1) Figuren konparazio esplizitua egiten du.		

- Figurak beraien artean desberdintzen ditu, bata eta bestearen propietateak argi azalduz?		
(2) Figura mota desberdinen arteko klase-inklusiok saihesten dira; adibidez, laukiak eta laukizuzenak disjuntutzat hartzen dira.		
(3) Figurak propietate bakar baten arabera sailkatzea, adibidez, aldean propietateetan zentratzea simetriak, angeluak eta diagonalak alde batera utziz.		
- Figurak alde kopuruaren edota honen luzeraren arabera bereizten ditu? - Figurak ertz kopuruaren arabera aldatzen ditu?		
(4) Figurak deskribatzeko (definitzeko), hauen propietateen erabilera ez oso ekonomikoa erakustea.		
- Figuren propietateen inguruan hitz egiterakoan, hauek era luze eta nahastuan ematen ditu?		
(5) Beste pertsona batek emandako definizioak ez ditu onartzen eta norberaren definizioen alde egiten du.		
- Liskarrak sortu dira beraien artean gauza bera era ezberdin batean azaltzeagatik?		
(6) Baieztapen baten egia ezartzeko ikuspegi enpirikoa erabiltzen du; adibidez, behaketaren eta neurketaren erabilera hainbat zirriborrotan oinarrituta.		
- Irakasleak eskainitako ideiak bere kabuz frogatzen ditu?		
GALDERA BALIAGARRIAK: Zergatik x pieza erabili duzu eta ez y? Ze desberdintasun ikusten duzu bi figura hauen artean?		

**6.ERANSKINA: Materialaren argazkiak**

